第41卷 第4期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 41 No. 4
2017年7月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Jul. 2017

文章编号:1000-5862(2017)04-0372-05

关于半模正合列的研究

邹雅文,王颂生*,黄 艳,李 娟

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要:利用同余方式定义了半模正合列,探讨了半模正合列的若干性质,并给出了不同条件下半模正合列的几个等价刻画;得到了半模正合列中类似于“五引理”和“三引理”的结论.

关键词:正合列;同态;交换图

中图分类号:O 153.3 文献标志码:A DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2017.04.08

0 引言

正合列这一概念在环模范畴中扮演着重要的角色,环模范畴中有关正合列的性质已有较多的研究[1-2].半环上的半模是环上模的自然推广,因此可以利用正合列来研究半环上半模的性质,并且从不同的观点出发,对于半环上的半模正合的定义有所不同. H. M. J. Al-Thani[3-4]定义了半模正合列以及真正合列的概念.在陈培慈等[5]定义半模正合列概念的基础上,文献[6]定义了半模的短正合列,得到了半模正合列上“五引理”的相关性质.文献[7]在同余的观点下定义半模的正合列并讨论了“五引理”的性质. J. N. Chaudhari 等[8]讨论了在极大同态下的半环上半模的正合列性质.

本文在文献[7]的基础上从同余角度类似地讨论了环与模范畴中经典的“五引理”和“三引理”,得到了一些好的结果.并在文献[5]的基础上,给出了正合列的一个等价刻画.

除特别说明外,文中的 R 均表示含零元和单位元的加法交换半环,所有同态均指左 R-半模同态.下面给出一些要用到的相关概念和结论.

设 $f: A\to B$ 是 R-半模同态[6-7],记

$\equiv_{f(A)}=\{(c,d)\in B\times B\mid c+f(a)=d+f(b),\exists a,b\in A\}$,$\Delta_A=\{(a,a)\mid a\in A\}$,

$\ker f=\{(a,b)\in A\times A\mid f(a)=f(b)\}$,$K_f=\{a\in A\mid f(a)=0\}$.

定义1 设 $f: A\to B$ 是 R-半模同态.若 $\ker f=\Delta_A$,则称 f 为单同态;若 $\forall b\in B$,有 $a_i\in A$,$i=1,2$,使得 $b+f(a_1)=f(a_2)$,则称 f 为满同态;若 f 既为单同态又为满同态,则称 f 为等价.

定义2 设 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ 是半模同态序列,若有 $\equiv_{f(A)}=\ker g$,则称此序列为正合列.

定义3 设 A 为 R-半模,$a\in A$.若 $\forall b,c\in A$,$a+b=a+c$,可推出 $b=c$,则称 a 为 A 中的可消元.若 A 中所有的元素都是可消的,则称 A 为可消半模.

定义4 设 $f: A\to B$ 是 R-半模同态.若 $\forall a_1,a_2\in A$,由 $f(a_1)=f(a_2)$,就有 $k_1,k_2\in K_f$,使得 $a_1+k_1=a_2+k_2$,则称 f 为 k-正则的.

命题1 $0\to A\xrightarrow{f}B$ 是正合列的充要条件是 f 为单同态;$B\xrightarrow{g}C\to 0$ 是正合列的充要条件是 g 为满同态.

命题2 设有 R-半模同态列 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$,则 $\equiv_{f(A)}\subseteq\ker g$ 当且仅当 $gf=0$.

命题3 设有 R-半模正合列 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\xrightarrow{h}D$,则 f 为满同态当且仅当 h 是单同态.

证 令 $(c_1,c_2)\in\ker h=\equiv_{g(B)}$,于是 $\exists b_1,b_2\in B$,使得

$$c_1+g(b_1)=c_2+g(b_2),\tag{1}$$

又因为 f 是满同态,则 $\forall b_1,b_2\in B$,$\exists a_i\in A(i=1,2,3,4)$,使得 $b_1+f(a_1)=f(a_2)$,$b_2+f(a_3)=f(a_4)$,即 $(b_1,0)\in\equiv_{f(A)}=\ker g$,$(b_2,0)\in\equiv_{f(A)}=\ker g$,于是有 $g(b_1)=g(b_2)=0$,结合(1)式得 $(c_1,c_2)\in\Delta_C$,h 是单同态.

