第 39 卷 第 3 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 39 No. 3
2015 年 5 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) May 2015

文章编号:1000-5862(2015)03-0286-04

常利率下带投资的多险种风险模型的破产概率

牛银菊[1],邓 丽[2],马崇武[1]
(1. 东莞理工学院计算机学院,广东 东莞 523808;2. 兰州交通大学数理学院,甘肃 兰州 730050)

摘要: 根据现实环境中保险公司的经营情况,由于在一定时间段内,利率比较稳定,因此考虑的利率为常利率. 在考虑常利率及通货膨胀率下研究了带投资的多险种风险模型的破产概率,运用鞅方法得出了此模型最终破产概率满足的一般表达式.

关键词: 利率;投资;多险种;破产概率
中图分类号: O 211.67 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2015.03.12

经典风险模型的研究奠定了风险理论的基础[1]. 许多研究者对经典风险模型进行推广,在考虑保险公司的投资情况下,研究带投资组合的风险模型的破产概率[2-6],其中一部分资金用于投资稳定收益的项目,如政府债券;另一部分资金用于风险投资,如股票. 文献[7-8]建立了确定停止损失再保险的数学模型,文献[9-11]研究一类 2 种险种且理赔次数服从 Cox 过程的模型,文献[12-15]考虑了利率及通货膨胀率的影响. 在此基础上,由于保险公司实际运作中险种并不唯一,本文将以上模型进行推广,使研究的模型更接近现实运作. 针对改进的模型,运用鞅方法得到破产概率满足的一般表达式及其上界.

1 建立模型

考虑常利率及通货膨胀率的带投资的多险种风险模型为

$$U(t)=(u_1-u_2-u_3)(1+m-l)+u_2(1+r_1t)+u_3(1+r_2t+aB(t))+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{M_j(t)}X_i^{(j)}-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N_j(t)}Y_i^{(j)},\quad t\geqslant 0,\tag{1}$$

其中 $u_1>0$,$u_2>0$,$u_3>0$,$r_1>0$,$r_2>0$,$a>0$.

令 $S(t)=u_2r_1t+u_3(r_2t+aB(t))+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{M_j(t)}X_i^{(j)}-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N_j(t)}Y_i^{(j)}$,$t\geqslant 0$,那么

$$U(t)=u_1+(u_1-u_2-u_3)(m-l)+S(t),$$

其中,

(i) $U(t)$ 为保险公司在 t 时刻的盈余,$S(t)$ 为盈利过程,u_1 为保险公司的初始准备金,u_2 为投资于稳定收益的资金,u_3 为用于风险投资的资金,r_1 为 u_2 的收益率,$u_3(r_2t+aB(t))$ 为 u_3 的投资收益,它是带漂移参数的布朗运动,r_2 为漂移参数,a 为干扰因子,$B(t)$ 为标准布朗运动;

(ii) $\{M_j(t),t\geqslant 0\}$ 为险种 j 的保费收取次数,服从参数为 λ_j 的 Poisson 过程,$X_i^{(j)}$ 为险种 j 第 i 次收取的保费,$\{N_j(t),t\geqslant 0\}$ 为险种 j 的理赔次数,$N_j(t)$ 为 $M_j(t)$ 的 1 个 p-稀疏,$Y_i^{(j)}$ 为险种 j 的第 i 次索赔额,$\{Y_i^{(j)},i\geqslant 1,1\leqslant j\leqslant n\}$,$\{X_i^{(j)},i\geqslant 1,1\leqslant j\leqslant n\}$ 相互独立,且 $E(X_i^{(j)})=\mu_j$,$E(Y_i^{(j)})=\mu_j^*$;

(iii) 为保证保险公司稳定经营,假定 $E[S(t)]>0$,即 $u_2r_1+u_3r_2+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mu_j-\sum_{j=1}^{n}\lambda_jp\mu_j^*>0$.

定义 1 破产时刻定义为 $T=\inf\{t\geqslant 0\mid U(t)<0\}$,最终破产概率定义为 $\psi(u)=P\{T<\infty\mid U(0)=u\}$.

2 预备引理

引理 1 盈利过程 $\{S(t),t\geqslant 0\}$ 具有平稳独立增量性.

