第 36 卷 第 1 期　江西师范大学学报(自然科学版)　Vol. 36 No.1
2012 年 1 月　Journal of Jiangxi Normal University (Natural Science)　Jan. 2012

文章编号: 1000-5862(2012)01-0063-04

一类模糊微分方程初值问题解的存在性

张千宏[1], 杨利辉[2]

(1. 贵州财经学院数学与统计学院, 经济系统仿真重点实验室, 贵州 贵阳 550004;
2. 湖南城市学院数学系, 湖南 益阳 413000)

摘要: 利用拓扑度理论对一类一阶模糊微分方程 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=F(t,u),\quad u(t_0)=u_0\ (u_0\in E^n)$ 解的存在性问题进行了研究, 证明了在 $F(t,u)$满足一定的条件下该方程至少有一个解.

关键词: 模糊微分方程; 初值问题; 拓扑度
中图分类号: O 152.1, O 157.2　　文献标识码: A

0　引言

模糊微分方程首先由 Kandel 与 Byatt [1]提出并得到了讨论, 自模糊微分方程提出后, 一阶模糊微分方程的初值问题得到了充分讨论[2-7], 模糊微分方程的一种推广形式——模糊包含, 也有不少学者进行了研究[8-11]. 此外还有学者研究了模糊初值问题的数值解法[12]. 本文借助拓扑度理论方法讨论模糊微分方程的初值问题.

设 E^n 是一模糊集空间, 考虑如下模糊微分方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=F(t,u),\ u(t_0)=u_0\ (u_0\in E^n),\tag{1}$$

这里 $F:[0,T]\times E^n\to E^n$ 是一个模糊映射, 考虑 F 在适当的条件下方程(1)的可解性问题.

1　预备知识

设 A、B 是 $\mathbf{R}^n$ $(E^n,D)\in G^*$ 上 2 个非空有界的子集, A 与 B 之间的 Hausdorff 距离定义为

$$d_H(A,B)=\max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|,\sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a-b\|\},$$

$\|\cdot\|$ 表示通常的欧几里得范数.

让 $P_l(\mathbf{R}^n),P_k(\mathbf{R}^n),P_c(\mathbf{R}^n)$ 分别表示 $\mathbf{R}^n$ 上的非空闭的、非空紧的、非空凸的子集. 如果在 $P_k(\mathbf{R}^n)$ 上引入距离 d_H, 则 $(P_k(\mathbf{R}^n),d_H)$ 是完备的可分的距离空间.

定义 1　集值函数 $F:T\to P_l(\mathbf{R}^n)$ 是可测的, 如果满足下列条件之一:

(i) 对所有的 $x\in\mathbf{R}^n,t\to d_{F(t)}=\inf_{u\in F(t)}\|x-u\|$ 是可测的;

(ii) $GrF=\{(t,x)\in T\times\mathbf{R}^n:x\in F(t)\}\in\Sigma\times\beta(\mathbf{R}^n)$, 这里 Σ, $\beta(\mathbf{R}^n)$ 分别是 T 与 $\mathbf{R}^n$ 上的Borel σ-域;

(iii) 对所有的 $t\in T$, 存在可测函数序列 $\{f_n(\cdot)\}_{n\geqslant1}$ 使得 $F(t)=\overline{\{f_n(t)_{n\geqslant1}\}}$.

S_F^1 表示勒贝格-波瑞尔空间 $L^1_{\mathbf{R}^n}(T)$ 中 $F(t)$ 的所有选择集, 即

$$S_F^1=\{f(\cdot)\in L^1_{\mathbf{R}^n}(T):f(t)\in F(t),\text{a.e.}\},$$

Aumann积分表示为 $\int_T F(t)\mathrm{d}t=\left\{\int_T f(t)\mathrm{d}t:f(\cdot)\in S_F^1\right\}$.

称 $F:T\to P_l(\mathbf{R}^n)$ 是积分有界的, 如果 F 可测且存在函数 $h:T\to\mathbf{R},h\in L^1_{\mathbf{R}}(T)$, 使得 $\|x\|\leqslant h(t),x\in F(t)$.

