文章编号: 1000-5862(2012)01-0054-05

Z-半连续格上的 Z-半基和局部 Z-半基

万　潇, 杨金波*

(江西师范大学数学与信息科学学院, 江西 南昌 330022)

摘要: 作为半连续格上半基和局部半基在广义理想子集系统 Z 上的推广, 引入 Z-半连续格的 Z-半基及局部 Z-半基概念, 讨论了它们的基本性质和 Z-半连续格上 Z-半 Lawson 拓扑的性质. 特别地, 借助于 Z-半基与局部 Z-半基给出了 Z-半连续格的一些刻画.

关键词: 广义理想子系统; Z-半基; 局部 Z-半基; Z-半 Lawson 拓扑
中图分类号: O 153.3, O 152.7　　文献标志码: A

0　引言与预备知识

Domain 理论是由 D. Scott 所创建的, 其基本目的是为 Strachey 的指称语义学提供数学基础. Domain 理论自创建起就受到了数学工作者和计算机科学工作者的共同关注. 将连续格理论推广到更为一般的偏序结构上是 Domain 理论研究的一个重要方面[1]. 1997 年, 赵东升基于素理想系统引入了半连续格的概念[2]. 一系列结果表明, 半连续格具有许多相似于连续格的性质[3-10]. 李高林等在完备格上引入半连续格的半基和局部半基的概念, 并利用半基和局部半基刻画了完备格的半连续性. 本文将在 Z-半连续格中引入 Z-半连续格的 Z-半基及局部 Z-半基概念, 讨论了它们的基本性质和 Z-半连续格上 Z-Lawson 的性质.

在本文中, $Poset$ 表示以所有偏序集为对象、保序映射为态射的范畴, 对给定的范畴 C, C 的对象集记为 $ob(C)$. $\forall P\in ob(Poset)$, $x\in P, A\subseteq P$, 记 $\uparrow x=\{y\in P: x\leqslant y\}$, $\uparrow A=\bigcup\limits_{a\in A}\uparrow a$; 对偶地定义 $\downarrow x$ 和 $\downarrow A$. P 上以 $\{P\backslash\uparrow x: x\in P\}$ 为开子基生成的拓扑称为下拓扑, 记为 $\omega(P)$; 对偶地定义 P 上的上拓扑 $\nu(P)$, $\theta(P)=\nu(P)\vee\omega(P)$ 称为 P 上的区间拓扑.

定义 1　完备格 L 中理想 I 称为半素理想, 若 $\forall x,y,z\in I$, $x\wedge y\in I$ 且 $x\wedge z\in I$, 则有 $x\wedge(y\vee z)\in I$. L 的全体半素理想族记为 $Rd(L)$.

定义 2　Z 表示广义理想子集系统, 若 Z 满足:

(i) $\forall P\in ob(Poset), Z(P)\subseteq Id(P)$;

(ii) 任意定向族 $\{I_\alpha:\alpha\in J\}\subseteq Z(P)$, $\bigcup\limits_{\alpha\in J} I_\alpha\in Z(P)$;

(iii) $\bigcap\{I\in Z(P): x\leqslant\vee I\}\in Z(P)$.

以下是 2 个常用的广义理想子集系统:

(i) $Id(\forall P\in ob(Poset), Id(P)$ 为 P 的理想子集全体);

(ii) $Rd(\forall P\in ob(Poset), Rd(P)$ 为 P 的半素理想子集全体).

在以下讨论中, Z 总表示一个广义理想子集系统. $\forall P\in ob(Poset)$, 称 $Z(P)$ 为 P 上的一个广义理想子集系统, $Z(P)$ 中的元素称之为 Z-理想. 当将 $Z(P)$ 看作偏序集时, 其上的偏序总是指集包含关系.

定义 3　设 L 为完备格, $U\subseteq L$ 称为 Z-半 Scott 的, 若 U 满足:

(i) $U=\uparrow U$;

(ii) $\forall I\in Z(P)$, 若 $\sup I\in U$, 则 $U\bigcap I\neq\varnothing$.

易证所有满足上述条件(i)和(ii)的 Z-半 Scott 开集 U 构成一拓扑, 称之为 Z-半 Scott 拓扑, 记为 $\sigma_z(L)$.

