第 40 卷 第 2 期　江西师范大学学报(自然科学版)　Vol. 40 No. 2
2016 年 3 月　Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)　Mar. 2016

文章编号:1000-5862(2016)02-0200-04

关于 ZP-内射维数及 ZP-平坦维数

徐龙玉[1],万吉湘[2],王芳贵[3]

(1. 西南科技大学理学院,四川 绵阳 621010;2. 绵阳师范学院数学与计算机科学学院,四川 绵阳 621000;
3. 四川师范大学数学与软件科学学院,四川 成都 610068)

摘要: 给出了 ZP-内射维数以及 ZP-平坦维数的定义,揭示了左 ZP-内射维数 l. zp. ID(R) = 0 及右 ZP-平坦维数 r. zp. FD(R) = 0 的环,即它们为非奇异环,并给出等价描述. 讨论了环 R 的左 ZP-内射维数 l. zp. ID(R) $\leqslant n$ 以及环 R 的右 ZP-平坦维数 r. zp. FD(R) $\leqslant n$ 的等价刻画,证明了环 R 上的模类 ZPI 若满足单同态的上核封闭且 l. zp. ID(R) $<\infty$,则 l. zp. ID(R) = r. zp. FD(R) = l. zp-id($_RR$),并证明 ZP-内射左 R-模的商模是 ZP-内射模当且仅当模类 ZPI 满足单同态的上核封闭且 l. zp. ID(R) $\leqslant 1$.

关键词: ZP-内射模;ZP-内射维数;ZP-平坦模;ZP-平坦维数

中图分类号: O 153.3;O 154　**文献标志码:** A　**DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2016.02.18

0 引言

内射模及平坦模是模范畴中主要的模类,这 2 类模的很多结论在群论与代数几何中有着重要的作用. 投射模是内射模的对偶概念,平坦模是对投射模的自然推广,同时通过构造特征模,平坦模与内射模有着密切的联系. 许多代数工作者对内射模与平坦模的性质及推广作了深入的研究[1-3]. 与此同时,(同调)维数一直是研究环与模范畴的焦点. 维数的理论和方法影响到代数学和其他数学学科. 对内射模和平坦模推广后的新的模类,可以定义新的维数来刻画环的性质,如文献[4]给出 FP-投射维数的定义,并利用此维数研究了 Noether 环和 Coherent 环,也得到了 FP-投射维数与其他维数之间的关系. 关于维数的讨论可参见文献[5-9]. 本文首先针对ZP-内射模与 ZP-平坦模,定义了环和模的 ZP-内射维数及 ZP-平坦维数,并对其进行等价刻画,揭示维数 l. zp. ID(R) 与维数 r. zp. FD(R) 之间的关系. 通过对这些维数的系统讨论,给出非奇异环的许多性质刻画.

在本文中,所有的环都是带有单位元 1 的结合环,所有的模都是酉模. 令 A 为左 R-模 M 的 1 个子集. $\forall x\in A$,记 $l_R(A)=\{r\in R: rx=0\}$ 为 A 在 R 中的左零化子. 若 B 是 R 的 1 个子集,B 在 M 中的右零化子用 $r_M(B)$ 表示. 特别地,对于 $a\in R$,$l(a)$ 及 $r(a)$ 分别表示 a 的左零化子和右零化子. $\forall m\in M$,若 $l(m)$ 是 $_RR$ 的本质理想,则称 m 是奇异元. M 中所有奇异元的集合用 $Z(_RM)$ 表示[10]. 特别地,R 的左(右)奇异理想用 $Z(_RR)$($Z(R_R)$)表示. 它们是 R 的双边理想. 若 $Z(R_R)=R$,则称环 R 为右奇异环;若 $Z(R_R)=0$,则称环 R 为右非奇异环. 若模 A 是模 B 的多余子模,记为 $A\ll B$. 左 R-模 M 的特征模 M^+ 定义为 $M^+=\mathrm{Hom}_Z(M,Q/Z)$.