$u:\mathbf{R}^n\to[0,1]$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 上的模糊子集, 如果满足下列4个条件:

(i) u 是正规的, 即 $\exists x_0\in\mathbf{R}^n$ 使得 $u(x_0)=1$;

(ii) u 是模糊凸的, 即 $\forall\lambda\in[0,1],u(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant\min\{u(x),u(y)\}$;

(iii) u 是上半连续的;

(iv) $[u]^0=\overline{\{x\in\mathbf{R}^n:u(x)>0\}}$ 是紧的.

对 $0<\alpha<1$, $[u]^\alpha=\{x\in\mathbf{R}^n:u(x)\geqslant\alpha\}$, 显然

收稿日期: 2011-12-10
基金项目: 贵州省科技厅自然科学基金(黔科 J[2011]2096)资助项目.
作者简介: 张千宏(1971-), 男, 湖南邵阳人, 副教授, 博士, 主要从事常微分方程、模糊微分方程和神经网络动力系统的研究.

$[u]^\alpha \in P_{KC}(\mathbf{R}^n)$，定义
$D: E^n \times E^n \to \mathbf{R}^+ \bigcup \{0\},\ D(u,v) = \sup\limits_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} d_H([u]^\alpha, [v]^\alpha)$，因此 $\forall u,v,w \in E^n, k \in \mathbf{R}$，有 $D(u+w, v+w) = D(u,v)$ 与 $D(ku,kv) = |k| D(u,v)$.

由文献[13]知，(E^n, D) 是完备的距离空间.显然 E^n 可以等距嵌入到一个Banach空间[14].

定理 1[15] 设 $u \in E^n$，则有

(i) 对所有的 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1, [u]^\alpha \in P_{kc}(\mathbf{R}^n)$；

(ii) 对所有的 $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1, [u]^{\alpha_2} \subset [u]^{\alpha_1}$；

(iii) 假如 (α_k) 是一个收敛于 α 非减序列，那么 $[u]^\alpha = \bigcap\limits_{k \geqslant 1} [u]^{\alpha_k}$.

反之，如果 $\{A^\alpha : 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的满足于(i)~(iii)的一族子集，那么 $\exists u \in E^n$，使得 $[u]^\alpha = A^\alpha$，$[u]^0 = \overline{\bigcup\limits_{0<\alpha<1} A^\alpha} \subset A^0$.

定义 2 映射 $F: T \to E^n$ 是模糊可测的，如果对所有 $\alpha \in [0,1]$，集值映射 $F: T \to P_k(\mathbf{R}^n)(F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha)$ 满足定义1的条件(i)~(iii). 称模糊集值映射 $F: T \to E^n$ 为模糊积分有界的，如果 $F_0(t)$ 是积分有界的.

定义 3 设 $F: T \to E^n$ 是一个模糊积分有界映射，F 在 T 上的模糊积分定义为 $\left[\int_T F(t)\mathrm{d}t\right]^\alpha = \int_T F_\alpha(t)\mathrm{d}t$，$0 < \alpha \leqslant 1$，记作 $\int_T F(t)\mathrm{d}t$.

性质 1 设 $F, G: T \to E^n$ 是 T 上的模糊可积映射，$\lambda \in \mathbf{R}$，则有

(i) $\int_T [F(t) + G(t)]\mathrm{d}t = \int_T F(t)\mathrm{d}t + \int_T G(t)\mathrm{d}t$；

(ii) $\int_T \lambda F(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_T F(t)\mathrm{d}t$；

(iii) $D(F,G)$ 可积；

(iv) $D(\int_T F(t)\mathrm{d}t, \int_T G(t)\mathrm{d}t) \leqslant \int_T D(F(t), G(t))\mathrm{d}t$.

定义 4 称模糊映射 $F: T \to E^n$ 为在 t_0 是可微的，如果 $\exists F(t_0) \in E^n$，使得 $\lim\limits_{h \to 0^+} (F(t_0+h) - F(t_0))/h = \lim\limits_{h \to 0^+} (F(t_0) - F(t_0-h))/h = F'(t_0)$.

