

文章编号: 1000-5862(2014)06-0605-05

# 一种快速高精度的改进 Fitz 频率估计算法

王芳 陈勇 叶志清

(江西师范大学物理与通信电子学院 江西 南昌 330022)

**摘要:** 针对 Fitz 频率估计算法频率估计方差在高信噪比情况下仍与克拉美劳下限存在着较大差距问题, 提出了一种改进的 Fitz 频率估计算法. 首先定义一种广义 Kay 窗函数加权的修正自相关函数, 然后计算修正自相关函数相位的加权和, 最终得到复正弦信号的频率估计值. 仿真实验结果表明: 当数据长度  $N = 24$ , 信噪比  $S_{NR} = 20$  dB 时, 改进算法的频率估计方差降低了约 2 dB, 且改进算法的计算复杂度与 Fitz 算法相当. 因此, 改进算法在满足实时性要求的同时, 取得了更高的频率估计精度.

**关键词:** 频率估计; 自相关; 实时; 克拉美劳界

**中图分类号:** TN 911.6

**文献标志码:** A

## 0 引言

白噪声环境下复正弦信号的频率估计在雷达、声纳、数据测量、载波恢复、语音编码、感知阵列等领域有广泛应用. 如何从  $N$  个离散采样点中求解信号的频率是信号估计领域一个热点问题. 早在 1974 年, D. C. Rife 等<sup>[1]</sup>就提出了频率估计方差可以达到克拉美劳下限(CRB)的最大似然(ML)频率估计方法. 从统计学意义上讲, ML 方法是性能最优的频率估计方法, 但该算法计算复杂、速度慢、且不利于实时处理, 一般很少直接采用 ML 估计. 为实现快速高精度频率估计, 国内外学者提出了很多次优的频率估计算法, 本文将归纳为以下的 3 种类型.

1) 子空间类算法. 此类算法中最具代表性的有: 多重信号分类算法(MUSIC)<sup>[2]</sup>、子空间旋转不变算法(ESPRIT)<sup>[3]</sup>等现代谱估计算法. 它们利用信号协方差矩阵的特征向量张成信号子空间和噪声子空间, 从而得到频谱估计的几何解. 其特点是频率分辨率高, 但运算量大, 不利于实时处理;

2) 频域估计算法. 此类算法通常采用 FFT 谱线内插的方法获得较精确的频率估计. D. C. Rife 算法是对幅度最大的 2 根谱线的幅度进行内插, 而 B. G. Quinn 算法<sup>[4]</sup>是对谱线幅度之比的实部进行插值. D. C. Rife 算法与 B. G. Quinn 算法的计算量小, 实现简单, 但随着信号频率变化, 其估计性能波动很大. 尤其是在低信噪比下, 对于某些特定的频率点, 噪声会使得插值出现方向性错误而导致估计性能急剧恶

化. MRife 算法<sup>[5]</sup>通过人为引入一定的频偏, 在一定程度上避免了出现插值方向性错误, 但与此同时却大大增加了频率估计的时延, 不适合对突发信号的频率估计;

3) 时域估计算法. S. A. Tretter 最早提出利用信号的瞬时相位进行频率估计<sup>[6]</sup>, 其频率估计方差理论上可达到 CRB. 但实际上, 瞬时相位只能在主值范围内测量, 而在观测期间相位的变化范围一般远远超过  $2\pi$ , 即在相位测量中存在模糊问题. S. Kay 提出利用信号的相位差进行频率估计<sup>[7]</sup>, 简单而有效地解决了相位模糊问题, 但分析表明 Kay 算法的信噪比阈值较高. M. P. Fitz 进一步提出不仅可以利用相邻采样点的相位差, 还可利用相距较远的采样点的相位差<sup>[8]</sup>, 即以自相关函数相位加权平均实现频率估计. 在低信噪比时取得了较 Kay 算法更佳的频率估计性能, 其信噪比阈值可达 -10 dB, 但付出的代价是频率估计范围减小<sup>[9]</sup>. M. Luise 等<sup>[10]</sup>提出的加权线性预测频率估计方法与 Fitz 算法的原理基本一致.