反之,$\forall b\in B$,$g(b)\in C$,若有 $(g(b),0)\in\equiv_{g(B)}=\ker h$,则 $hg(b)=0$.又因为 h 是单同态,所

收稿日期:2017-01-15

基金项目:国家自然科学基金(11261021)和江西省自然科学基金(2014BAB201018)资助项目.

通信作者:王颂生(1959-),男,江西铜鼓人,副教授,主要从事半环理论的研究. E-mail:sswang818@126.com

以 $g(b)=0$，于是 $(b,0)\in\ker g=\equiv_{f(A)}$，故 $\exists a_1,a_2\in A$，使得 $b+f(a_1)=f(a_2)$，由定义 1 知 f 为满同态.

1　半模正合列

定理 1　设关于 R-半模范畴及它们的同态图(见图 1)是交换的，其中列是正合的，且 B',C' 是可消半模，若 β 是等价，则第 1 行正合当且仅当第 2 行正合.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] \\
A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "①"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "②"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] \arrow[d] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \\
0 & &
\end{tikzcd}$$

图 1　R-半模正合列的同态图

证　由命题 1 知 γ 是单同态，α 是满同态的.

充分性　若第 2 行正合，先证 $\equiv_{f(A)}\subseteq\ker g$. 令 $(b_1,b_2)\in\equiv_{f(A)}$，其中 $b_1,b_2\in B$，则 $\exists a_1,a_2\in A$，使得 $b_1+f(a_1)=b_2+f(a_2)$，从而 $\beta(b_1)+\beta f(a_1)=\beta(b_2)+\beta f(a_2)$.

由图形①可交换得 $\beta(b_1)+f'\alpha(a_1)=\beta(b_2)+f'\alpha(a_2)$，所以 $(\beta(b_1),\beta(b_2))\in\equiv_{f(A')}=\ker g'$，则 $g'\beta(b_1)=g'\beta(b_2)$. 由图形②可交换得 $\gamma g(b_1)=\gamma g(b_2)$，又因为 γ 是单同态，所以 $g(b_1)=g(b_2)$，即 $(b_1,b_2)\in\ker g$.

反之，再证 $\ker g\subseteq\equiv_{f(A)}$. 设 $(b_1,b_2)\in\ker g$，则 $g(b_1)=g(b_2)$，有 $\gamma g(b_1)=\gamma g(b_2)$，由图形②可交换得 $g'\beta(b_1)=g'\beta(b_2)$，所以 $(\beta(b_1),\beta(b_2))\in\ker g'=\equiv_{f'(A')}$，故 $\exists a'_1,a'_2\in A'$，使得

$$\beta(b_1)+f'(a'_1)=\beta(b_2)+f'(a'_2),\tag{2}$$

又因为 α 是满同态，所以 $\exists a_i\in A(i=1,2,3,4)$ 使得 $a'_1+\alpha(a_1)=\alpha(a_2)$，$a'_2+\alpha(a_3)=\alpha(a_4)$，有

$$f'(a'_1)+f'\alpha(a_1)=f'\alpha(a_2),$$

$$f'(a'_2)+f'\alpha(a_3)=f'\alpha(a_4),\tag{3}$$

在(2)式两边加上 $f'\alpha(a_1+a_3)$，结合(3)式得

$$\beta(b_1)+f'\alpha(a_2+a_3)=\beta(b_2)+f'\alpha(a_1+a_4).$$

由图形①可交换知，$\beta(b_1)+\beta f(a_2+a_3)=\beta(b_2)+\beta f(a_1+a_4)$. 又因 β 是单同态，所以 $b_1+f(a_2+a_3)=b_2+f(a_1+a_4)$，即 $(b_1,b_2)\in\equiv_{f(A)}$. 由此证得第 1 行是正合的.