定义 5 称映射 $u: T \to E^n$ 为方程(1)的模糊解，如果 u 满足下列积分方程

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(s, u(s))\mathrm{d}s, t \in T.$$

设 X 是赋范空间，Ω 是 X 的开的有界子集，称映射 $f: \bar{\Omega} \to X$ 为全连续的，如果 f 是连续的且映有界集为相对紧集. 设 $\partial\Omega$ 是 Ω 边界，如果 $0 \notin (I-f)(\partial\Omega)$，那么 f 的拓扑度 $\deg(I-f, \Omega, 0)$ 具有以下性质:

(i) (正规性) 如果 $\deg(I-f, \Omega, 0) \neq 0$，那么 $x - f(x) = 0$ 在 Ω 上有一解;

(ii) (可加性) 设 $\Omega_i (i=1,2)$ 是 X 的2个开集，$\Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \varnothing, \Omega_1 \bigcup \Omega_2 = \Omega$，那么 $\deg(I-f, \Omega, 0) = \deg(I-f, \Omega_1, 0) + \deg(I-f, \Omega_2, 0)$；

(iii) (同伦不变性) 设 $H: [0,1] \times \bar{\Omega} \to X$ 是一个紧同伦，即 $H(t, \cdot)$ 是全连续的，$H(\cdot, x)$ 是连续的，假定 $x \neq H(t,x), \forall t \in [0,1], \forall x \in \Omega$，那么 $\deg(I - H(0,\cdot), \Omega, 0) = \deg(I - H(1,\cdot), \Omega, 0)$.

2 主要结论

设 $u \in E^n$ 和 u^* 是支撑函数定义为 $u^*(\alpha, x) = \sup\limits_{a \in [u]^\alpha} (a, x), x \in S^{n-1}$，这里 S^{n-1} 是 $\mathbf{R}^n$ 上的单位球，$(\cdot,\cdot)$ 表示 a 与 x 的内积，由文献[16]有

$$d([u]^\alpha, [v]^\alpha) = \sup_{x \in S^{n-1}} |u^*(\alpha, x) - v^*(\alpha, x)|. \tag{2}$$

由文献[10]知，E^n 可以嵌入到一个Banach空间 X，设 $j: E^n \to X$ 是嵌入映射，$\forall u, v \in E^n$，$s, t > 0$，有

$$j(su + tv) = sj(u) + tj(v),$$
$$D(u,v) = \| j(u) - j(v) \| \leqslant 2D(u,\ v).$$

设 G 是 E^n 上的一开子集，$G^* = j(G)$ 是 X 上的嵌入像，G 被称为是一致支撑有界的，如果 $\exists K > 0$，使得 $\forall u \in E^n$，有 $\sup\limits_{a \in [u]^0} \|a\| \leqslant K$；$G^*$ 被称为在 $(\alpha, x) \in [0,1] \times S^{n-1}$ 关于 α 一致等度左连续的，如果 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得对所有 $\beta - \delta < \alpha \leqslant \beta, x \in S^{n-1}$，$u^* \in G^*$，$u^*(\beta, x) \leqslant u^*(\alpha, x) < u^*(\beta, x) + \varepsilon$，距离空间 (E^n, D) 的紧性参见文献[13].

引理 1 (E^n, D) 上关于闭集 G 是紧的当且仅当 G 是一致支撑有界的，且 G^* 在 $(\alpha, x) \in [0,1] \times S^{n-1}$ 上关于 α 一致等度左连续的.

