第 36 卷 第 5 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 36 No.5
2012 年 9 月 Journal of Jiangxi Normal University (Natural Science) Sep. 2012

文章编号: 1000-5862(2012)05-0512-04

可消半模范畴中的完全可减内射分解

刘　兴, 黄福生*

(江西师范大学数学与信息科学学院, 江西　南昌　330022)

摘要: 利用内射模与内射维数的理论, 引进了可消半模上的完全可减内射分解和完全可减内射维数的概念, 并给出了 k -投射半模的等价刻画.

关键词: 可消半模; 完全可减内射分解; 完全可减内射维数
中图分类号: O 153.3　　文献标志码: A

0　预备知识

在同调代数理论中, 内射维数作为同调不变量在研究环的结构上已起到相当大的作用[1-10]. 然而, 在半模范畴中任意的半模不一定存在内射包, 这使得利用内射分解来刻画半模有一定的困难.

1996 年, M.Hall 和 S.Planskool 已证明可消半模范畴中每个左 R- 半模都能嵌入到一个内射左 R- 半模中. 于是本文将在可消半模范畴中引进完全可减内射分解和完全可减内射维数的概念, 并利用这些概念对半模进行了初步刻画, 这为利用维数研究半模结构提供了基本方法和相应结果. 同时本文还给出了可消半模范畴中 k- 投射半模的等价刻画.

本文用 R 表示含单位元的半环, 所有半模均指左 R- 半模, 所有同态均为左 R- 同态.其中半环与半模的定义与文献[1]中的定义一致, 用 ζ_R 表示环 R 上的所有可消半模组成的范畴, 用 ${}_R\mathfrak{M}$ 表示半环 R 上全体左 R- 半模所形成的范畴.下面给出一些本文要用到的相关概念和结论.

(i) 设 $\alpha: A\to B$ 是 R-半模同态, 记

$$\operatorname{Im}\alpha=\{b\in B \mid b+\alpha(a)=\alpha(a'),\exists a,a'\in A\},$$

$$\alpha(A)=\{\alpha(a) \mid a\in A\},\ker\alpha=\{a\in A \mid \alpha(a)=0\};$$

称 α 为 i- 正则的, 如果 $\alpha(A)=\operatorname{Im}\alpha$; 称 α 为 k- 正则的, 如果对 $a,a'\in A$, 满足 $\alpha(a)=\alpha(a')$ 一定 $\exists k$, $k'\in\ker\alpha$, 使得 $a+k=a'+k'$, 显然单同态一定为 k- 正则的.

(ii) 称同态列 $A\xrightarrow{\alpha}B\xrightarrow{\beta}C$ 为正合列, 如果 $\ker\beta=\operatorname{Im}\alpha$; 称同态列 $A\xrightarrow{\alpha}B\xrightarrow{\beta}C$ 为真正合列, 如果 $\ker\beta=\alpha(A)$.

(iii) 称左 R- 半模 M 的一个非空子集 N 是可减的当且仅当若 $n+n'\in N$, 其中 $n\in N$, 则有 $n'\in N,\forall n,n'\in M$.

(iv) 在左 R- 半模 M 中, 称 $m\in M$ 为可消的, 若 $m+m'=m+m'',m,m',m''\in M$, 则有 $m'=m''$. 称左 R- 半模 M 为可消的当且仅当 M 中每个元素可消.

定义1　称半模 ${}_RM$ 可嵌入一个内射半模, 若存在一个内射半模 E 和单同态 $\varphi: {}_RM\to {}_RE$.

定理1　每个可消半模 A 是 ζ_R- 内射模的子半模.

推论 1　在 ζ_R 中, 任意可消半模 M 都可嵌入某个完全可减内射半模 E.

1　完全可减内射分解

命题 1　设 R 为某一特定半环, 使 $\forall M\in {}_R\mathfrak{M}$, 都可以嵌入某个完全可减内射半模, 则 $\forall M$ 有真正合列

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{\varphi_0}E_0\xrightarrow{\varphi_1}E_1\xrightarrow{\varphi_2}\cdots\longrightarrow\cdots, \quad (1)$$

其中 E_j 是完全可减内射半模, $j=0,1,2,\cdots,n$.