1 ZP-内射维数及 ZP-平坦维数

定义 1 $\forall a\in Z(_RR)$,若 $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra,M)=0$,则称 M 为 ZP-内射左 R-模[11]. 若 $\mathrm{Tor}_1^R(N,R/Ra)=0$,则称 N_R 为 ZP-平坦右 R-模.

相似地,可定义 ZP-内射右 R-模和 ZP-平坦左 R-模.

注 1 由文献[11]可知,ZP-内射左 R-模是 P-内射左 R-模的真推广. P-平坦右 R-模是 ZP-平坦右 R-模,反之不一定成立. 如令 R 为整环而不是域,则 $Z(_RR)=Z(R_R)=0$. 取非零非单位的元 $a\in R$,则 R/aR 是 ZP-平坦右 R-模但不是 P-平坦右 R-模.

定义 2 $_RM$ 的左 ZP-内射维数是指使得 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/Ra,M)=0$ 成立的最小非负整数 n,记为 l. zp-id(M) = n,其中 $a\in Z(_RR)$. 若这样的 n 不存

收稿日期:2015-12-26
基金项目:国家自然科学基金(11171240)资助项目.
作者简介:徐龙玉(1979-),女,四川泸州人,讲师,主要从事环与模范畴的研究.

在，则称 ZP-内射维数为 ∞，记为 $\mathrm{l.\,zp\text{-}id}(M) = \infty$. 定义 $\mathrm{l.\,zp.\,ID}(R) = \sup\{\mathrm{l.\,zp\text{-}id}(M): M$ 是任意左 R-模$\}$，称之为环 R 的左 ZP-内射维数. 类似地，$a \in Z(R_R)$，利用 aR 可以得到右 R-模的 ZP-内射维数以及环 R 的右 ZP-内射维数的定义.

定义 3　N_R 的右 ZP-平坦维数是指使得 $\mathrm{Tor}^R_{n+1}(N, R/Ra) = 0$ 成立的最小非负整数 n，记为 $\mathrm{r.\,zp\text{-}fd}_R N = n$，其中 $a \in Z({}_RR)$. 若这样的 n 不存在，则称 N 的右 ZP-平坦维数为 ∞，记为 $\mathrm{r.\,zp\text{-}fd}(N) = \infty$. 定义 $\mathrm{r.\,zp.\,FD}(R) = \sup\{\mathrm{r.\,zp\text{-}fd}(N): N$ 是任意右 R-模$\}$，它为环 R 的右 ZP-平坦维数.

类似地，$\forall a \in Z(R_R)$，利用 aR 可以得到左 R-模的 ZP-平坦维数和环 R 的左 ZP-平坦维数的定义.

自然地，左 R-模 M 是 ZP-内射左 R-模当且仅当 $\mathrm{l.\,zp\text{-}id}(M) = 0$. 同理，右 R-模 N 是 ZP-平坦右 R-模当且仅当 $\mathrm{r.\,zp\text{-}fd}(N) = 0$.

接下来，分别将 ZP-内射左 R-模类和 ZP-平坦右 R-模类记为 ZPI 及 ZPF.

在研究商环以及半本原环方面，非奇异环有着重要作用. 许多重要的环都是非奇异环，如半单环、半遗传环[12]、reduced rings 等. 接下来揭示此维数低维环的性质以及对非奇异环的等价刻画.

定理 1　以下条件对环 R 等价:

(i) R 是左非奇异环;

(ii) $\mathrm{l.\,zp.\,ID}(R) = 0$;

(iii) $\mathrm{r.\,zp.\,FD}(R) = 0$;

(iv) 任意右 R-模是 ZP-平坦模;

(v) 任意左 R-模是 ZP-内射模;

(vi) $\forall a \in Z({}_RR)$，$Z({}_RR) \ll R$ 且任意左单 R-模是 ZP-内射模;

(vii) $\forall a \in Z({}_RR)$，$Z({}_RR) \ll R$ 且 Ra 是 ZP-内射模;

(viii) $\forall a \in Z({}_RR)$，任意 Ra 是 ${}_RR$ 的纯子模;

(ix) ZP-内射左 R-模的商模是 ZP-内射模.