引理 2 设 G 是 E^n 上的一闭子集，$C_{jE^n}(T) = \{u: T \to jE^n$，那么 G 在 E^n 上是紧的，其充分必要条件是

(i) $\tilde{G} = \{[u]^\alpha : u \in G, \alpha \in [0,1]\}$ 在 $P_{kc}(R^n)$ 上是相对紧的;

(ii) G 是 α ($\alpha \in [0,1]$)左连续的，即 $\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$ 使得

$$d_H([u]^\alpha,[u]^\beta)<\varepsilon,\quad \alpha-\delta<\beta\leqslant\alpha, u\in G.$$

定义6　映射 $F:E^n\to E^n$ 在 $(\alpha,x)\in[0,1]\times S^{n-1}$ 被称为关于 α 一致等度左连续的，如果对任意有界集 $G\subset E^n$，$jF(G)$ 是等度左连续的.

定理2　设模糊映射 $F(t,u)$ 在 $T\times E^n$ 上连续，且 $\exists M>0$，使得当 $(t,u)\in T\times E^n$ 时，有 $D(F(t,u),\tilde{0})\leqslant M(1+D(u,\tilde{0}))$，则方程(1)在 T 上至少有一解.

证　令 $L(u)(t)=u_0+\int_0^t F(s,u(s))\mathrm{d}s$. 既然 E^n 可以嵌入到一个Banach 空间，让 jE^n 表示嵌入像，$\|\cdot\|$ 表示 Banach 空间 X 上的范数，则在范数 $\|u\|=\sup\limits_{t\in T}\|u(t)\|$ 意义下，下列空间 $C_{jE^n}(T)=\{u:T\to jE^n$ 是连续的$\}$是Banach空间. 考虑 $C_{jE^n}(T)$ 上的开集

$$g^*(\alpha,x)-g^*(\beta,x)=\sup_{a\in\int_0^t[h(s)]^\alpha\mathrm{d}s}(a,x)-\sup_{a\in\int_0^t[h(s)]^\beta\mathrm{d}s}(a,x)\leqslant$$

$$\sup_{x\in S^{n-1}}\left|\sup_{a\in\int_0^t[h(s)]^\alpha\mathrm{d}s}(a,x)-\sup_{a\in\int_0^t[h(s)]^\beta\mathrm{d}s}(a,x)\right|=$$

$$d_H\left(\int_0^t[h(s)]^\alpha\mathrm{d}s,\int_0^t[h(s)]^\beta\mathrm{d}s\right),$$

$$\tilde{B}_R(ju_0)=\{u\in C_{jE^n}(T):|\|u-ju_0\||<R\}.$$

令 $H(x,\lambda):\tilde{B}_R(ju_0)\times[0,1]\to C_{jE^n}(T)$，其中

$$H(x,\lambda)(t)=j\left(u_0+\lambda\int_0^t F(s,j^{-1}u(s))\mathrm{d}s\right).$$

对任意有界集 $G\subset C_{jE^n}(T)$，即 $\forall u\in G$，$\exists Q>0$，使得 $D(u,\tilde{0})\leqslant Q$，$\forall t_1,t_2\in T$，

$$\|H(u,\lambda)(t_1)-H(u,\lambda)(t_2)\|\leqslant\left\|j\left(\lambda\int_{t_1}^{t_2}F(s,j^{-1}u(s))\mathrm{d}s\right)\right\|\leqslant$$

$$2D\left(\int_{t_1}^{t_2}F(s,j^{-1}u(s))\mathrm{d}s,\tilde{0}\right)\leqslant2\int_{t_1}^{t_2}(F(s,j^{-1}u(s)),\tilde{0})\mathrm{d}s.$$

由已知 $D(F(t,u),\tilde{0})\leqslant M(1+D(u,\tilde{0}))\leqslant M(1+Q)$. 故有 $\|H(u,\lambda)(t_1)-H(u,\lambda)(t_2)\|\leqslant2M(1+Q)|t_1-t_2|$，则 $H(G,\lambda)(\cdot)$ 是等度连续的.

下面需证 $H(G,\lambda)(t),t\in T$ 在 $C_{jE^n}(T)$ 是相对紧的，即需证下面2个命题.

(i)　$\overline{(\int_0^t F(s,j^{-1}G(s))\mathrm{d}s)^*}$ 是等度连续的；

(ii)　$\overline{(\int_0^t F(s,j^{-1}G(s))\mathrm{d}s)}$ 是一致支撑有界的.