证 设 $A_1(t)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N_j(t)}Y_i^{(j)}$,$d=u_2r_1+u_3r_2$,

收稿日期:2014-11-28
基金项目:广东省科技计划课题(2012B010100044)和东莞市高等院校科研机构科技计划课题(2012108102031)资助项目.
作者简介:牛银菊(1965-),甘肃甘谷人,副教授,主要从事数学方法及计算机技术的应用研究.

$A_2(t)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{M_j(t)}X_i^{(j)}$，则有

$S(t_i)-S(t_{i-1})=d(t_i-t_{i-1})+au_3[B(t_i)-B(t_{i-1})]+[A_2(t_i)-A_2(t_{i-1})]-[A_1(t_i)-A_1(t_{i-1})]$.

由于标准布朗运动$\{B(t),t\geqslant 0\}$为平稳独立增量过程，复合 Poisson 分布也具有平稳独立增量性，且他们之间相互独立，则$\{S(t),t\geqslant 0\}$具有平稳独立增量性.

引理2　存在函数$g(r)$使得$E[\exp(-rS(t))]=\exp(tg(r))$，其中

$$g(r)=-rd+a^2u_3^2r^2/2+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j[M_{X(j)}(-r)-1]+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j p[M_{Y(j)}(r)-1],$$

$M_{Y(j)}(r)=E[\exp(rY^{(j)})]$为险种$j$的索赔额的矩母函数，$M_{X(j)}(r)=E[\exp(rX^{(j)})]$为险种$j$的保费额的矩母函数.

证　由于

$$E[\exp(-rS(t))]=E\{\exp[-rdt-rau_3B(t)-r\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{M_j(t)}X_i^{(j)}+r\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N_j(t)}Y_i^{(j)}]\}=E[\exp(-rdt)]\cdot E\{\exp[(-au_3B(t))]\}E[\exp(-r\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{M_j(t)}X_i^{(j)})]\cdot E[\exp(r\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N_j(t)}Y_i^{(j)})]=\exp\{t[-rd+a^2u_3^2r^2/2+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(M_{X(j)}(-r)-1)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j p(M_{Y(j)}(r)-1)]\}=\exp[tg(r)].$$

故$g(r)=-rd+a^2u_3^2r^2/2+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j[M_{X(j)}(-r)-1]+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j p[M_{Y(j)}(r)-1]$.

引理3　方程$g(r)=0$存在唯一正根R，称R为调节系数.

证　$g'(r)=-d+a^2u_3^2r-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cdot E[X^{(j)}\exp(-rX^{(j)})]+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j pE[Y^{(j)}\exp(rY^{(j)})]$,

$$g''(r)=a^2u_3^2+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j E[(X^{(j)})^2\exp(-rX^{(j)})]+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j pE[(Y^{(j)})^2\exp(rY^{(j)})]>0,$$

那么$g(r)$为下凸函数，方程$g(r)=0$至多有 2 个解，而$g(0)=0$，$g'(0)=-[d+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mu_j-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j p\mu_j^*]<0$，当$r\to\infty$时，$g'(r)\to\infty$，因此$g(r)=0$在$r>0$内存在唯一正根$R$.

定理1　调节系数R满足不等式

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(\mu_j-p\mu_j^{\ *})+d}{\frac{a^2u_3^2}{2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j(\sigma_j+\mu_j^2)+\lambda_j pe^M(\sigma_j^*+(\mu_j^*)^2)}{2}}<R<\frac{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(\mu_j-p\mu_j^*)+d}{\frac{a^2u_3^2}{2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j p(\sigma_j^*+(\mu_j^*)^2)}{2}},$$

其中$\mathrm{Var}[X^{(j)}]=\sigma_j$，$\mathrm{Var}[Y^{(j)}]=\sigma_j^*$.