证　(i)$\Leftrightarrow$(vi)$\Leftrightarrow$(vii)$\Leftrightarrow$(viii)　由文献[1]中定理 1.9 可得.

(i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(v)，(iii)$\Leftrightarrow$(iv)　显然.

(v)$\Rightarrow$(iv)　$\forall a \in Z({}_RR)$ 及任意右 R-模 N，由 (v) 知 N^+ 是 ZP-内射左 R-模. 由 $\mathrm{Ext}^1_R(R/Ra, N^+) \cong \mathrm{Tor}^R_1(N, R/Ra)^+$ 知 N 是 ZP-平坦右 R-模.

(iv)$\Rightarrow$(viii)　由 (iv) 知，$\forall a \in Z({}_RR)$，R/Ra 是平坦模.

(viii)$\Rightarrow$(ix)　$\forall a \in Z({}_RR)$，由 (viii) 知存在纯正合列 $0 \to Ra \to R \to R/Ra \to 0$. 对任意右 R-模 C，$\mathrm{Tor}^R_1(C, R/Ra) = 0$. 故 R/Ra 是平坦左 R-模. 所以 $0 \to Ra \to R \to R/Ra \to 0$ 分裂. 故 Ra 是投射左 R-模. 令 M 为任意 ZP-内射左 R-模，则 $\mathrm{Ext}^1_R(R/Ra, M) = 0$. 由左 R-模正合列 $0 \to K \to M \to M/K \to 0$ 知正合列 $\mathrm{Ext}^1_R(R/Ra, M) \to \mathrm{Ext}^1_R(R/Ra, M/K) \to \mathrm{Ext}^2_R(R/Ra, K)$ 成立. 由 $\mathrm{Ext}^1_R(R/Ra, M) = \mathrm{Ext}^2_R(R/Ra, K) = 0$ 知 $\mathrm{Ext}^1_R(R/Ra, M/K) = 0$，故 M/K 是 ZP-内射左 R-模.

(ix)$\Rightarrow$(i)　令 L 为任意左 R-模，则存在内射模 E 使得 $0 \to L \to E \to E/L \to 0$ 成立. 由 E 是内射左 R-模，则 $\forall a \in Z({}_RR)$ 有 $\mathrm{Ext}^2_R(R/Ra, L) \cong \mathrm{Ext}^1_R(R/Ra, E/L)$. 由 (ix) 知 $\mathrm{Ext}^1_R(R/Ra, E/L) = 0$，故 $\mathrm{Ext}^2_R(R/Ra, L) = 0$. 由 $0 \to Ra \to R \to R/Ra \to 0$ 知 $\mathrm{Ext}^1_R(Ra, L) \cong \mathrm{Ext}^2_R(R/Ra, L)$. 故 $\mathrm{Ext}^1_R(Ra, L) = 0$，则左 R-模的正合列 $0 \to l(a) \to R \to Ra \to 0$ 是分裂的. 因此 $l(a) = R$，则 $a = 0$.

相似地，可以对右非奇异环进行刻画. 称环 R 为左(右) V-环[13]，若任意单左(右) R-模是内射模.

推论 1　若 $Z({}_RR) \ll R$，任意左(右) V-环是左(右)非奇异环.

注 2　由此可见，$\mathrm{l.\,zp.\,ID}(R)$ 及 $\mathrm{r.\,zp.\,FD}(R)$ 刻画了一般环与非奇异环之间的距离.

R 为凝聚环当且仅当 FP 内射左 R-模单同态的余核是封闭的[14]. 接下来讨论在何种条件下 ZPI 模类的单同态的余核是封闭的.