事实上，$\forall g^*\in(\int_0^t F(s,j^{-1}G(s))\mathrm{d}s)^*$，$\exists h(s)\in F(s,G(s))$，使得 $g=\int_0^t h(s)\mathrm{d}s$，由 $[g]^\alpha=\int_0^t[h(s)]^\alpha\mathrm{d}s$，有 $g^*(\alpha,x)=\sup\limits_{a\in[g]^\alpha}(a,x)=\sup\limits_{a\in\int_0^t[h(s)]^\alpha\mathrm{d}s}(a,x)$，由(2)式知，

$$g^*(\alpha,x)-g^*(\beta,x)=\sup_{a\in\int_0^t[h(s)]^\alpha\mathrm{d}s}(a,x)-\sup_{a\in\int_0^t[h(s)]^\beta\mathrm{d}s}(a,x)\leqslant$$

$$\sup_{x\in S^{n-1}}\left|\sup_{a\in\int_0^t[h(s)]^\alpha\mathrm{d}s}(a,x)-\sup_{a\in\int_0^t[h(s)]^\beta\mathrm{d}s}(a,x)\right|=$$

$$d_H\left(\int_0^t[h(s)]^\alpha\mathrm{d}s,\int_0^t[h(s)]^\beta\mathrm{d}s\right)\leqslant\int_0^t d_H([h(s)]^\alpha,$$

$$[h(s)]^\beta)\mathrm{d}s=\int_0^t\sup_{x\in S^{n-1}}|h(s)^*(\alpha,x)-h(s)^*(\beta,x)|\mathrm{d}s,$$

$$j^{-1}u(t)=v(t)=u_0+\int_0^t F(s,v(s))\mathrm{d}s.$$

由 $F(s,G(s))$ 是等度左连续的，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$，当 $\beta-\delta<\alpha\leqslant\beta$，使得 $|h(s)^*(\alpha,x)-h(s)^*(\beta,x)|<\varepsilon$，故有 $g^*(\alpha,x)<g^*(\beta,x)+T\varepsilon$.

另一方面，若 $\alpha\leqslant\beta$，由定理1知 $[h(s)]^\beta\subset[h(s)]^\alpha$，有 $g^*(\alpha,s)\geqslant g^*(\beta,s)$，因此

$$g^*(\beta,s)\leqslant g^*(\alpha,s)<g^*(\beta,s)+T\varepsilon,\quad \beta-\delta<\alpha\leqslant\beta,$$

即 $(\int_0^t F(s,G(s))\mathrm{d}s)^*$ 是等度左连续的.

(a)　由引理1知，$\overline{(\int_0^t F(s,G(s))\mathrm{d}s)^*}$ 是等度左连续的.

(b)　因 $F_0(T\times j^{-1}G(T))$ 有界，$[\int_0^t F(s,j^{-1}G(T))\mathrm{d}s]_0$ 有界，所以 $\overline{[\int_0^t F(s,j^{-1}G(T))\mathrm{d}s]_0}$ 有界.

由上述的(a)，(b)及定理2知，$\overline{[\int_0^t F(s,j^{-1}G(T))\mathrm{d}s]}$ 是紧的，故 $\int_0^t F(s,j^{-1}G(T))\mathrm{d}s$ 相对紧. 所以 $H(G,\lambda)(t)$ 相对紧. 因此 $H(G,\lambda)$ 满足Arzela-Ascoli定理的条件，$H(G,\lambda)(t)$ 在 $C_{jE^n}(T)$ 上相对紧. 而且，又 $H(\cdot,\cdot)$ 是连续的，故 $H(G,\lambda)$ 紧同伦.