U. Mangali 等<sup>[11]</sup>提出利用相关函数的相位差来估计频率, 使频率估计范围大大增加, 但计算量比 Fitz 法和 LR 法略大, 且信噪比阈值在 0 dB 以上.

综上所述, 子空间类算法的估计精度高但实时性差, 频域估计算法的实时性强但估计精度不足, 而时域估计算法, 特别是 Fitz 算法, 在实时性以及估计精度方面取得折中, 因此在工程中获得广泛应用<sup>[12-15]</sup>. 基于此, 本文在 Fitz 算法的基础上, 提出了一种基于修正自相关函数的改进 Fitz 频率估计算

收稿日期: 2014-09-17

基金项目: 国家自然科学基金(11164008), 江西省自然科学基金(20114BAB202003), 江西省光电子与通信重点实验室开放基金(2013001)和江西师范大学青年成长基金(20124516)资助项目.

作者简介: 王芳(1982-), 女, 江西南昌人, 讲师, 主要从事统计信号处理的研究.

法.与 Fitz 算法相比,改进算法没有额外增加计算复杂度,但却进一步提高了频率估计精度,因此具有一定的工程实用价值.

## 1 Fitz 算法与其性能分析

AWGN 背景中的单一频率复正弦信号的观测序列可表示为

$x(n) = A \exp[j(\omega n + \theta)] + z(n) \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$   
其中复正弦信号的幅度  $A$ 、频率  $\omega$  以及初始相位  $\theta$  为确定参数,但大小未知.假设  $z(n)$  为 0 均值复白高斯噪声  $z(n) = z_r(n) + jz_i(n)$ , 其中  $z_r(n)$  与  $z_i(n)$  均为实高斯随机变量,其均值为 0,方差为  $\sigma_z^2/2$ ,且  $z_r(n)$  和  $z_i(n)$  之间不相关.定义信号  $x(n)$  的信噪比为  $S_{NR} = A^2/\sigma_z^2$ . 本文主要关注未知参数  $(A, \omega, \theta)$  中频率  $\omega$  的估计问题,而对频率  $\omega$  的最大似然估计等价于搜寻信号  $x(n)$  的周期图的最高峰,即

$$\hat{\omega}_{ML} = \arg \max_{\omega} \left| \sum_{n=1}^N x(n) \exp[-j\omega n] \right|^2, \quad (2)$$

对 (2) 式中的似然方程关于频率  $\omega$  求导数,令其结果为 0,并经过简单整理后得

$$\text{Im} \left[ \sum_{m=1}^N m \hat{R}_N(m) \exp(-j\omega m) \right] = 0, \quad (3)$$

其中

$$\hat{R}_N(m) = \sum_{k=m+1}^N x(k) x^*(k-m) \quad (4)$$

为非归一化相关函数. (4) 式中,  $[\cdot]^*$  表示求共轭. 在无噪声的情况下,易知相关函数为  $\hat{R}_N(m) = K \cdot \exp[j\omega m]$ . 在相关函数  $\hat{R}_N(m)$  的相位中正好包含了需要估计的频率信息,即  $\arg\{\hat{R}_N(m)\} = m\omega$ , 其中  $\arg\{\cdot\}$  表示求相位值.

假设信噪比足够高,可以得到如下的近似结果

$$\text{Im} [\hat{R}_N(m) \exp(-j\omega m)] \approx K \cdot [\arg\{\hat{R}_N(m)\} - m\omega], \quad (5)$$

将 (5) 式代入 (3) 式得

$$\sum_{m=1}^N m [\arg\{\hat{R}_N(m)\} - m\omega] = 0, \quad (6)$$

通过求解 (6) 式得频率估计为

$$\hat{\omega} = \frac{6}{N(N+1)(2N+1)} \sum_{m=1}^N m \arg\{\hat{R}_N(m)\}. \quad (7)$$

但为避免在求解相关函数  $\hat{R}_N(m)$  的相位时出现相位模糊问题,在 (7) 式中通常仅利用  $J$  项相关函数来估计频率  $\omega$ , 其中  $J \ll N$ , 则此时频率估计为

$$\hat{\omega} = \sum_{m=1}^J C(J, m) \arg\{\hat{R}_N(m)\}. \quad (8)$$

将 (8) 式称为 Fitz 频率估计算法,其中系数

$$C(J, m) = m / \sum_{m=1}^J m^2. \quad \text{可见, Fitz 算法不仅利用了相}$$

邻采样点的相位差,还利用了相距较远的采样点的相位差,故在低信噪比时能取得较 Kay 算法更佳的频率估计性能.但另一方面, Fitz 算法的频率估计方差仍未达到 CRB,且与之存在一定的差距. Fitz 算法在高信噪比时的理论频率估计方差如下所示<sup>[9]</sup>

$$\text{var}(\hat{\omega}) = \frac{1}{S_{NR}} \left[ \frac{6}{J(J+1)(2J+1)} \right]^2 \cdot \sum_{m=1}^J \left[ \sum_{k=1}^m \frac{k}{N-k} \right]^2. \quad (9)$$

仿真分析同样表明,即使当信噪比足够大时, Fitz 算法的频率估计方差仍然与 CRB 存在较大的差距.因此, Fitz 算法的频率估计性能仍有待进一步提高.本文将自定义的修正自相关函数引入 Fitz 算法,提出了一种改进的 Fitz 算法.新算法不仅没有明显增加计算复杂度,即保留了时域频率估计算法的实时性强的优点,而且同时又取得了更好的频率估计精度.