定义 4　设 L, Q 为完备格,

(i) 映射 $f:L\to Q$ 称为保 Z-理想, 若 $\forall I\in Z(L)$, $\downarrow f(I)\in Z(Q)$;

收稿日期: 2011-11-20
基金项目: 国家自然科学基金(10861007), 全国优秀博士学位论文作者专项资金(2007B14), 江西省自然科学基金(2009GZS0012), 江西省教育厅基金(GJJ12178)和江西师范大学研究生创新资金资助项目.
作者简介: 杨金波(1973-), 男, 湖北安陆人, 教授, 博士, 主要从事拓扑学、格序结构和 Domain 理论的研究.

(ii) 映射 $f:L\to Q$ 称为保 Z-并，若 $\forall I\in Z(L)$，$f(\sup I)=\sup f(I)$.

1　Z-半连续格的 Z-半基

为将连续格及半连续格概念推广至一般广义理想子集系统 Z 情形，下面引入 Z-半连续格的概念并讨论其相关性质.

定义 5　设 L 为完备格，$x,y\in L$，

(i) 称 x　Z-below y，记为 $x\Leftarrow_z y$，若 $\forall I\in Z(L)$，$y\leqslant\sup I\Rightarrow x\in\downarrow I$. 当 $Z=Id$ 时，$\Leftarrow_z$ 就是文献[1]中熟知的 way below 关系 $\ll$. 当 $Z=Rd$ 时，$\Leftarrow_z$ 就是文献[3] 中关系 $\Leftarrow$. 记 $\Downarrow_z x=\{y\in L: y\Leftarrow_z x\}$;

(ii) 称 L 为 Z-半连续格，若关系 $\Leftarrow_z$ 是逼近的，即 $\forall x\in L$，$x\leqslant\sup\Downarrow_z x$；若 $\forall x\in L$，$x=\sup\Downarrow_z x$，则称 L 为强 Z-连续格.

定义 6　设 L 是完备格，$B\subseteq L$. 若 $\forall x\in L$ 有如下 2 条成立:

(i) $\downarrow(\Downarrow_z x\cap B)\in Z(L)$;

(ii) $x\leqslant\sup(\Downarrow_z x\cap B)$，

则称 B 为 L 的 Z-半基.

命题 1　设 L 是完备格. 若 B 是 L 的 Z-半基且 $B\subseteq B^*$，则 B^* 也是 L 的 Z-半基.

证　只需证 $\forall x\in L$，$\downarrow(\Downarrow_z x\cap B)=\downarrow(\Downarrow_z x\cap B^*)$. 一方面，因为 $B\subseteq B^*$，所以 $\Downarrow_z x\cap B\subseteq\Downarrow_z x\cap B^*$，于是 $\downarrow(\Downarrow_z x\cap B)\subseteq\downarrow(\Downarrow_z x\cap B^*)$. 另一方面，$\forall y\in\downarrow(\Downarrow_z x\cap B^*)$，有 $y\Leftarrow_z x$. 因为 B 是 L 的半基，所以 $\downarrow(\Downarrow_z x\cap B)\in Z(L)$，且 $x\leqslant\sup\downarrow(\Downarrow_z x\cap B)$. 从而由 $y\Leftarrow_z x$ 知 $y\in\downarrow(\Downarrow_z x\cap B)$，于是 $\downarrow(\Downarrow_z x\cap B^*)\subseteq\downarrow(\Downarrow_z x\cap B)$.

引理1　设L是完备格，$\forall x\in L,\Downarrow_z x=\bigcap\{I\in Z(L): x\leqslant\sup I\}$.

引理 2　设 L 是完备格，$x\in L$，则 $\Downarrow_z x\in Z(L)$.

证　由引理 1 及 $Z(L)$ 的定义可得.

定理 1　设 L 是完备格，则 L 是 Z-半连续格当且仅当 L 存在 Z-半基.

证 充分性　设 L 是 Z-半连续格，由引理 2 及 $Z(L)$ 的定义知 L 为其自身的半基.

必要性　设 B 为 L 的 Z-半基，$\forall x\in L$，有 $x\leqslant\sup(\Downarrow_z x\cap B)$. 因为 $\Downarrow_z x\cap B\subseteq\Downarrow_z x$，故 $x\leqslant\sup(\Downarrow_z x\cap B)\leqslant\sup\Downarrow_z x$，由定义 5 知 L 为 Z-半连续格.