证　$\forall M\in {}_R\mathfrak{M}$, 设其嵌入完全可减内射半模 E_0, 即存在真正合列 $0\longrightarrow M\xrightarrow{\varphi_0}E_0$. 记

$$C_0=E_0/\varphi_0(M).$$

收稿日期: 2012-03-10
基金项目: 国家自然科学基金(11261021)和江西师范大学 2011 年度“研究生创新基金”(YJS2011017)资助项目.
作者简介: 黄福生(1962-), 男, 江西抚州人, 教授, 主要从事半环和半模理论的研究.

又对于 C_0 可以嵌入完全可减内射半模 E_1，即 $i_1: C_0 \to E_1$ 是单同态.

记 $\pi: E_0 \to C_0$ 为自然满同态, $\varphi_1 = i_1\pi: E_0 \to E_1$，如图 1 所示.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\varphi_0"] & E_0 \arrow[rr, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E_1 \\
& & & C_0 \arrow[ur, "i_1"'] &
\end{tikzcd}$$

图 **1**　完全可减内射半模嵌入交换图

注意到 i_1 为单同态，有

$$\ker\varphi_1 = \{m \mid \varphi_1(m)=0\} = \{m \mid i_1\pi(m)=0\} =$$
$$\{m \mid \pi(m)=0\} = \{m \mid m/\varphi_0(M) = 0/\varphi_0(M)\} =$$
$$\{m \mid m+\varphi_0(m_1)=\varphi_0(m_2), m_1, m_2 \in M\} \supseteq \varphi_0(M).$$

又因为 E_0 是完全可减的 $\Rightarrow \ker\varphi_1 \subseteq \varphi_0(M)$，则 $\ker\varphi_1 = \varphi_0(M)$，即

$$0 \to M \xrightarrow{\varphi_0} E_0 \xrightarrow{\varphi_1} E_1$$

为真正合列. 依此类推得左 R- 半模真正合列(1).

推论 2　在 ζ_R 中，$\forall M \in \zeta_R$ 都可以嵌入某个完全可减内射半模，且有真正合列

$$0 \to M \xrightarrow{\varphi_0} E_0 \xrightarrow{\varphi_1} E_1 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \to \cdots,$$

其中 E_j 是完全可减内射半模，$j = 0,1,2,\cdots,n$.

定义 2　对 $M \in {}_R\mathfrak{M}$，若存在完全可减内射半模 E_j，$j = 0,1,2,\cdots,n,\cdots$，使(1)式为半模真正合列，其中 φ_j 是 k-正则的，$j = 0,1,2,\cdots,n,\cdots$，则称此真正合列为 M 的一个完全可减内射分解.

定义 3　设 $lpid(M) = \inf\Big\{n \,\Big|\, 0 \to M \xrightarrow{\varphi_0} E_0 \xrightarrow{\varphi_1} E_1 \to \cdots \xrightarrow{\varphi_n} E_n \to 0$ 为真正合列，E_j 是完全可减内射半模，φ_j 是 k-正则的，$j = 0,1,2,\cdots,n\Big\}$，称之为 M 的完全可减内射维数，当上述 n 不存在时，规定 $lpid(M) = \infty$. 记 $lpiD(R) = \sup\{lpid(M) \mid \forall M \in {}_R\mathfrak{M}\}$，称之为 R 的完全可减内射整体维数.

定理 2　设 R 为半环，$M \in {}_R\mathfrak{M}$，$n \geqslant 0$，则下述各条是等价的:

(i) M 有长为 n 的完全可减内射分解 $\{E_n, d_j\}$，满足

$$0 \to M \xrightarrow{d_0} E_0 \xrightarrow{d_1} E_1 \xrightarrow{d_2}$$
$$E_2 \to \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} E_{n-1} \xrightarrow{d_n} E_n \to 0;$$

(ii) 设 $\{E'_j, d'_j\}$ 为 M 的任一完全可减内射分解，则

$$d'_n(E'_{n-1}) \in Inj\,{}_R\mathfrak{M};$$

(iii) 设

$$0 \to M \xrightarrow{\bar{d}_0} \bar{E}_0 \xrightarrow{\bar{d}_1} \bar{E}_1 \xrightarrow{\bar{d}_2}$$
$$\bar{E}_2 \to \cdots \to \bar{E}_{n-1} \xrightarrow{\bar{d}_n} \bar{C}_{n-1} \to 0$$