## 2 基于修正自相关函数的改进 Fitz 算法

在 (8) 式中若  $J = 1$ , 即仅利用自相关函数  $\hat{R}_N(1)$ , 则 Fitz 频率估计算法退化为 G. Lank 等<sup>[16-18]</sup>提出的未加权线性预测频率估计算法(UWLP).与 UWLP 算法相对应的是 Kay 提出的加权线性预测频率估计算法(WLP)<sup>[7]</sup>. WLP 频率估计算法为

$$\hat{\omega} = \arg\left\{ \sum_{k=2}^N w(k) x(k) x^*(k-1) \right\}, \quad (10)$$

其中

$$w(k) = \frac{3N/2}{N^2 - 1} \left\{ 1 - \left[ \frac{k - (N/2 + 1)}{N/2} \right]^2 \right\} \quad (11)$$

是使得 WLP 算法的频率估计方差达到最小的一组加权值,本文中简称为 Kay 窗函数.

仿真分析表明:随着信噪比的增加, UWLP 算法的频率估计方差始终无法达到 CRB, 而 WLP 算法的频率估计方差却能够逐渐接近并最终达到 CRB. 导致出现上述差别的原因正是由于在计算自相关函数  $\hat{R}_N(1)$  时, UWLP 算法采用了均匀加权, 而 WLP 算法采用了 Kay 窗函数加权.

借鉴 WLP 算法的思路, 本文定义修正自相关函数  $\hat{R}_w(m)$  为

$$\hat{R}_w(m) = \sum_{k=m+1}^N w(m, k) x(k) x^*(k-m), \quad (12)$$

其中

$$w(m, k) = \frac{3(N-m+1)/2}{(N-m+1)^2 - 1} \left[ 1 - \frac{(2k-N-m-1)^2}{(N-m+1)^2} \right] \quad (13)$$

是对 Kay 窗函数  $w(k)$  的推广. 特别地, 当  $m = 1$  时,  $w(m, k)$  等于 Kay 窗函数  $w(k)$ , 因此不妨将  $w(m,$

$k$ ) 称为广义 Kay 窗函数. 改进的 Fitz 算法为

$$\hat{\omega} = \sum_{m=1}^J C(J, m) \arg\{\hat{R}_w(m)\}, \quad (14)$$

即通过计算修正自相关函数相位  $\arg\{\hat{R}_w(m)\}$  的加权和得到频率估计值.

为方便起见, 下文中将改进的 Fitz 算法简记为 mFitz 算法. 对比 (8) 式和 (14) 式不难发现, mFitz 算法相对于 Fitz 算法并未明显增加计算复杂度, 但由于 mFitz 算法借鉴了 WLP 算法的思路, 即在自相关函数时采用了广义 Kay 窗函数加权, 因此有望取得较 Fitz 算法更佳的频率估计精度. 文中的仿真分析证明了这一点.

基于修正自相关函数的 mFitz 频率估计器的结构图如图 1 所示. 在实际应用中, 假设信号  $x(n)$  的长度  $N$  已知, 可以按照 (13) 式事先计算出所有的广义 Kay 窗函数系数  $w(m, k)$  并保存在 ROM 存储器中. 在利用 mFitz 算法估计信号频率时, 直接查找相应的广义 Kay 窗函数系数  $w(m, k)$  即可, 从而使得硬件实现系统(如 DSP 系统)的运算量进一步下降.