命题 2　设 L 是完备格，$B\subseteq L$，则 B 是 L 的 Z-半基当且仅当 $\forall x\in L$ 有 $\downarrow(\Downarrow_z x\cap B)\in Z(L)$ 且 $\forall x,y\in L$，若 $y\nleqslant x$，则 $\exists b\in B$ 使得 $b\nleqslant x$，$b\Leftarrow_z y$

证 充分性　若 B 是 L 的 Z-半基，由定义 6 可知 $\forall a\in L$，有 $a\leqslant\sup(\Downarrow_z a\cap B)$. $\forall x,y\in L$，若 $y\nleqslant x$，则 $\sup(\Downarrow_z y\cap B)\nleqslant x$，从而 $\exists b\in\Downarrow_z y\cap B$，使 $b\nleqslant x$.

必要性　假设 $\exists a\in L$，使得 $a\nleqslant\sup(\Downarrow_z a\cap B)$，由条件可知 $\exists b\in\Downarrow_z a\cap B$，使 $b\nleqslant\sup(\Downarrow_z a\cap B)$，矛盾.

命题 3　设 L 是 Z-半连续格，$B\subseteq L$，对于下列条件:

(i) B 为 L 的 Z-半基;

(ii) $\forall x,y\in L$，当 $y\Leftarrow_z x$ 时，$\exists b\in B$ 使 $y\leqslant b\Leftarrow_z x$;

(iii) $\forall x,y\in L$，当 $y\Leftarrow_z x$ 时，$\exists b\in B$ 使 $y\Leftarrow_z b\Leftarrow_z x$，

有 (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii). 若 L 还满足 $\Leftarrow_z\subseteq\leqslant$，则上述 3 个条件等价.

证　(i)$\Rightarrow$(ii) 由于 L 是 Z-半连续格，所以 $\forall x,y\in L$，若 $y\Leftarrow_z x$，则由 B 是 L 的 Z-半基知，$\downarrow(\Downarrow_z x\cap B)\in Z(L)$ 且 $x\leqslant\sup(\Downarrow_z x\cap B)=\sup\downarrow(\Downarrow_z x\cap B)$，由 $\Leftarrow_z$ 的定义知 $y\in\downarrow(\Downarrow_z x\cap B)$，从而 $\exists b\in\Downarrow_z x\cap B$ 使 $y\leqslant b$，即 $\exists b\in B$ 使得 $y\leqslant b\Leftarrow_z x$.

(ii)$\Rightarrow$(i) 只需证明 $\forall x\in L$. 有 $\downarrow(\Downarrow_z x\cap B)\in Z(L)$ 且 $x\leqslant\sup(\Downarrow_z x\cap B)$，一方面，$\Downarrow_z x\cap B\subseteq\Downarrow_z x$，由引理 2 知 $\Downarrow_z x\in Z(L)$，故 $\downarrow(\Downarrow_z x\cap B)\subseteq\Downarrow_z x$，另一方面，$\forall y\in\Downarrow_z x$，有 $y\Leftarrow_z x$，由(ii)知 $\exists b\in B$ 使 $y\leqslant b\Leftarrow_z x$，则 $b\in\Downarrow_z x$，即 $b\in\Downarrow_z x\cap B$，故 $y\in\downarrow(\Downarrow_z x\cap B)$，那么 $\Downarrow_z x\cap B=\Downarrow_z x\in Z(L)$，且由 L 是 Z-半连续格知 $x\leqslant\sup(\Downarrow_z x)=\sup\downarrow(\Downarrow_z x\cap B)=\sup(\Downarrow_z x\cap B)$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) 由 L 为 Z-半连续格，所以 $\forall x,y\in L$，若 $y\Leftarrow_z x$，由文献[2]中的插入性质，则 $\exists a\in L$，使 $y\Leftarrow_z b\Leftarrow_z x$，由(ii)知 $\exists b\in B$ 使 $a\leqslant b\Leftarrow_z x$，所以 $y\Leftarrow_z b\Leftarrow_z x$.

(iii)$\Rightarrow$(ii) 若 L 还满足 $\Leftarrow_z\subseteq\leqslant$，则 (iii)$\Rightarrow$(ii) 显然.