为真正合列，$\bar{E}_j \in Inj\,{}_R\mathfrak{M}, j = 0,1,2,\cdots,n-1$，且 $\bar{d}_t (t = 0,1,\cdots,n)$ 为 k-正则的，则 $\bar{C}_{n-1} \in Inj\,{}_R\mathfrak{M}$；

(iv) $lpid(M) \leqslant n$.

证　(i) $\Leftrightarrow$ (ii) 由 $\{E'_j, d'_j\}$ 为 M 的任一完全可减内射分解，则有真正合列

$$0 \to M \xrightarrow{d'_0} E'_0 \xrightarrow{d'_1} E'_1 \to \cdots E'_{n-1} \xrightarrow{d'_n} E'_n \to \cdots.$$

由 $d'_n(E'_{n-1}) \subseteq E'_n$，则

$$0 \to M \xrightarrow{d'_0} E'_0 \xrightarrow{d'_1} E'_1 \to \cdots E'_{n-1} \xrightarrow{d'_n} d'_n(E'_{n-1}) \to 0$$

为真正合列.

又由

$$0 \to M \xrightarrow{d_0} E_0 \xrightarrow{d_1} E_1 \to \cdots \xrightarrow{d_{n-1}}$$
$$E_{n-1} \xrightarrow{d_n} E_n \to 0$$

为真正合列，且 $d_t (t = 0,1,2,\cdots,n)$ 为 k-正则的，由内射半模 Schanuel 引理的推广得

$$E_n \in Inj\,{}_R\mathfrak{M} \Leftrightarrow d'_n(E'_{n-1}) \in Inj\,{}_R\mathfrak{M}.$$

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) 由内射半模 Schanuel 引理的推广知, (i)与(iii)是等价的.

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) 由 $lpid(M)$ 的定义知, (i)与(iv)是等价的.

定理 3　设 R 为某半环，使 $\forall M \in {}_R\mathfrak{M}$ 都存在完全可减内射分解，则在 ${}_R\mathfrak{M}$ 中下述结论成立:

(i) $lpid(M) = 0 \Leftrightarrow M$ 是内射半模;

(ii) $lpid(M) \leqslant 1 \Leftrightarrow M$ 有形如 $0 \to M \xrightarrow{\varphi_0} E_0 \xrightarrow{\varphi_1} E_1 \to 0$ 的完全可减内射分解，其中 E_0, E_1 为内射半模，此时 $M \cong \ker\varphi_1$；

(iii) $lpiD(R) = 0 \Leftrightarrow$ 一切左 R-半模都是内射的;

(iv) $lpiD(R) \leqslant 1 \Leftrightarrow$ 对任何完全可减内射左 R-半模，及其任一子半模 N，则商半模 M/N 是内射的.

证　(i) $lpid(M) = 0 \Leftrightarrow M$ 有形如 $0 \to M \xrightarrow{\varphi} E_0 \to 0$ 的完全可减内射分解 $\Leftrightarrow \varphi$ 为同构，即 $M \cong E_0$，所以 M 是内射半模.

(ii) 前面的结论是显然的. 由 $0 \to M \xrightarrow{\varphi_0} E_0 \xrightarrow{\varphi_1} E_1 \to 0$ 是真正合列 $\Rightarrow \ker\varphi_1 = \varphi_0(M)$，而 φ_0 是 k-正则的 $\Rightarrow \varphi_0$ 是单同态. 所以 $\varphi_0: M \to \varphi_0(M)$ 为同构，故 $M \cong \varphi_0(M) \cong \ker\varphi_1$.

(iii) 由定义 3 知，$lpiD(R) = \sup\{lpid(M) \mid \forall M \in {}_R\mathfrak{M}\} = 0$，$\forall M$ 有 $lpid(M) = 0$. 故任意左 R-半模都

是内射半模.