引理 1　下列条件等价:

(i) 模类 ZPI 满足单同态的上核封闭;

(ii) $\forall a \in Z({}_RR)$，Ra 有限表现且 ZPF 中满同态的核是封闭的;

(iii) $\forall a \in Z({}_RR)$，Ra 有限表现且对任意 ZP-平坦右 R-模 N 及 $\forall k \geqslant 1$，$\mathrm{Tor}^R_k(N, R/Ra) = 0$;

(iv) $\forall a \in Z({}_RR)$ 及任意的 ZP-内射左 R-模 M 和 $\forall k \geqslant 1$，$\mathrm{Ext}^k_R(R/Ra, M) = 0$.

证　(i)$\Rightarrow$(iv)　令 ${}_RM$ 是 ZP-内射模，则存在左 R-模正合列 $0 \to M \to E \to L \to 0$，其中 E 是内射模. 由 (i) 知 L 是 ZP-内射模. 故 $\forall a \in Z({}_RR)$，$\mathrm{Ext}^2_R(R/Ra, M) \cong \mathrm{Ext}^1_R(R/Ra, L) = 0$. 因此由递推知 (iv) 成立.

(iv)$\Rightarrow$(i)　显然.

(ii)$\Leftrightarrow$(iii)　此证明方法类似 (i)$\Leftrightarrow$(iv) 的证明方法.

(i)$\Rightarrow$(ii)　令 ${}_RM$ 是 FP-内射模. 由 (i)$\Leftrightarrow$(iv) 知，$\forall a \in Z({}_RR)$，$\mathrm{Ext}^1_R(Ra, M) \cong \mathrm{Ext}^2_R(R/Ra, M) = 0$. 故由文献[5]知 Ra 是有限表现模.

令 $0 \to N \to X \to Y \to 0$ 是右 R-模的正合列，其中 X 和 Y 是 ZP-平坦模. 因此存在正合列 $0 \to Y^+ \to$

$X^+ \to N^+ \to 0$. $\forall a \in Z({}_RR)$,由 $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra, X^+) \cong \mathrm{Tor}_1^R(X, R/Ra)^+$ 知 X^+ 是 ZP-内射模. 同理 Y^+ 是 ZP-内模. 由(i) 知 N^+ 是 ZP-内射模. 类似可知 N 是 ZP-平坦模.

(ii)$\Rightarrow$(i) 令 $0 \to M \to M_1 \to M_2 \to 0$ 是左 R-模正合列,其中 M 和 M_1 是 ZP-内射模,则存在正合列 $0 \to M_2^+ \to M_1^+ \to M^+ \to 0$. 由(ii) 知 $\forall a \in Z({}_RR)$,Ra 有限表现. 故由 $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra, M) \cong \mathrm{Tor}_1^R(M^+, R/Ra)$ 可知 M^+ 是 ZP-平坦模. 同理 M_1^+ 是 ZP-平坦模,由(ii) 知 M_2^+ 是 ZP-平坦模. 由 $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra, M_2)^+ \cong \mathrm{Tor}_1^R(M_2^+, R/Ra)$ 知 M_2 是 ZP-内射模.

显然,任意非奇异环满足上述等价条件.

定理 2 令 M 为左 R-模,n 为非负整数. 若环 R 上的模类 ZPI 满足单同态的余核封闭,则下列条件等价:

(i) $\mathrm{l.\,zp\text{-}id}(M) \leqslant n$;

(ii) 对任意左 R-模正合列 $0 \to M \to E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_{n+1} \to L_n \to 0$,其中 E_i 是 ZP-内射模,则 L_n 是 ZP-内射模;

(iii) $\forall a \in Z({}_RR)$,$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/Ra, M) = 0$;

(iv) $\forall a \in Z({}_RR)$,$k \geqslant 1$,$\mathrm{Ext}_R^{n+k}(R/Ra, M) = 0$.