必要性　若第 1 行正合，先证 $\equiv_{f'(A')}\subseteq\ker g'$. 设 $(b'_1,b'_2)\in\equiv_{f'(A')}$，则 $\exists a'_1,a'_2\in A'$，使得

$$b'_1+f(a'_1)=b'_2+f(a'_2).\tag{4}$$

又因为 α,β 是满同态，于是 $\exists a_i\in A,b_i\in B(i=1,2,3,4)$，使得

$$a'_1+\alpha(a_1)=\alpha(a_2),a'_2+\alpha(a_3)=\alpha(a_4),\tag{5}$$

$$b'_1+\beta(b_1)=\beta(b_2),b'_2+\beta(b_3)=\beta(b_4),\tag{6}$$

对(5)式有

$$f'(a'_1)+f'\alpha(a_1)=f'\alpha(a_2),$$

$$f'(a'_2)+f'\alpha(a_3)=f'\alpha(a_4),\tag{7}$$

在(4)式两边加上 $f'\alpha(a_1+a_3)$，结合(6)式及图形①可交换得

$$b'_1+f'\alpha(a_2+a_3)=b'_2+f'\alpha(a_1+a_4),$$

即 $b'_1+\beta f(a_2+a_3)=b'_2+\beta f(a_1+a_4)$. 再在两边加上 $\beta(b_1+b_3)$，结合(7)式得

$$\beta(b_2+b_3)+\beta f(a_2+a_3)=\beta(b_1+b_4)+\beta f(a_1+a_4).$$

因为 β 是单同态，所以 $b_2+b_3+f(a_2+a_3)=b_1+b_4+f(a_1+a_4)$，于是 $(b_1+b_4,b_2+b_3)\in\equiv_{f(A)}=\ker g$，有 $\gamma g(b_1+b_4)=\gamma g(b_2+b_3)$. 由图形②可交换得

$$g'\beta(b_1+b_4)=g'\beta(b_2+b_3).\tag{8}$$

由(6)式知 $b'_1+\beta(b_1+b_4)=b'_2+\beta(b_2+b_3)$，有

$$g'(b'_1)+g'\beta(b_1+b_4)=g'(b'_2)+g'\beta(b_2+b_3).$$

由(8)式及半模 C' 的可消性知 $g'(b'_1)=g'(b'_2)$，所以 $(b'_1,b'_2)\in\ker g'$.

再证 $\ker g'\subseteq\equiv_{f'(A')}$. 若 $(b'_1,b'_2)\in\ker g'$，其中 $b'_1,b'_2\in B'$，则 $g(b'_1)=g(b'_2)$. 因为 β 是满同态，所以 $\exists b_1,b_2,b_3,b_4\in B$，使得 $b'_1+\beta(b_1)=\beta(b_2)$，$b'_2+\beta(b_3)=\beta(b_4)$，从而有

$$b'_1+\beta(b_1+b_4)=b'_2+\beta(b_2+b_3),\tag{9}$$

则 $g'(b'_1)+g'\beta(b_1+b_4)=g'(b'_2)+g'\beta(b_2+b_3)$. 由 $g'(b'_1)=g'(b'_2)$ 及半模 C' 的可消性知，$g'\beta(b_1+b_4)=g'\beta(b_2+b_3)$，由图形②可交换得 $\gamma g(b_1+b_4)=\gamma g(b_2+b_3)$. 由 γ 是单同态，得 $g(b_1+b_4)=g(b_2+b_3)$，所以 $(b_1+b_4,b_2+b_3)\in\ker g=\equiv_{f(A)}$，由此知 $\exists a_1,a_2\in A$，使得

$$b_1+b_4+f(a_1)=b_2+b_3+f(a_2),$$

所以 $\beta(b_1+b_4)+\beta f(a_1)=\beta(b_2+b_3)+\beta f(a_2)$，两边加上 b'_1，结合(9)式及图形①可交换得 $b'_2+\beta(b_2+b_3)+f'\alpha(a_1)=b'_2+\beta(b_2+b_3)+f'\alpha(a_2)$，由半模 B 的可消性知 $(b'_1,b'_2)\in\equiv_{f'(A')}$.

定理 2　设关于 R-半模范畴及它们的同态图(见图 2)是交换的，其中行、列都正合，且 C,C',D 是可消半模. 若 α_3 是等价，则 α_2 是满同态当且仅当 α_4 是单同态.