证　(i) 由于$M_{X(j)}(-R)=E[\exp(-RX^{(j)})]=E[1-RX^{(j)}+(RX^{(j)})^2/2!-\cdots]>1-R\mu_j$,

$M_{Y(j)}(R)=E[\exp(RY^{(j)})]>E[1+RY^{(j)}+(RY^{(j)})^2/2!]=1+R\mu_j^*+R^2[\sigma_j^*+(\mu_j^*)^2]/2$,

所以，

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j p+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=-Rd+a^2u_3^2R^2/2+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cdot M_{X(j)}(-R)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j pM_{Y(j)}(R)>-Rd+a^2u_3^2R^2/2+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(1-R\mu_j)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j p(1+R\mu_j^*+R^2[\sigma_j^*+(\mu_j^*)^2]/2),$$

即

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j R\mu_j-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j pR\mu_j^*>-Rd+a^2u_3^2R^2/2+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j pR^2[\sigma_j^*+(\mu_j^*)^2]/2,\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mu_j-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j p\mu_j^*+d>(a^2u_3^2/2+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j p[\sigma_j^*+(\mu_j^*)^2]/2)R.$$

则

$$R<\frac{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(\mu_j-p\mu_j^*)+d}{\frac{a^2u_3^2}{2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j p(\sigma_j^*+(\mu_j^*)^2)}{2}}.$$

(ii) $M_{X(j)}(-R)=E[\exp(-RX^{(j)})]<1-R\mu_j+R^2[\sigma_j+(\mu_j)^2]/2$,

$M_{Y(j)}(R)=E[\exp(RY^{(j)})]=E[1+RY^{(j)}+e^{\zeta}(RY^{(j)})^2/2!]\leqslant 1+R\mu_j^{\ *}+R^2e^M[\sigma_j^*+(\mu_j^*)]^2/2$,

其中$0\leqslant RY^{(j)}\leqslant M$，$0\leqslant\zeta\leqslant M$，则有

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j p+Rd<a^2u_3^2R^2/2+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(1-R\mu_j+R^2[\sigma_j+(\mu_j)^2]/2)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j p(1+R\mu_j^*+R^2e^M[\sigma_j^*+(\mu_j^*)^2]/2),$$

即

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mu_j-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j p\mu_j^{*}+d<(a^2u_3^2/2+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(\sigma_j+\mu_j^2)/2+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j p\mathrm{e}^{M}[\sigma_j^{*}+(\mu_j^{*})^2]/2)R,$$

则

$$R>\frac{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(\mu_j-p\mu_j^{*})+d}{\frac{a^2u_3^2}{2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j(\sigma_j+\mu_j^2)+\lambda_j p\mathrm{e}^{M}[\sigma_j^{*}+(\mu_j^{*})^2]}{2}}.$$

定义2 在盈利过程$\{S(t),t\geqslant 0\}$中定义事件流$F_t^s=\sigma\{S(v),v\leqslant t\}$.

引理4 设

$$R(t)=\frac{\exp[-r(u_1+(u_1-u_2-u_3)(m-l)+S(t))]}{\exp[tg(r)]},$$

则$\{R(t),t\geqslant 0\}$关于F_t^s为鞅.

证 (i) $R(t)$是F_t^s-可测的.

(ii) $\forall v,0\leqslant v<t$,有

$E[R(t)\mid F_v^s]=E[\exp[-r(u_1+(u_1-u_2-u_3)(m-l)+S(t))]/\exp[tg(r)]\mid F_v^s]=E[\exp[-r(u_1+(u_1-u_2-u_3)(m-l)+S(t)+S(v)-S(v))]/\exp[tg(r)+vg(r)-vg(r)]\mid F_v^s]=R(v)E[\exp[-r(S(t)-S(v))]/\exp[(t-v)g(r)]\mid F_v^s]=R(v)$.

(iii) $E[|R(t)|]=E[|\exp[-r(u_1+(u_1-u_2-u_3)(m-l)+S(t))]/\exp[tg(r)]|]=E[\exp[-r(u_1+(u_1-u_2-u_3)(m-l))]]=\exp[-r(u_1+(u_1-u_2-u_3)(m-l))]<\infty$,

则$\{R(t),t\geqslant 0\}$为鞅.

定理2 对于风险模型(1),其最终破产概率满足$\psi(u)\leqslant \mathrm{e}^{-R[u_1+(u_1-u_2-u_3)(m-l)]}$.

证 由于$T\wedge t_0$为F_t^s的停时,由停时定理得$E[R(T\wedge t_0)]=E[R(0)]=\mathrm{e}^{-r[u_1+(u_1-u_2-u_3)(m-l)]}$.