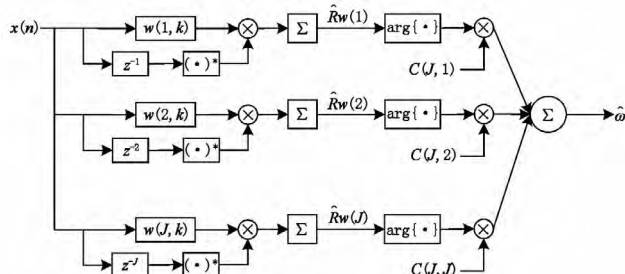


图1 改进的Fitz频率估计器

### 3 仿真分析

采用 Monte-Carlo 计算机模拟方法, 对 WLP、UWLP、Fitz、mFitz 等时域频率估计算法进行了仿真分析. 仿真条件为: 数据长度  $N = 24$ , 频率  $\omega = 0.1\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , 信噪比从  $-10 \text{ dB}$  增加至  $40 \text{ dB}$ , 考虑 3 种  $J$  的取值情况即  $J = 1, 2, 3$ , Monte Carlo 计算机模拟次数为 5 000 次.

图 2 给出了 Fitz 算法的频率估计方差仿真结果. 为方便对比不同仿真条件下的频率估计方差, 图 2 及其它仿真图形中将方差大小以对数的形式表示, 即  $10 \log(1/\text{var}(\hat{\omega}))$ . 图 2 表明: 1) Fitz 算法的频率估计方差随着信噪比增加而逐渐减小; 2)  $J$  的取值越大, Fitz 算法的频率估计方差就越接近 CRB; 3) 当信噪比达到  $40 \text{ dB}$  时, 对应  $J = 3$  的频率估计方差曲线与 CRB 之间仍然存在着约  $3 \text{ dB}$  的差距.

图 3 对比了 WLP 算法与 UWLP 算法的频率估计方差. 图 3 表明: 随着信噪比的增加, UWLP 算法的频率估计方差同样无法达到 CRB; 而 WLP 算法的频

率估计方差能够随着信噪比的增加逐渐接近并最终达到 CRB.

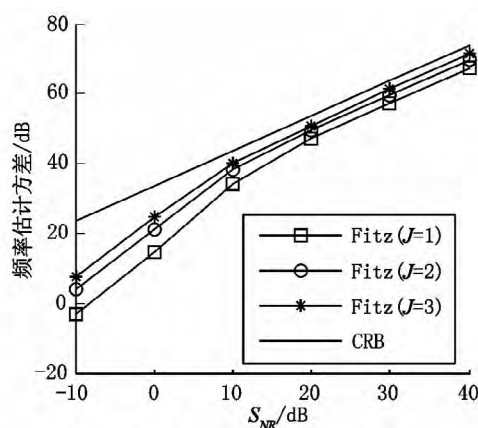


图2 Fitz算法的频率估计方差

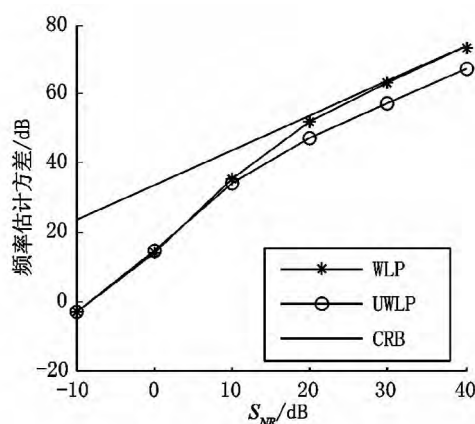


图3 WLP与UWLP算法的频率估计方差

图 4 给出了当  $N = 24$ ,  $\omega = 0.1\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  时 mFitz 算法的频率估计方差仿真结果, 而图 5 仿真了当  $N = 48$ ,  $\omega = 0.2\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  时 mFitz 算法的频率估计方差. 图 4 和图 5 表明: 1) 随着信噪比的增加, mFitz 算法的频率估计方差逐渐减小; 2)  $J$  的取值越大, mFitz 算法的频率估计方差就越接近 CRB; 3) 与 Fitz 算法不同, mFitz 算法在信噪比足够高时, 其频率估计方差能够逐渐接近并最终达到 CRB.

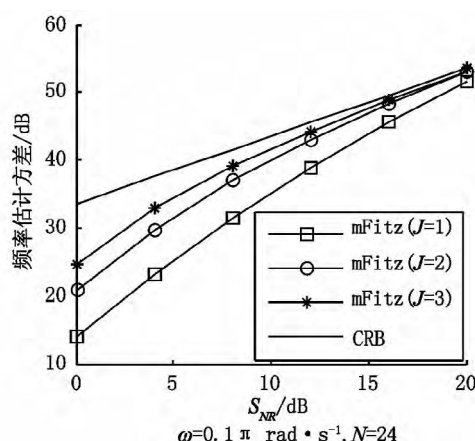


图4 改进Fitz方法的频率估计方差

图6给出了当 $N = 24$   $\omega = 0.1\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$   $J = 3$ 时WLP、UWLP、Fitz、mFitz等时域频率估计算法的方差对比结果,而图7给出了当数据长度 $N = 48$  频率 $\omega = 0.2\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$   $J = 3$ 时上述4种算法的频率估计方差对比结果.图6和图7表明:1) 本文提出的mFitz算法在参与对比的4种算法中取得了最好的频率估计精度,其频率估计方差曲线最接近CRB;2) 信噪比越大,mFitz算法相对于Fitz算法的频率估计精度改善就越显著.