证 (i)$\Rightarrow$(ii) 令 $0 \to M \to E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_{n-1} \to L_n \to 0$ 是左 R-模的正合列,其中 E_i 是 ZP-内射模. 令 $\mathrm{l.\,zp\text{-}id}(M) = m \leqslant n$,$L_m = \mathrm{coker}(E_{m-2} \to E_{m-1})$. $\forall a \in Z({}_RR)$,$\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra, L_m) \cong \mathrm{Ext}_R^{m+1}(R/Ra, M) = 0$. 故 L_m 是 ZP-内射模. 由假设知 L_n 是 ZP-内射模.

(ii)$\Rightarrow$(iii) 令 $0 \to M \to E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_{n-1} \to L_n \to 0$ 是左 R-模的正合列,其中 E_i 是 ZP-内射模. 故由(ii) 知 L_n 是 ZP-内射模. 因此 $\forall a \in Z({}_RR)$,$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/Ra, M) \cong \mathrm{Ext}_R^1(R/Ra, L_n) = 0$.

(iii)$\Rightarrow$(iv) 由递推可知.

(iv)$\Rightarrow$(i) 显然.

推论 2 令 n 为非负整数. 若环 R 上的模类 ZPI 满足单同态的上核封闭,则以下条件等价:

(i) $\mathrm{l.\,zp.\,ID}(R) \leqslant n$;

(ii) 对任意左 R-模正合列 $0 \to M \to E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_{n-1} \to L_n \to 0$,其中 E_i 是 ZP-内射模,则 L_n 是 ZP-内射模;

(iii) $\forall a \in Z({}_RR)$ 以及任意左 R-模 M,有 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/Ra, M) = 0$;

(iv) $\forall a \in Z({}_RR)$ 以及任意左 R-模和 $k \geqslant 1$,有 $\mathrm{Ext}_R^{n+k}(R/Ra, M) = 0$.

对偶地,有如下结论.

命题 1 令 n 为非负整数. 若环 R 上的模类 ZPI 满足单同态的上核封闭,则下列条件等价:

(i) $\mathrm{r.\,zp.\,FD}(R) \leqslant n$;

(ii) 对于任意右 R-模正合列 $0 \to K_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to N \to 0$,其中 F_i 是 ZP-平坦模,则 K_n 是 ZP-平坦模;

(iii) $\forall a \in Z({}_RR)$ 以及任意右 R-模 N,有 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(N, R/Ra) = 0$;

(iv) $\forall a \in Z({}_RR)$ 以及任意右 R-模 N 和 $k \geqslant 1$,有 $\mathrm{Tor}_{n+k}^R(N, R/Ra) = 0$.

定理 3 若环 R 上的模类 ZPI 满足单同态的上核封闭,则 $\mathrm{l.\,zp.\,ID}(R) = \mathrm{r.\,zp.\,FD}(R)$.

证 首先证 $\mathrm{l.\,zp.\,ID}(R) \leqslant \mathrm{r.\,zp.\,FD}(R)$. 假设 $\mathrm{r.\,zp.\,FD}(R) = n < \infty$ 对于任意左 R-模正合列 $0 \to M \to E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_{n-1} \to L_n \to 0$,其中 E_i 是 ZP-内射模,存在右 R-模正合列 $0 \to (L_n)^+ \to (E_{n-1})^+ \to \cdots \to (E_0)^+ \to (M)^+ \to 0$. 由引理 1 知,$\forall a \in Z({}_RR)$,$Ra$ 有限表现. 由 $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra, E_i)^+ \cong \mathrm{Tor}_1^R(E_i^+, R/Ra)$,则每一 $(E_i)^+$ 是 ZP-平坦模. 由命题 1 知 $(L_n)^+$ 是 ZP-平坦模. 类似可知 L_n 是 ZP-内射模. 由推论 2 知 $\mathrm{l.\,zp.\,ID}(R) \leqslant n$.