又根据全期望公式得

$\mathrm{e}^{-r[u_1+(u_1-u_2-u_3)(m-l)]}=E[R(T\wedge t_0)]=E[R(T\wedge t_0)T\leqslant t_0]P(T\leqslant t_0)+E[R(T\wedge t_0)\mid T>t_0]P(T>t_0)\geqslant E[R(T\wedge t_0)\mid T\leqslant t_0]P(T\leqslant t_0)=E[R(T)\mid T\leqslant t_0]P(T\leqslant t_0)$,

则$P(T\leqslant t_0)\leqslant \mathrm{e}^{-r[u_1+(u_1-u_2-u_3)(m-l)]}/E[R(T)\mid T\leqslant t_0]$.

当$T<\infty$时,$U(t)=u_1+(u_1-u_2-u_3)(m-l)+S(t)<0$,则

$P(T\leqslant t_0)\leqslant \mathrm{e}^{-r[u_1+(u_1-u_2-u_3)(m-l)]}/E[\exp[-r(u_1+(u_1-u_2-u_3)(m-l)+S(T))]/\exp[Tg(r)]\mid T\leqslant t_0]\leqslant \mathrm{e}^{-r[u_1+(u_1-u_2-u_3)(m-l)]}/E[\exp[-Tg(r)]\mid T\leqslant t_0]\leqslant \mathrm{e}^{-r[u_1+(u_1-u_2-u_3)(m-l)]}\cdot\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant t_0}\exp[tg(r)]$.

当$t_0\to\infty$时,$P(T<\infty)\leqslant \mathrm{e}^{-r[u_1+(u_1-u_2-u_3)(m-l)]}\cdot\sup\limits_{t\geqslant 0}\exp[tg(r)]\leqslant \mathrm{e}^{-R[u_1+(u_1-u_2-u_3)(m-l)]}$,其中$R$为调节系数,满足$R=\sup\limits_{r>0}\{r:g(r)\leqslant 0\}$. 定理2得证.

定理3 风险模型(1)的最终破产概率满足

$$\psi(u)=\frac{\exp[-R[u_1+(u_1-u_2-u_3)(m-l)]]}{E[\exp[-RU(T)]\mid T<\infty]}.$$

证 由全期望公式得

$E[\exp[-rU(t_0)]]=E[\exp[-rU(t_0)]\mid T\leqslant t_0]P(T\leqslant t_0)+E[\exp[-rU(t_0)]\mid T>t_0]P(T>t_0)$, (2)

又$E[\exp[-RS(t_0)]]=E[\exp[-R(U(t_0)-(u_1+(u_1-u_2-u_3)(m-l)))]]=1$,则

$E[\exp[-RU(t_0)]]=\exp[-R[u_1+(u_1-u_2-u_3)(m-l)]]$.

在(2)式中令$r=R$,则有

$\exp[-R[u_1+(u_1-u_2-u_3)(m-l)]]=E[\exp[-RU(t_0)]\mid T\leqslant t_0]P(T\leqslant t_0)+E[\exp[-RU(t_0)]\mid T>t_0]P(T>t_0)$.

由于

$E[\exp[-RU(t_0)]]=E[\exp[-R(U(T)-S(T)+S(t_0))]]=E[\exp[-RU(T)]]\cdot E[\exp[RS(T)]]E[\exp[-RS(t_0)]]=E[\exp[-RU(T)]]$,

那么有$E[\exp[-RU(t_0)]\mid T\leqslant t_0]P(T\leqslant t_0)=E[\exp[-RU(T)]\mid T\leqslant t_0]P(T\leqslant t_0)$. 而

$0\leqslant E[\exp[-RU(t_0)]\mid T>t_0]P(T>t_0)=E[\exp[-RU(t_0)]]I(T>t_0)\leqslant E[\exp[-RU(t_0)]]I(U(t_0)>0)\leqslant 1$.