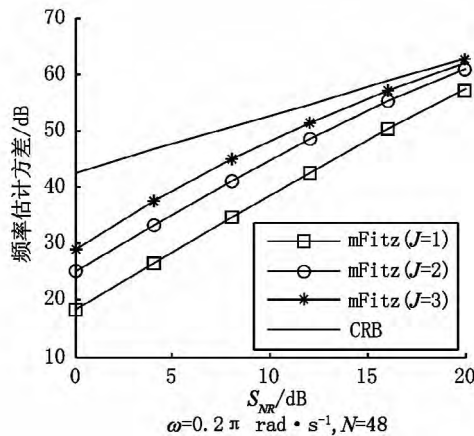


图5 改进Fitz方法的频率估计方差

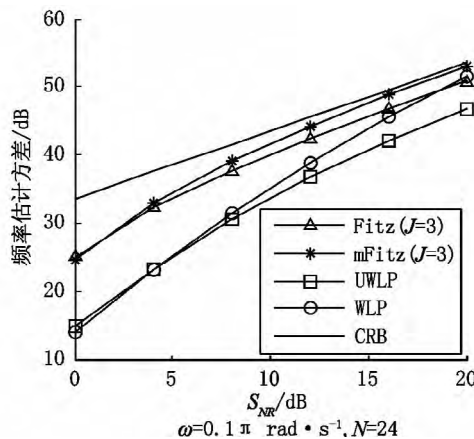


图6 时域频率估计算法对比

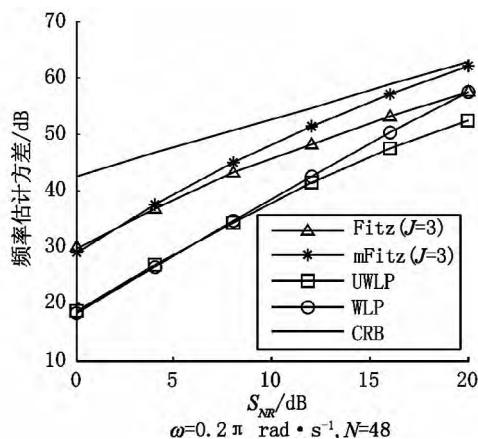


图7 时域频率估计算法对比

## 4 结论

时域频率估计算法具有实时性强与估计精度高等优点,已在工程中获得广泛应用. Fitz算法相对于其它时域频率估计算法具有较低的信噪比阈值,但分析表明当信噪比高达40 dB时,Fitz算法的频率估计方差仍然与CRB之间存在着较明显的差距.本文提出了一种改进的Fitz频率估计算法,首先定义一种广义Kay窗函数加权的修正自相关函数,然后计算修正自相关函数相位的加权和,最终得到复正弦信号的频率估计值.分析表明:1) 改进Fitz算法相对于Fitz算法在频率估计方差方面有较明显的改善;2) 改进Fitz算法的计算复杂度并未明显增加;3) 在现有的时域频率估计算法中,改进Fitz算法在兼顾实时性的同时,取得了更高的频率估计精度,具有较好的工程实用价值.