推论 1　设 L 是 Z-半连续格，则 $B(\subseteq L)$ 是 Z-半基当且仅当 $\forall x\in L,\downarrow(\Downarrow_z x\cap B)=\Downarrow_z x$.

定义 7　设 L 是完备格，$B\subseteq L$. 若 $\forall x\in L$ 有如下 2 条成立:

(i) $\downarrow(\Downarrow_z x\cap B)\in Z(L)$;

(ii) $x=\sup(\Downarrow_z x\cap B)$,

则称 B 为 L 的 Z -基.

推论 2 设 L 是强 Z -连续格，则 $B(\subseteq L)$ 是 Z -半基当且仅当 B 是 Z -基.

证 充分性 设 B 为 L 的 Z -半基，则 $\downarrow(\Downarrow_z x\cap B)\in Z(L)$，由 L 是强 Z -连续格，则 $x=\vee\Downarrow_z x=\vee\downarrow(\Downarrow_z x\cap B)=\vee(\Downarrow_z x\cap B)$.

必要性 显然.

命题 4 设 L 是 Z -半连续格，B 是 L 的 Z -半基，则 $U\subseteq L$ 是 Z -半 Scott 开集当且仅当 $U=\uparrow U$ 且 $U\subseteq\bigcup\{\Uparrow_z b:b\in U\cap B\}$.

证 充分性 $\forall U\in\sigma_z(L)$,有 $U=\uparrow U$，由 P 为 Z -半连续格及文献[2]命题 2.5(2)知 $U\subseteq\bigcup\{\Uparrow_z x:x\in U\}$. 下证 $\bigcup\{\Uparrow_z x:x\in U\}=\bigcup\{\Uparrow_z b:b\in U\cap B\}$. 一方面，$\forall y\in\bigcup\{\Uparrow_z x:x\in U\}$，则 $\exists x\in U$ 有 $x\Leftarrow_z y$，由命题 3(ii)知 $\exists b\in B$ 使 $x\leqslant b\Leftarrow_z y$,由 $U=\uparrow U$ 可知 $b\in U\cap B$ 且 $y\in\Uparrow_z b$. 另一方面，$\forall y\in\bigcup\{\Uparrow_z b:b\in U\cap B\}$,则 $\exists b\in U$，有 $y\in\Uparrow_z b\subseteq\bigcup\{\Uparrow_z x:x\in U\}$.

必要性 $\forall I\in Z(L)$，若 $\sup I\in U$，假设 $\exists b\in U\cap B$，有 $\sup I\in\Uparrow_z b$，即 $b\Leftarrow_z\vee I$，由定义 5 知 $b\in I$，故 $U\cap I\neq\varnothing$.

2 *Z*-半连续格的局部 *Z*-半基

接下来在 Z -半连续上引入 Z -局部半基的概念并讨论它的一些基本性质.

定义 8 设 L 为完备格，$x\in L,B\subseteq\Downarrow_z x$. 若

(i) $\downarrow B\in Z(L)$;

(ii) $x\leqslant\sup B$,

则称 B 为 x 的一个局部 Z -半基.

命题 5 设 L 是完备格，则 L 是 Z -半连续格当且仅当 $\forall x\in L$, x 都有局部 Z -半基.

证 充分性 $\forall x\in L$,令 $B=\Downarrow_z x\subseteq\Downarrow_z x$，由引理2知 $\Downarrow_z x\in Z(L)$ 且由 L 为 Z -半连续格，则 $x\leqslant\sup\Downarrow_z x=\sup B$. 故 B 为 x 的一个局部 Z -半基.

必要性 $\forall x\in L$，设 B_x 为 x 的局部 Z -半基，则 $B_x\subseteq\Downarrow_z x$ 且 $x\leqslant\sup B_x\leqslant\sup\Downarrow_z x$. 故 L 为 Z -半连续格.

命题 6 设 L 是完备格，若 L 存在 Z -半基当且仅当 $\forall x\in L$ 有局部 Z -半基.

证 由定理 1 及命题 5 可得.

命题 7 设 L 是完备格，$a\in L$，则

(i) 若 a 有局部 Z -半基，则 $\Downarrow_z a$ 是 a 的最大局部 Z -半基;

(ii) 若 $a\Leftarrow_z a$，则 $\Downarrow_z a$ 是 a 的局部 Z -半基;

(iii) 若 $b\leqslant a$ 且 B_a,B_b 分别为 a,b 的局 Z -半基，则 $B_b\subseteq\downarrow B_a$.