证　**必要性**　令 $\alpha_4(d_1)=\alpha_4(d_2)$，其中 $d_1,d_2\in D$，有 $t'\alpha_4(d_1)=t'\alpha_4(d_2)$，由图形④可交换知

$\alpha_5 t(d_1)=\alpha_5 t(d_2)$. 又因为 α_5 是单同态,所以 $t(d_1)=t(d_2)$,于是$(d_1,d_2)\in\ker t=\equiv_{h(C)}$,所以$\exists c_1,c_2\in C$,使得

$$d_1+h(c_1)=d_2+h(c_2), \tag{10}$$

有 $\alpha_4(d_1)+\alpha_4 h(c_1)=\alpha_4(d_2)+\alpha_4 h(c_2)$. 由 $\alpha_4(d_1)=\alpha_4(d_2)$ 及半模 D'的可消性知,$\alpha_4 h(c_1)=\alpha_4 h(c_2)$. 于是由图形③可交换得 $h'\alpha_3(c_1)=h'\alpha_3(c_2)$,所以$(\alpha_3(c_1),\alpha_3(c_2))\in\ker h'=\equiv_{g'(B')}$,因此$\exists b'_1,b'_2\in B'$,使得

$$\alpha_3(c_1)+g'(b'_1)=\alpha_3(c_2)+g'(b'_2). \tag{11}$$

又因为 α_2 是满同态 epic,于是$\exists b_i\in B(i=1,2,3,4)$,使得 $b'_1+\alpha_2(b_1)=\alpha_2(b_2)$,$b'_2+\alpha_2(b_3)=\alpha_2(b_4)$,即有

$$g'(b'_1)+g'\alpha_2(b_1)=g'\alpha_2(b_2),$$
$$g'(b'_2)+g'\alpha_2(b_3)=g'\alpha_2(b_4), \tag{12}$$

接着在(11)式两边加上 $g'\alpha_2(b_1)+g'\alpha_2(b_3)$,结合(12)式得

$$\alpha_3(c_1)+g'\alpha_2(b_2+b_3)=\alpha_3(c_2)+g'\alpha_2(b_1+b_4).$$

又由图形②可交换知 $\alpha_3(c_1)+\alpha_3 g(b_2+b_3)=\alpha_3(c_2)+\alpha_3 g(b_1+b_4)$. 因为 α_3 是等价,于是 $c_1+g(b_2+b_3)=c_2+g(b_1+b_4)$,即$(c_1,c_2)\in\equiv_{g(B)}=\ker h$,于是有 $h(c_1)=h(c_2)$. 由(10)式及半模 D 的可消性知 $d_1=d_2$,即 α_4 单同态.

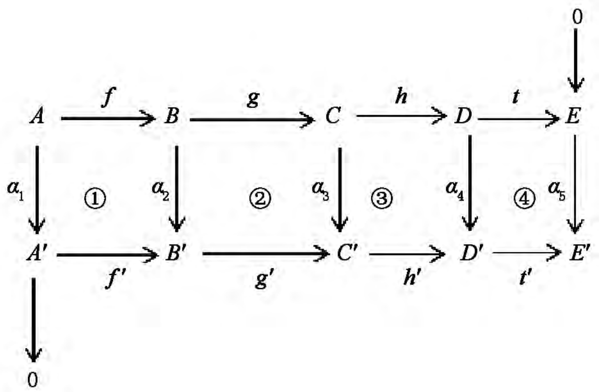

图2 行列均正合的 R-半模同态图

充分性 取 $b'\in B$,于是 $g'(b')\in C'$,又因为 α_3 是满同态,所以$\exists c_1,c_2\in C$,使得

$$g'(b')+\alpha_3(c_1)=\alpha_3(c_2). \tag{13}$$

于是有 $h'g'(b')+h'\alpha_3(c_1)=h'\alpha_3(c_2)$. 因为下行是正合的,由命题1知,有 $h'\alpha_3(c_1)=h'\alpha_3(c_2)$,由图形③可交换知 $\alpha_4 h(c_1)=\alpha_4 h(c_2)$,于是$(c_1,c_2)\in\ker h=\equiv_{g(B)}$,所以$\exists b_1,b_2\in B$ 使得 $c_1+g(b_1)=c_2+g(b_2)$,有 $\alpha_3(c_1)+\alpha_3 g(b_1)=\alpha_3(c_2)+\alpha_3 g(b_2)$. 由图形②可交换知