(iv) 必要性　对任意内射左 R-半模 M 都有完全可减内射分解, 故存在完全可减内射半模 E_0, 有真正合列 $0\longrightarrow M\xrightarrow{\varphi_0}E_0$, 其中 φ_0 是单同态, 由条件 $E_0/\varphi_0(M)$ 是内射的.

考虑 $0\longrightarrow M\xrightarrow{\varphi_0}E_0\xrightarrow{\varphi_1}E_0/\varphi_0(M)\longrightarrow 0$, 其中 φ_1 为自然满同态, 则

$$\ker\varphi_1=\{m\,|\,\varphi_1(m)=0\}=\{m\,|\,m/\varphi_0(M)=0/\varphi_0(M)\}=$$
$$\{m\,|\,m+\varphi_0(m_1)=\varphi_0(m_2),m_1,m_2\in M\}\supseteq\varphi_0(M).$$

又因为 E_0 是完全可减的, 所以 $\varphi_0(M)$ 是 E_0 的可减子半模, 故 $\ker\varphi_1\subseteq\varphi_0(M)$, 从而 $\ker\varphi_1=\varphi_0(M)$, 此列是真正合列.

又 $\forall e_1,e_2\in E_0$, 由 $\varphi_1(e_1)=\varphi_1(e_2)\Rightarrow e_1/\varphi_0(M)=e_2/\varphi_0(M)\Rightarrow e_1+m_1=e_2+m_2$, 其中 $m_1,m_2\in\varphi_0(M)=\ker\varphi_1$, 则 φ_1 是 k-正则的. 于是 $\forall M$, 此列是完全可减内射分解, 且 $lpiD(R)\leqslant 1$.

充分性　$\forall M\in{}_R\mathfrak{M}$ 是完全可减内射半模, N 是 M 的子半模, 记 $i_1:N\to M$ 是嵌入同态, $\pi_1:M\to M/N$ 是自然满同态, 作同态列

$$0\longrightarrow N\xrightarrow{i_1}M\xrightarrow{\pi_1}M/N\longrightarrow 0,$$

则 $\ker\pi_1=\{m\,|\,\pi_1(m)=0\}=\{m\,|\,m/N=0/N\}=\{m\,|\,m+n_1=n_2,n_1,n_2\in N\}\supseteq N$, 由 N 是可减子半模 $\Rightarrow$ $\ker\pi_1\subseteq N$, 从而 $\ker\pi_1=N=i_1(N)$, 即得上列是真正合列.

由 i_1 是单同态 $\Rightarrow i_1$ 是 k-正则的. 又若 $\pi_1(m_1)=\pi_1(m_2)\Rightarrow m_1/N=m_2/N\Rightarrow m_1+a_1=m_2+a_2$, $a_1,a_2\in N=\ker\pi_1$, 故 π_1 是 k-正则的.

再由 $lpiD(R)\leqslant 1\Rightarrow lpid(N)\leqslant 1\Rightarrow N$ 存在一个完全可减内射分解

$$0\longrightarrow N\xrightarrow{i_2}E_0\xrightarrow{\pi_2}E_1\longrightarrow 0.$$

由内射半模的 Schanuel 引理知, $E_0\oplus M/N\cong E_1\oplus M$, 由 E_1 是内射半模可知, M/N 是内射半模.

2　*k*-投射半模的等价刻画

由图追踪法易得

命题 2　设 E_1,E_2 是左 R-半模, 有上下行是真正合列, 若有实箭头交换图 2(①为交换的), 且 i_2,π_2 是 k-正则的, 则必存在唯一的 $g\in\mathrm{Hom}_R(C_2,C_1)$ 使新图(包括虚箭头)为交换图.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_1"] & E_1 \arrow[r, "\pi_1"] & C_1 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_2"] \arrow[u, "I_M"] \arrow[ur, phantom, "①"] & E_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[u, "f"] \arrow[ur, phantom, "②"] & C_2 \arrow[r] \arrow[u, dashed, "g"] & 0
\end{tikzcd}$$