接下来证明 $\mathrm{r.\,zp.\,FD}(R) \leqslant \mathrm{l.\,zp.\,ID}(R)$. 假设 $\mathrm{l.\,zp.\,ID}(R) = m < \infty$ 对任意右 R-模正合列 $0 \to K_m \to F_{m-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to N \to 0$,其中任意 F_i 是 ZP-平坦模,存在左 R-模正合列 $0 \to (N)^+ \to (F_0)^+ \to \cdots \to (F_{m-1})^+ \to (K_m)^+ \to 0$. 则 $\forall a \in Z({}_RR)$,由 $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra, F_i^+) \cong \mathrm{Tor}_1^R(F_i, R/Ra)^+$ 知 F_i^+ 是 ZP-内射模. 因此由推论 2 知 $(K_m)^+$ 是 ZP-内射模. 类似可知 K_m 是 ZP-平坦模. 故 $\mathrm{r.\,zp.\,FD}(R) \leqslant m$.

因此 $\mathrm{l.\,zp.\,ID}(R) = \mathrm{r.\,zp.\,FD}(R)$.

定理 4 若环 R 上的模类 ZPI 满足单同态的上核封闭且 $\mathrm{l.\,zp.\,ID}(R) < \infty$,则

$$\mathrm{l.\,zp.\,ID}(R) = \mathrm{r.\,zp.\,FD}(R) = \mathrm{l.\,zp\text{-}id}({}_RR).$$

证 需证 $\mathrm{l.\,zp.\,ID}(R) \leqslant \mathrm{l.\,zp\text{-}id}({}_RR)$. 现假设 $\mathrm{l.\,zp\text{-}id}({}_RR) = m < \infty$,则存在左 R-模正合列 $0 \to {}_RR \to E_0 \to E_1 \to \cdots E_{m-1} \to L_m \to 0$,其中 E_i 是 ZP-内射模由定理 2 知 L_m 是 ZP-内射. $0 \to \oplus_R R \to \oplus E_0 \to \oplus E_1 \to \cdots \to \oplus E_{m-1} \to \oplus L_m \to 0$ 为正合列. $\forall a \in Z({}_RR)$,由 $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra, \oplus E_i) \cong \oplus \mathrm{Ext}_R^1(R/Ra, E_i)$ 知 $\oplus E_0$,$\oplus E_1$,$\cdots$,$\oplus E_{m-1}$ 是 ZP-内射模,类似可知 $\oplus L_m$ 是 ZP-内射模. $\forall a \in Z({}_RR)$,$\mathrm{Ext}_R^{m+1}(R/Ra, \oplus_R R) \cong \mathrm{Ext}_R^1(R/Ra, \oplus L_m) = 0$. 故对于任意自由左 R-模 F,有 $\mathrm{l.\,zp\text{-}id}(F) \leqslant m$.

假设 $\mathrm{l.\,zp.\,ID}(R) = n < \infty$ 对于任意左 R-模 M,存在 R-模正合列 $0 \to K_n \to K_{n-1} \to \cdots F_1 \to F_0 \to M$

$\to 0$,其中 F_i 是自由模. 因此对 $i = 0,1,\cdots,n-1$,有 $\mathrm{l.zp\text{-}id}(F_i) \leqslant m$,$\mathrm{l.zp\text{-}id}(K_n) \leqslant n$. 因此 $\forall a \in Z({}_RR)$,由引理 2 可知 $\mathrm{Ext}_R^{m+1}(R/Ra,M) \cong \mathrm{Ext}_R^{m+n+1}(R/Ra,K_n) = 0$. 因此 $\mathrm{l.zp\text{-}id}(M) \leqslant m$. 故 $\mathrm{l.zp.ID}(R) = \mathrm{l.zp\text{-}id}({}_RR)$.

定理 5　对于环 R,下列条件等价:

(i) R 为左非奇异环;

(ii) ZP-内射左 R-模的商模是 ZP-内射模;

(iii) 模类 ZPI 中单同态的余核是封闭的,且 $\mathrm{l.zp.ID}(R) < \infty$及${}_RR$ 是 ZP-内射模;

(iv) 模类 ZPI 中单同态的上核是封闭的且 $\mathrm{l.zp.ID}(R) \leqslant 1$;

(v) 模类 ZPI 中单同态的上核是封闭的且 $\mathrm{r.zp.FD}(R) \leqslant 1$.