$$\alpha_3(c_1)+g'\alpha_2(b_1)=\alpha_3(c_2)+g'\alpha_2(b_2), \tag{14}$$

(14)式两边加上 $g'(b')$,结合(13)式得到 $\alpha_3(c_2)+g'\alpha_2(b_1)=\alpha_3(c_2)+g'\alpha_2(b_2)+g'(b')$. 又由半模 C'的可消性知 $g'\alpha_2(b_1)=g'\alpha_2(b_2)+g'(b')$,故$(\alpha_2(b_1),\alpha_2(b_2)+b')\in\ker g'=\equiv_{f'(A')}$,于是有

$$\alpha_2(b_1)+f'(a'_1)=\alpha_2(b_2)+b'+f'(a'_2). \tag{15}$$

又因为 α_1 是满同态,所以 $a'_1+\alpha_1(a_1)=\alpha_1(a_2)$,$a'_2+\alpha_1(a_3)=\alpha_1(a_4)$,有

$$f'(a'_1)+f'\alpha_1(a_1)=f'\alpha_1(a_2),$$
$$f'(a'_2)+f'\alpha_1(a_3)=f'\alpha_1(a_4). \tag{16}$$

(15)式两边加上$f'\alpha_1(a_1+a_3)$,结合(16)式得

$$\alpha_2(b_1)+f'\alpha_1(a_2+a_3)=\alpha_2(b_2)+b'+f'\alpha(a_1+a_4),$$

由图形①可交换知 $b'+\alpha_2 f(a_1+a_4)+\alpha_2(b_2)=\alpha_2(b_1)+\alpha_2 f(a_2+a_3)$. 由定义知 α_2 是满同态,定理2得证.

定理3 设关于 R-半模范畴及它们的同态图(见图3)是交换的,若有下列非水平方向正合的 R-半模同态交换图,则水平方向的同态序列是正合的.

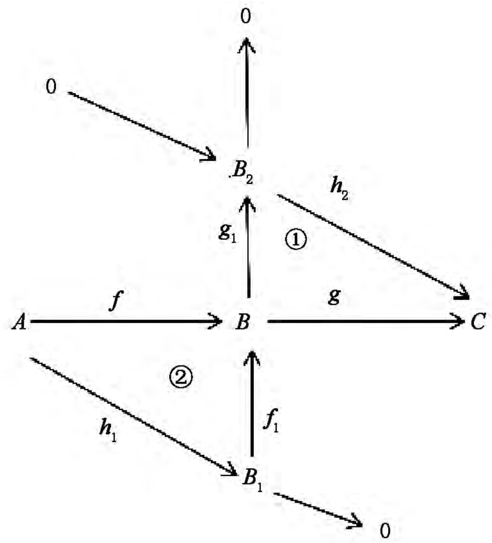

图3 非水平方向正合的 R-半模同态图

证 先证 $\ker g\subseteq\equiv_{f(A)}$. 令$(x_1,x_2)\in\ker g$,其中 $x_1,x_2\in B$,则有 $g(x_1)=g(x_2)$,由图形①可交换知 $h_2g_1(x_1)=h_2g_1(x_2)$,由 h_2 是单同态知 $g_1(x_1)=g_1(x_2)$,所以$(x_1,x_2)\in\ker g_1=\equiv_{f_1(B)}$,由此知$\exists b_1,b'_1\in B_1$,使得

$$x_1+f_1(b_1)=x_2+f_1(b'_1). \tag{17}$$

又因为 h_1 是满同态的,所以$\exists a_i\in A(i=1,2,3,4)$,使得 $b_1+h_1(a_1)=h_1(a_2)$,$b_1'+h_1(a_3)=h_1(a_4)$,有

$$f_1(b_1)+f_1h_1(a_1)=f_1h_1(a_2),$$
$$f_1(b'_1)+f_1h_1(a_3)=f_1h_1(a_4). \tag{18}$$

在(17)式两边加上 $f_1h_1(a_1+a_3)$,结合(18)式得 $x_1+f_1h_1(a_2+a_3)=x_2+f_1h_1(a_1+a_4)$. 由图形②可交换知 $x_1+f(a_2+a_3)=x_2+f(a_1+a_4)$,所以$(x_1,$

$x_2) \in \equiv_{f(A)}$.