证 (i)设 B 是 a 的局部 Z -半基，则 $B\subseteq\Downarrow_z a$ 且 $a\leqslant\sup B\leqslant\sup\Downarrow_z a$.

再由引理 2 知 $\Downarrow_z a\in Z(L)$，从而 $\Downarrow_z a$ 是 a 的最大局部 Z -半基.

(ii) 由引理 2 知 $\Downarrow_z a\in Z(L)$，又 $a\Leftarrow_z a$,即 $a\leqslant\sup\Downarrow_z a$，因此 $\Downarrow_z a$ 为 a 的局部 Z -半基.

(iii) 由 B_a 是 a 的局部 Z -半基知 $\downarrow B_a\in Z(L)$ 且 $a\leqslant\sup B_a$. 由 B_b 是 b 的局部 Z -半基知 $\forall x\in B_b$ 有 $x\Leftarrow_z b\leqslant a$，所以 $x\Leftarrow_z a\leqslant\sup\downarrow B_a$，从而 $x\in\downarrow B_a$，故有 $B_b\subseteq\downarrow B_a$.

命题 8 设 L 是 Z -半连续格，$a\in L$ 且 $B\subseteq\Downarrow_z a$，则 B 是 a 的局部 Z -半基当且仅当 $\forall c\in\Downarrow_z a$，$\exists b\in B$ 使得 $c\leqslant b$，即 $\downarrow B=\Downarrow_z a$.

证 充分性 由 B 是 a 的局部 Z -半基知 $\downarrow B\in Z(L)$ 且 $a\leqslant\sup B$，$\forall c\in\Downarrow_z a$ 有 $c\Leftarrow_z a\leqslant\sup B=\sup\downarrow B$. 故 $c\in\downarrow B$. 即 $\exists b\in B$ 使 $c\leqslant b$.

必要性 由 $\downarrow B=\Downarrow_z a$ 及 L 为 Z -半连续格知 B 为 a 的局部 Z -半基.

定义 9 设 L 为完备格，$x\in L,B\subseteq\Downarrow_z x$，若

(i) $\downarrow B\in Z(L)$;

(ii) $x=\sup B$,

则称 B 为 x 的一个局部 Z -基.

推论 3 设 L 是强 Z -连续格，$x\in L,B\subseteq\Downarrow_z x$，则 B 是 x 的局部 Z -半基当且仅当 B 是 x 的局部 Z -基.

证 充分性 设 B 为 x 的局部 Z -半基，则 $\downarrow B\in Z(L)$,由 L 是强 Z -连续格及命题 8 知 $x=\sup\Downarrow_z x=\sup\downarrow B$，故 B 为 x 的局部 Z -基.

必要性 显然.

命题 9 设 L 是强 Z -连续格，则 L 存在 Z -基当且仅当 $\forall x\in L$ 有局部 Z -基.

证 充分性　设 B 为 L 的 Z-基, 则 $x=\sup(\Downarrow_z x\cap B)\leqslant \sup\Downarrow_z x$, 即 L 为 Z-半连续格, 由命题 6 知 $\forall x\in L$ 有局部 Z-半基, 由推论 3 得 $\forall x\in L$ 有局部 Z-基.

必要性　设 $\forall x\in L$ 有局部 Z-基 B_x, 则 $B_x\subseteq\Downarrow_z x$ 且 $x=\sup B_x\leqslant\sup\Downarrow_z x$, 即 L 为 Z-半连续格, 由定理 1 知 L 存在 Z-半基, 再由推论 2 知 L 存在 Z-基.

命题 10　设 L 是 Z-半连续格, $a\in L$ 且 $B\subseteq\Downarrow_z a$, 则 B 是 a 的局部 Z-半基当且仅当 $\downarrow B\in Z(L)$ 且 $\forall x\in L$, 若 $a\not\leqslant x$, 则 $\exists b\in B$ 使得 $x\not\leqslant x$.

证 充分性　若 B 是 a 的局部 Z-半基, 则由定义 8 知 $\downarrow B\in Z(L)$ 且 $a\leqslant\sup B$, $\forall x\in L$, 若 $a\not\leqslant x$, 则 $\sup B\not\leqslant x$, 从而 $\exists b\in B$ 使 $b\not\leqslant x$.