证　(i)$\Leftrightarrow$(ii)　由定理 1 可知.

(i)$\Leftrightarrow$(iii)　由定理 1 和定理 4 可知.

(ii)$\Leftrightarrow$(iv)　由推论 2 可知.

(iv)$\Leftrightarrow$(v)　由定理 3 可知.

2　参考文献

[1] Ding Nanqing, Li Yuanlin, Mao Lixin. J-coherent rings [J]. J Algebra Appl, 2009, 8(2): 139-155.

[2] 王芳贵,汪明义,杨立英. 交换环上的极大性内射模 [J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2010, 3(1): 1-9.

[3] 徐龙玉,汪明义. 关于零化子凝聚环 [J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2006, 29(2): 161-165.

[4] Mao Lixin, Ding Nanqing. FP-projective dimensions [J]. Comm Algebra, 2005, 33(4): 1153-1170.

[5] Ding Nanqing, Chen Jianlong. Coherent rings with finite self-FP-injective dimension [J]. Comm Algebra, 1996, 24(9): 2963-2980.

[6] Chen Jianlong, Ding Nanqing. On n-coherent rings [J]. Comm Algebra, 1996, 24(10): 3211-3216.

[7] Gupta R N. On f-injective modules and semihereditary rings [J]. Proc Nat Inst Sci, 1969, 35(1): 323-328.

[8] 朱军伟,黄福生,刘新斌. 半模余生成子的刻画 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2011, 35(1): 78-80.

[9] 陈幼华,熊涛,祁慧倩. 整环上的 W-投射模 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2011, 35(3): 305-308.

[10] Fuelberth J D, Teply M L. The singular submodule of a finitely generated module splits off [J]. Pacific J Math, 1972, 40(1): 73-82.

[11] 徐龙玉,胡葵,熊涛. 关于 ZP-内射模 [J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2015, 38(3): 644-647.

[12] Lam T Y. Lectures on modules and rings [M]. New York: Springer-Verlag, 1999: 156-157.

[13] Boyle A K, Goodearl K R. Rings over which certain modules are injective [J]. Pacific J Math, 1975, 58(1): 43-53.

[14] Wisbauer R. Foundations of module and ring theory: a handbook for study and research [M]. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1991: 82-83.

[15] Enochs E E. A note on absolutely pure modules [J]. Canad Math Bull, 1976, 19(3): 361-362.

On ZP-Injective Dimensions and ZP-Flat Dimensions

XU Longyu[1], WAN Jixiang[2], WANG Fanggui[3]

(1. College of Science, Southwest University of Science and Technology, Mianyang Sichuan 621010, China;

2. College of Mathematics and Computer Science, Mianyang Normal University, Mianyang Sichuan 621010, China;

3. College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu Sichuan 610068, China)

Abstract: The notions of the ZP-injective dimensions and the ZP-flat dimensions are defined. It is shown that a ring R is left nonsingular if and only if $\mathrm{l.zp.ID}(R) = 0$ if and only if $\mathrm{r.zp.FD}(R) = 0$. Then the equivalent statements of $\mathrm{l.zp.ID}(R) \leqslant n$ and $\mathrm{r.zp.FD}(R) \leqslant n$ are studied. If ZPI is closed under cokernel of any monomorphism and $\mathrm{l.zp.ID}(R) < \infty$, then $\mathrm{l.zp.ID}(R) = \mathrm{r.zp.FD}(R) = \mathrm{l.zp\text{-}id}({}_RR)$. Finally, it is proved that every quotient module of a ZP-injective left R-module is ZP-injective if and only if ZPI is closed under cokernel of any monomorphisms and $\mathrm{l.zp.ID}(R) \leqslant 1$.

Key words: ZP-injective modules; ZP-injective dimension; ZP-flat modules; ZP-flat dimension

(责任编辑: 曾剑锋)