再证 $\equiv_{f(A)} \subseteq \ker g$. 令 $(x_1, x_2) \in \equiv_{f(A)}$,于是 $\exists a_1, a_2 \in A$,使得 $x_1 + f(a_1) = x_2 + f(a_2)$. 由图形②可交换知 $x_1 + f_1h_1(a_1) = x_2 + f_1h_1(a_2)$,所以 $(x_1, x_2) \in \equiv_{f_1(B)} = \ker g_1$,$g_1(x_1) = g_1(x_2)$,于是有 $h_2g_1(x_1) = h_2g_1(x_2)$,则 $g(x_1) = g(x_2)$,由此知 $(x_1, x_2) \in \ker g$.

在定理 3 中,当 g 是 k-正则时,其逆是成立的.

定理 4　设图 4 中 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 是 R-半模同态正合列,且 g 是 k-正则的,则存在定理 3 中的 R-半模同态交换图,使得非水平同态列是正合的.

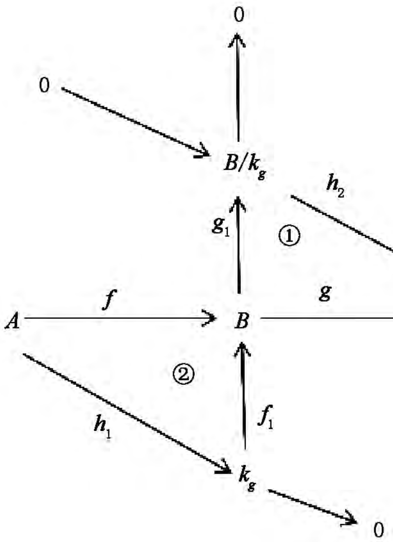

图 4　R-半模同态正合列

证　规定:

(i) $g_1: B \to B/K_g$, $g_1(b) = \bar{b}$, $b \in B$,其中 $\bar{b} = \{x \in B \mid x + b_1 = b + b_2, \exists b_1, b_2 \in K_g\}$;

(ii) $h_2: B/K_g \to C$, $h_2(\bar{b}) = g(b)$, $b \in B$,显然此定义是良好的;

(iii) $h_1: A \to K_g$, $h_1(a) = f(a)$, $a \in A$;

(iv) $f_1: K_g \to B$ 为嵌入同态.

先证图①和图②是可交换的. 因为 $\forall b \in B$, $g_1(b) = \bar{b}$,所以 $h_2g_1(b) = h_2(\bar{b}) = g(b)$. 于是 $h_2g_1 = g$,即图①可交换.

$\forall a \in A$,有 $h_1(a) = f(a)$, $f_1h_1(a) = f_1f(a) = f(a)$, $f_1h_1 = f$,由此知图②可交换.

再证非水平方向的同态列都是正合的.

在同态列 $K_g \to B \to B/K_g \to 0$ 中,$\equiv_{f_1(K_g)} \subseteq \ker g_1$ 是显然的. 现令 $(x_1, x_2) \in \ker g_1$,则有 $h_2g_1(x_1) = h_2g_1(x_2)$,由图②可交换知 $g(x_1) = g(x_2)$,所以 $(x_1, x_2) \in \ker g = \equiv_{f(A)}$,于是 $\exists a_1, a_2 \in A$,使得 $x_1 + f(a_1) = x_2 + f(a_2)$,由图②可交换知 $x_1 + f_1h_1(a_1) = x_2 + f_1h_1(a_2)$,所以 $(x_1, x_2) \in \equiv_{f_1(K_g)}$,由此知 $\equiv_{f_1(K_g)} = \ker g_1$ 成立,则同态列在 B 处正合. 在 B/K_g 处正合显然. 故此同态列是正合的.

在同态列 $0 \to B/K_g \to C$ 中,h_2 是单同态,由命题 1 知,此同态列是正合的.