必要性　若 $a\not\leqslant \sup B$, 则 $\exists b\in B$ 使得 $b\not\leqslant\sup B$. 矛盾.

3　*Z*-半 Lawson 拓扑

定义 10　设 L 为完备格, L 上以 $\omega(L)\cup\sigma_z(L)$ 生成的拓扑称为 L 上的 Z-半 Lawson 拓扑, 记为 $\lambda_z(L)=\omega(L)\cup\sigma_z(L)$.

完备格 L 的一个子集 X 称为具有性质 (S_z), 若 X 满足: $\forall I\in Z(L)$, 若 $\vee I\in X$, 则 $\exists y\in I$, 使 $\forall x\in I, x\geqslant y\Rightarrow x\in X$.

引理 3　一个集是 Z-半 Scott 开的当且仅当它是上集且具有性质 (S_z).

证 充分性　$\forall U\in\sigma_z(L)$, 则 $U=\uparrow U$ 且 $\forall I\in Z(L)$, 若 $\vee I\in U$, 则 $U\cap I\neq\varnothing$. 那么 $\exists y\in U\cap I$, 使 $\forall x\in I$, 若 $x\geqslant y$, 则 $x\in U$.

必要性　设 U 是上集且具有性质 (S_z), 则 $U=\uparrow U$, $\forall I\in Z(L)$, 若 $\vee I\in U$, 则 $\exists y\in I$. 由 U 具有性质 (S_z), 那么 $y\in U$, 即 $U\cap I\neq\varnothing$. 故 $U\in\sigma_z(L)$.

命题 11　设 L 是完备格, $U=\uparrow U\subseteq L$, $A=\downarrow A\subseteq L$, 则

(i) U 是 Z-半 Lawson 开的 $\Leftrightarrow$ U 是 Z-半 Scott 开的;

(ii) A 是 Z-半 Lawson 闭的 $\Leftrightarrow$ A 是 Z-半 Scott 闭的.

证 (i) 充分性　$\forall I\in Z(L)$ 且 $\vee I\in U\in\lambda_z(L)$, 则 $\exists W\in\sigma_z(L)$ 及 $F\in L^{(<\omega)}$, 使 $\vee I\in W\setminus\uparrow F\subseteq U$, 则 $\vee I\in W\in\sigma_z(L)$, 即 $I\cap W\neq\varnothing$, 故 $\exists y\in I\cap W$, 且若 $y\in\uparrow F$, 则 $\vee I\in\uparrow y\subseteq\uparrow F$ 矛盾. 所以 $y\in W\setminus\uparrow F\subseteq U$, 由 U 为上集, 故 $\forall x\geqslant y$ 有 $x\in U$. 故 Z-半 Lawson 开上集具有性质 (S_z), 由引理 3 知 Z-半 Lawson 开上集是 Z-半 Scott 开集.

必要性　显然.

(ii) 由(i)可得.

命题 12　设 L_1, L_2 是完备格, 映射 $f:L_1\to L_2$ 保序, 考虑下述 2 个条件:

(i) f 关于 Z-半 Scott 拓扑连续;

(ii) f 保 Z-并,

则 (i)$\Rightarrow$(ii); 若 f 保 Z-理想, 则 (ii)$\Rightarrow$(i), 从而 2 个条件等价.

证　(i)$\Rightarrow$(ii)　设 f 关于 Z-半 Scott 拓扑连续, $\forall P\in Z(L_1)$, 下证 $f(\vee P)=\vee f(P)$. 一方面, 由 f 保序, $f(\vee P)\geqslant\vee f(P)$. 另一方面, 若 $f(\vee P)\not\leqslant\vee f(P)$, 则 $f(\vee P)\in L\setminus\downarrow\vee f(P)\in\sigma_z(L_2)$, 由 f 关于 Z-半 Scott 拓扑连续, 有 $\vee P\in f^{-1}(L\setminus\downarrow\vee f(P))\in\sigma_z(L_1)$, 因而 $\exists p\in P$ 使 $p\in f^{-1}(L\setminus\downarrow\vee f(P))$, 即 $f(p)\in L\setminus\downarrow\vee f(P)$ 与 $f(p)\leqslant\vee f(P)$ 矛盾. 因而 $f(\vee P)=\vee f(P)$, 故 f 保 Z-并.