又由于$au_3B(t)/t\sim N(0,a^2u_3^2/t)$,$\forall\varepsilon>0$,根据切比雪夫不等式得

$P\{|au_3B(t)/t|<\varepsilon\}\geqslant 1-a^2u_3^2/(t\varepsilon^2)$,

令$t\to\infty$,则$P\{|au_3B(t)/t|<\varepsilon\}=1$,因此$\lim\limits_{t\to\infty}au_3B(t)/t=0$. 从而

$$\lim_{t\to\infty}U(t)/t=\lim_{t\to\infty}[(u_1+(u_1-u_2-u_3)(m-l))/t+d+au_3B(t)/t+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{M_j(t)}X_i^{(j)}/t-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N_j(t)}Y_i^{(j)}/t]=d+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mu_j-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j p\mu_j^{*}.$$

由$E[S(t)]>0$知$\lim\limits_{t\to+\infty}U(t)=+\infty$. 根据控制收敛定理得

$\lim\limits_{t_0\to+\infty}E[\exp[-RU(t_0)]\mid T>t_0]P(T>t_0)=0$,

则当 $t \to \infty$ 时, $\exp[-R[u_1 + (u_1 - u_2 - u_3)(m - l)]] = E[\exp[-RU(T)] \mid T < \infty] P(T < \infty)$, 即

$$\psi(u) = P(T < \infty) = \exp[-R[u_1 + (u_1 - u_2 - u_3)(m - l)]] / E[\exp[-RU(T)] \mid T < \infty].$$

3　结束语

本文对通货膨胀及常利率下带投资的多险种风险模型进行了研究,得出其破产概率所满足的表达式. 此模型的研究更接近现实生活中保险公司的运营情况,通过破产概率的分析,对保险公司的风险管理具有很大的应用价值.

4　参考文献

[1] Dufresne F, Gerber H U. Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1991, 10(1): 51-59.

[2] 夏亚峰, 罗永丽. 带投资组合的风险模型 [J]. 甘肃科学学报, 2011, 23(1): 53-56.

[3] 蒋兰青, 施齐嫣. 带投资和干扰的相依多险种风险模型的破产概率 [J]. 福州大学学报: 自然科学版, 2012, 40(1): 26-30.

[4] 牛银菊, 罗永丽, 夏亚峰. 带投资组合和超额赔款的再保险双 Cox 风险模型 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2014, 38(5): 539-542.

[5] 张相虎, 边平勇. 带干扰的多险种风险模型的破产概率 [J]. 经济数学, 2007, 24(2): 130-133.

[6] 于文广, 黄玉娟. 干扰条件下的一个破产模型的改进 [J]. 江南大学学报: 自然科学版, 2008, 7(1): 118-121.

[7] 刘琳. 停止损失再保险最优自留额的确定及存在性讨论 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2011, 35(6): 614-616.

[8] 王丙参, 魏艳华, 戴宁. 停止损失再保险与风险模型的有限时间破产概率 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2013, 37(2): 206-209.

[9] 何树红, 徐兴富. 双 Cox 风险模型 [J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2004, 26(4): 275-278.

[10] 何莉娜, 刘再明. 一类 Cox 风险模型破产概率的研究 [J]. 广西民族学院学报: 自然科学版, 2006, 12(2): 80-82.

[11] 杨圣举, 李学萝, 李文玲. 双 Cox 风险模型中破产概率的上界 [J]. 南开大学学报: 自然科学版, 2009, 42(1): 34-43.

[12] 薛利杰. 资金利率和通货膨胀率下双复合 Poisson 风险模型 [J]. 数学理论及应用, 2009, 9(3): 44-47.

[13] 刘超, 王永茂, 颜玲, 等. 带干扰的多险种二项风险模型的破产概率 [J]. 郑州大学学报: 理学版, 2012, 44(1): 46-49.

[14] 刘倩影. 带通货膨胀及支出的双 Poisson 风险模型破产概率的确定 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2012.

[15] 董英华, 张汉君. 带干扰的双 Poisson 风险模型的破产概率 [J]. 数学理论与应用, 2003, 23(1): 98-101.

The Ruin Probability of Multiple-Type Risk Model with Interest Rate and Investment

NIU Yinju[1], DENG Li[2], MA Chongwu[1]

(1. Computer College, Dongguan University of Technology, Dongguan Guangdong 523808, China;
2. College of Science, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu 730050, China)

Abstract: According to the operating condition of insurance company in our daily life, the interest rate is stable in a certain time, so the interest rate considered is constant. The ruin probability of multiple-type insurance risk model with interest rate and investment is studied. The formula of ultimate ruin probability of this model is given by the method of martingale.

Key words: interest rate; investment; multiple-type insurance; ruin probability

(责任编辑: 曾剑锋)