在同态列 $A \to K_g \to 0$ 中,取 $x \in K_g$,有 $(x, 0) \in \ker g = \equiv_{f(A)}$,则 $\exists a_1, a_2 \in A$,使得 $x + f(a_1) = f(a_2)$,有 $x + f_1h_1(a_1) = f_1h_1(a_2)$,所以 $x + f_1h_1(a_1) = f_1h_1(a_2)$,即 $x + h_1(a_1) = h_1(a_2)$,故 h_1 是 epic. 由命题 1 知此同态列正合.

因此非水平方向的同态列也是正合的.

2　结束语

J. N. Chaudhari 等[8]总结了几种半模范畴中正合列的定义,但是无论从哪种定义出发都希望得到更多关于半模研究的好结果,因为在研究特殊半模如投射、内射半模的 Hom 函子的正合性[9-13]是探索半模内在性质的一种很好方式,所以对半模正合性的深入研究很有必要. 本文在前人的基础上讨论了几种交换图的等价条件,希望为研究和刻画半环半模提供一定的方法和结果.

3　参考文献

[1] Golan J S. Semirings and their applications [M]. New York: Kluwer Academic Publishers,1999.

[2] 安德森 F W,富勒尔 K R. 环与模范畴 [M]. 北京: 北京科学出版社,2008: 39-50.

[3] Al-Thani H M J. Characterization of projective and k-projective semimodules [J]. IJMMS,2002,32(7): 439-448.

[4] Al-Thani H M J. Flat semimodules [J]. International Journal of Mathematical Sciences,2004,2004(17): 873-880.

[5] 陈培慈,周媛兰. 半模的张量积 [J]. 数学学报,2002,45(1): 139-150.

[6] 甘爱萍,黄福生,陈培慈. 半模短正合列 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2003,27(2): 131-134.

[7] 敖忠平,蔡述平,宋海燕. 半模的 Z-同态与正合列 [J]. 新疆师范大学学报: 自然科学版,2007,26(4): 18-21.

[8] Chaudhari J N,Bonde D R. On exact sequence of semimodules over semirings [J]. Isrn Algebra,doi: 10.1155/2013/156485.

[9] Wilding D,Johnson M. Kambites M. Exact rings and semirings [J]. Journal of Algebra,2013,388(4): 324-337.

[10] Abuhlail J. Exact sequences of commutative monoids and semi-modules [J]. Homology,Homotopy and Applications,2014,16(1): 199-214.

[11] Song Xianmei,Chen Jianlong. Note on pure projective modules [J]. Journal of Southeast University,2005,21(4):506-508.
[12] Bhambri S K,Duber M K. Exact,proper exact sequences and projective semimodules [J]. Internationl of Algebra,2010,4(15):709-719.
[13] 曾慧平,黄福生,肖贤民. i-内射半模 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2007,31(5):488-491.

The Study on Exact Sequence of Semi-Module

ZOU Yawen,WANG Songsheng*,HUANG Yan,LI Juan
(College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: The notion of the exact sequences of semi-module over semi-rings is introduced by the congruence and some properties of the exact sequences of semi-modules are discussed,and several equivalent characterizations of semi-exact sequences under different conditions are obtained. The conclusion of the "five lemma" and "three lemma" which are similar to those in the semi-modules exact column is obtained.

Key words: exact sequence; homo-morphism; commutative diagram

(责任编辑:曾剑锋)

(上接第 371 页)

On the Classifications of the Finite Groups of Order p^3q^3 with Abelian Sylow q-Subgroups

CHEN Songliang[1,2],LI Xianhua[2]
(1. School of Mathematics and Computer Science,Guizhou Education University,Guiyang Guizhou 550018,China;
2. School of Mathematical Sciences,Suzhou University,Suzhou Jiangsu 215006,China;
3. Guizhou Provincial Academmician Workstation of Educational Big Data Technology and Educational Mathematics,Guiyang Guizhou 550018,China)

Abstract: Let p,q be odd primes such that $p > q$,and G be finite groups of order p^3q^3. With the help of local analysis of finite groups,the complete classifications of G is discussed and their structures are determined whenever their Sylow q-subgroups are Abelian with elementary divisors (q^2, q).

Key words: finite group; isomorphic classification; structure of group

(责任编辑:曾剑锋)