## 5 参考文献

- [1] Rife D C, Boorstyn R. Single tone parameter estimation from discrete-time observations [J]. Information Theory, 1974 20(5): 591-598.
- [2] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1986 34(3): 276-280.
- [3] Roy R, Kailath T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques [J]. Acoustics, Speech and Signal Processing, 1989 37(7): 984-995.
- [4] Quinn B G. Estimating frequency by interpolation using Fourier coefficients [J]. Signal Processing, 1997 28(2): 113-122.
- [5] 邓振森, 刘渝. 正弦波频率估计的牛顿迭代方法初始值研究 [J]. 电子学报, 2007 35(1): 104-107.
- [6] Tretter S A. Estimating the frequency of a noisy sinusoid by linear regression [J]. Information Theory, 1985, 31(6): 832-835.
- [7] Kay S. A fast and accurate single frequency estimator [J]. Acoustics, Speech and Signal Processing, 1989 37(12): 1987-1990.
- [8] Fitz M P. Further results in the fast estimation of a single frequency [J]. Communications, 1994, 42(2/4): 862-864.
- [9] 齐国清, 吕健. 基于自相关函数相位的频率估计方法方差分析 [J]. 大连海事大学学报, 2007 33(4): 5-9.
- [10] Luise M, Reggiannini R. Carrier frequency recovery in all-digital modems for burst-mode transmissions [J]. Communications, IEEE Transactions on, 1995, 43(234): 1169-1178.
- [11] Mengali U, Morelli M. Data-aided frequency estimation for burst digital transmission [J]. Communications, IEEE Transactions on, 1997 45(1): 23-25.

- [12] Cui Yang ,Gang Wei ,Chen Fangjiong. An estimation-range extended autocorrelation-based frequency estimator [J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing 2009 ( 10 ) :961938.
- [13] 杨德钊,宋凝芳,林志立等. 基于自相关及相位差法的高精度频率估计算法 [J]. 北京航空航天大学学报, 2011, 37( 8 ) : 1030-1033.
- [14] Fu H ,Kam P Y. Sample-autocorrelation-function-based frequency estimation of a single sinusoid in AWGN [C]// IEEE 75th Vehicular Technology Conference ,Yokohama , 2012: 1-5.
- [15] 曹燕. 含噪实信号频率估计算法研究 [D]. 广州: 华南理工大学 2012.
- [16] 邹昕,叶志清. 基于量子双向传态的多方量子通信网络的构建方案 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2013, 37( 5 ) : 492-496.
- [17] Lank G W ,Reed I S ,Pollon G E. A semicoherent detection and Doppler estimation statistic [J]. Aerospace and Electronic Systems ,1973, 9 ( 2 ) : 151-165.
- [18] 吴柳雯,叶志清. 用4粒子 $\Omega$ 纠缠态实现多粒子隐形传态 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2013, 37 ( 6 ) : 561-564.

## An Improved Fitz Frequency Estimation Algorithm with Fast Speed and High Accuracy

WANG Fang ,CHEN Yong ,YE Zhi-qing

( College of Physics and Communication Electronics ,Jiangxi Normal University ,Nanchang Jiangxi 330022 ,China)

**Abstract:** Fitz frequency estimation algorithm frequency estimation variance in the high SNR is higher and there is a big gap between the CRB. An improved Fitz frequency estimation algorithm ,which first defines the modified autocorrelation function weighted by generalized Kay window has been proposed and then calculates the sum of the weighted phases of the modified autocorrelation function finally gets the frequency estimation of the complex sinusoidal signal in AWGN. Computer simulation and analysis shows that: the frequency estimation variance of improved algorithm decreases about 2 dB when the data length is 24 and the signal to noise ratio is 20 dB ,while the calculated amount of improved algorithm and original algorithm is about the same. In the other words ,the proposed algorithm to meet the real-time requirement achieves a higher frequency estimation precision.

**Key words:** frequency estimation; autocorrelation; real-time; Cramer-Rao bound

( 责任编辑: 冉小晓)

( 上接第 599 页)

- [23] Leighton J P ,Gierl M J. Defining and evaluating models of cognition used in educational measurement to make infer-

ences about examinees' thinking processes [J]. Educational Measurement: Issues and Practice 2007, 26( 2 ) : 3-16.

## The Differential Step Functioning in Polytomous Items

LI Mei-juan<sup>1</sup> ,LIU Hong-yun<sup>2\*</sup>

( 1. Beijing Academy of Educational Sciences ,Beijing 100191; 2. School of Psychology ,Beijing Normal University ,Beijing 100875)

**Abstract:** The research mainly introduces Differential step functioning ( DSF ) how to play a role in the examination and interpretation of differential item functioning ( DIF ) effect. There are two parts in the research. The first part summarizes and reviews models ,methods ,patterns ,applications ,result interpretation about DSF abroad ,which aims to provide some reference for domestic test fairness. Using DSF analysis methodology by testing actual data ,the second part verifies the DIF in test items and different level of steps ,and takes further analysis to the reason for DIF production. Therefore ,it provides more specific and operational basis for the item review and revision.

**Key words:** polytomous items; differential item functioning ( DIF ) ; differential step functioning ( DSF )

( 责任编辑: 冉小晓)