显然，$\forall u\in\tilde{B}_R,\lambda\in[0,1]$，

$$\|H(u,\lambda)-ju_0\|=\left\|j(\lambda\int_0^t F(s,j^{-1}u(s))\mathrm{d}s)\right\|\leqslant$$

$$M(1+Q)T<R,$$

即 $u\neq H(u,\lambda)$. 又 $H(u,0)=ju_0,ju_0\in\tilde{B}_R$，则

$$\deg(I-H(\cdot,0),\tilde{B}_R,0)=1.$$

由拓扑度的同伦不变性，在 $\tilde{B}_R$ 上，$u=H(u,1)$ 至少有一个解，即 $\exists u\in C_{jE^n}$，使得 $u(t)=j(u_0+\int_0^t F(s,j^{-1}u(s))\mathrm{d}s)$. 让 $j^{-1}u(t)=v(t)$，那么 $v(t)$ 是连续的，且

$v(t)=u_0+\int_0^t F(s,v(s))\mathrm{d}s$，定理 2 得证.

3 参考文献

[1] Kandel A, Byatt W J. Fuzzy differential equation [C]//IEE Systems, Man and Cybernetics Society. Proceedings of the International Conference on Cybernetics and Society. Tokyo: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1978: 1213-1216.

[2] Kaleva O. Fuzzy differential equations [J]. Fuzzy Sets Syst, 1987, 24(3): 301-317.

[3] Kaleva O. The Cauchy problem for fuzzy differential equations [J]. Fuzzy Sets Syst, 1990, 35(3): 389-396.

[4] Ouyang He, Wu Yi. On fuzzy differential equations [J]. Fuzzy Sets Syst, 1989, 32(3): 321-325.

[5] Seikkala S. On fuzzy initial value problem [J]. Fuzzy Sets Syst, 1987, 24(3): 319-330.

[6] Barnabás Bede, Gal Sorin G. Solutions of fuzzy differential equations based on generalized differentiability [J]. Commun Math Anal, 2010, 9(2): 22-41.

[7] Allahviranloo T, Kiania N A, Motamedi N. Solving fuzzy differential equations by differential transformation method [J]. Information Sciences, 2009, 179(7): 956-966.

[8] Diamond P. Stability and periodicity in fuzzy differential equations [J]. IEEE Trans Fuzzy Syst, 2000, 8(5): 583-590.

[9] Diamond P, Watson P. Regularity of solution sets for differential inclusions quasiconcave in a parameter [J]. Appl Math Lett, 2000, 13(1): 31-35.

[10] Tolstonogov A A. Differential inclusions in a Banach space [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

[11] Diamond P. Time-dependent differential inclusions, cocycle attractors and fuzzy differential equations [J]. IEEE Trans Fuzzy Syst, 1999, 7(6): 734-740.

[12] 张东凯，田贵辰，巩增泰，等. 二阶模糊微分方程的数值解 [J]. 河北科技大学学报: 自然科学版, 2010, 31(2): 158-161.

[13] Román-Flores H, Rojas-Medar M. Embedding of level-continuous fuzzy sets on Banach spaces [J]. Information Sciences, 2002, 144(1/2/3/4): 227-247.

[14] Puri M L, Ralescu D A. Differentials of fuzzy function [J]. J Math Anal Appl, 1983, 9 (1): 552-558.

[15] Puri M L, Ralescu D A. Fuzzy random variables [J]. J Math Anal Appl, 1986, 11 (4): 409-422.

[16] Ding Zuohua, Ma Ming, Kandel A. Existence of the solutions of fuzzy differential equation with parameters [J]. Information Sciences, 1999, 99(3/4): 205-217.

The Existence of Solution to Fuzzy Differential Equation with Initial Valued Problem

ZHANG Qian-hong[1], YANG Li-hui[2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Guizhou Key Laboratory of Economics System Simulation, Guizhou College of Finance and Economics, Guiyang Guizhou 550004, China;
2. Department of Mathematics, Hunan City University, Yiyang Hunan 413000, China)

Abstract: The existence of solution to fuzzy differential equation $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=F(t,u),\ u(t_0)=u_0\ (u_0\in E^n)$ is investigated by using theory of topological degree. It is shown that there is at least a solution to this equation under $F(t,u)$ satisfying some conditions.

Key words: fuzzy differential equation; initial value problem; topological degree

(责任编辑：曾剑锋)