(ii)$\Rightarrow$(i) 设 f 保 Z-理想且保 Z-并, 下证 f 关于 Z-半 Scott 拓扑连续.

$\forall U\in\sigma_z(L_2)$, 由 f 保序知 $f^{-1}(U)$ 是上集. $\forall I\in Z(L_1)$ 且 $\vee I\in f^{-1}(U)$, 由 f 保 Z-并, 有 $\vee\downarrow f(I)=\vee f(I)=f(\vee I)\in U$, 又由 f 保 Z-理想, 有 $\downarrow f(I)\in Z(L_2)$, 因而 $\downarrow f(I)\cap U\neq\varnothing$, 又由 U 是上集, 故 $f(I)\cap U\neq\varnothing$, 从而 $I\cap f^{-1}(U)\neq\varnothing$, 因而 $f^{-1}(U)\in\sigma_z(L_1)$, 故 f 关于 Z-半 Scott 拓扑连续.

推论 4　设 L_1, L_2 是完备格, 映射 $f:L_1\to L_2$ 保任意交, 考虑下述 2 个条件:

(i) f 关于 Z-半 Lawson 拓扑连续;

(ii) f 保 Z-并,

则 (i)$\Rightarrow$(ii); 若 f 保 Z-理想, 则 (ii)$\Rightarrow$(i), 从而 2 个条件等价.

命题 13　设 L 为完备格,则 $\lambda_z(L)$ 是 T_1 的.

证　$\forall x\in L$, $\uparrow x$ 是下拓扑闭集, 从而为 Z-半 Lawson 闭集. $\downarrow x$ 是 Z-半 Scott 闭集, 从而是 Z-半

Lawson 闭集. 因而 $\{x\}=\uparrow x\cap\downarrow x$ 是 Lawson 闭的. 故 $\lambda_z(L)$ 是 T_1 的.

命题 **14** 设 L 是强 Z-连续格, 则 $\lambda_z(L)=\lambda(L)$, 从而 $(L,\lambda_z(L))$ 是紧 T_2 的.

4 参考文献

[1] Gierz G, Hofmann K H, Keimel K, et al. Continuous lattices and domains [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

[2] Zhao Dong. Semicontinuous lattices [J]. Algebra Universialis, 1997, 37(4): 458-476.

[3] 李高林, 徐罗山, 陈昱. 半连续格上的半基和局部半基 [J]. 模糊系统与数学, 2010, 24(1): 51-55.

[4] 毕含宇, 徐晓泉. 半连续格上的半 Scott 拓扑与半 Lawson 拓扑 [J]. 模糊系统与数学, 2008, 22(2): 75-82.

[5] 伍秀华, 李庆国. 半连续格的刻画和映射 [J]. 数学研究和评论, 2007, 27(3): 654-658.

[6] Baranga A. *Z*-continuous posets [J]. Discrete Mathematics, 1996, 152(1/2/3): 33-45.

[7] 杨金波. 关于广义完全分配格的一个注记 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2001, 25(3): 207-209.

[8] 陶炎芳, 张晓媛, 徐晓泉. 广义完全分配格的逆极限 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2011, 35(4): 375-378.

[9] 李娇, 徐晓泉. 相容连续 Domain 的序同态扩张 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2011, 35(4): 373-374.

[10] 徐菲, 徐晓泉. 半 Smooth 格 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2008, 32(1): 22-26.

The *Z*-Semibasis and Locally *Z*-Semibasis on *Z*-Semicontinuous Lattices

WAN Xiao, YANG Jin-bo*

(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: As a generalization of semibasis and locally semibasis on a semicontinuous lattice, *Z*-semibasis and locally *Z*-semibasis on a *Z*-semicontinuous lattice are introduced for a generalized ideal subsets system *Z*. Some properties of *Z*-semibasis, locally *Z*-semibasis and *Z*-semi-Lawson topology on a *Z*-semicontinuous lattice are presented. In particular, some characterizations of *Z*-semicontinuous lattices with the help of *Z*-semibasis are given.

Key words: generalized ideal sub-systems; *Z*-semibasis; locally *Z*-semibasis; *Z*-semi-Lawson topology

(责任编辑: 曾剑锋)