图 2　上下行真正合列交换图

定理 4　对任意半环 R, 在可消左 R-半模范畴 ζ_R 中有如下结果: P 为 k-投射半模的充分必要条件是对任意交换图 3, 必有 $\alpha\in\mathrm{Hom}_R(P,E)$ 使图 3 成交换图, 其中 E 为完全可减内射半模, β 为 k-正则的满同态.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "\alpha"'] \arrow[d, "\sigma"] & \\
E \arrow[r, two heads, "\beta"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 3　*k*-投射半模交换图

证　充分性　显然

必要性　即证对任意的行真正合的下图, 必有 $g\in\mathrm{Hom}_R(P,A)$ 使成交换图, 其中 i,π 均为 k-正则的.

$$\begin{tikzcd}
 & & & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "\pi"] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 4　行真正合图

事实上, 对半模 A, 由推论 1 知, 必存在完全可减内射半模 Q, 使得单同态 $\rho\in\mathrm{Hom}_R(A,Q)$. 考虑图 5,

$$\ker\tau=\{q\,|\,\tau(q)=0\}=\{q\,|\,q/\rho i(A')=0/\rho i(A')\}=$$
$$\{q\,|\,q+a_1=a_2,a_1,a_2\in\rho i(A')\}\supseteq\rho i(A'),$$

其中 τ 为自然满同态. 又 Q 是完全可减的 $\Rightarrow$ $\rho i(A')$ 是 Q 的可减子半模 $\Rightarrow\ker\tau\subseteq\rho i(A')$, 所以 $\ker\tau=\rho i(A')$, 则有实箭头所示的下行真正合交换图(见图 5).

又由

$$\tau(q_1)=\tau(q_2)\Rightarrow q_1/\rho i(A')=$$
$$q_2/\rho i(A')\Rightarrow q_1+a_1'=q_2+a_2',$$

其中 $a_1',a_2'\in\rho i(A')=\ker\tau$, 从而 τ 是 k-正则的.

由命题 2 知, 必有 $g_1\in\mathrm{Hom}_R(A'',Q/\rho i(A'))$ 使图 5 的右网孔为交换图, 即 $g_1\pi=\tau\rho$.

由 $g_1f\in\mathrm{Hom}_R(P,Q/\rho i(A'))$ 及 Q 为完全可减内射半模, 必有 $g_2\in\mathrm{Hom}_R(P,Q)$, 使 $\tau g_2=g_1f$. 由图

追踪知，$\forall p\in P$，

(i) 当 $g_2(p)=0$ 时，ρ 为单同态 $\Rightarrow \exists|a\in A$ 且 $a=0$ 使 $\rho(a)=g_2(p)=0$；

(ii) 当 $g_2(p)\neq 0$ 时，$\tau g_2=g_1 f\Rightarrow \tau g_2(p)=g_1 f(p)$. 由 $f(p)\in A''$ 及 π 满 $\Rightarrow \exists a_0\in A$, 使 $f(p)=\pi(a_0)$, 则 $\tau g_2(p)=g_1 f(p)=g_1\pi(a_0)=\tau\rho(a_0)$.

由 τ 为 k- 正则的 $\Rightarrow \exists t_1,t_2\in\ker\tau=\rho i(A')\subseteq\rho(A)$, 使得

$$g_2(p)+t_1=\rho(a_0)+t_2,$$

其中 $t_1,\rho(a_0)+t_2\in\rho(A)$. 由于 $\rho(A)$ 是 Q 的可减子半模，所以 $g_2(p)\in\rho(A)$.

又因为 ρ 为单同态 $\Rightarrow \exists|a\in A$ 使 $g_2(p)=\rho(a)$. 因此，令 $g:P\to A$ 使 $g(p)=a$，则 g 为完全确定的 $(g(0)=0)$ 左 R- 半模同态，且

$$\rho g(p)=\rho(a)=g_2(p),\forall p\in P,$$

即 $\rho g=g_2$. 由此得

$$g_1 f=\tau g_2=\tau\rho g=g_1\pi g .$$

由文献[11]可知，g_1 为单射，故 $f=\pi g$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] \arrow[ddl, dashed, "g_2"] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "I_{A'}"'] & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\rho"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "g_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\rho i"] & Q \arrow[r, "\tau"] & Q/\rho i(A') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 **5**　网孔交换图

3　参考文献

[1] Golan J S. The theory of semirings with applications in mathematics and theoretical computer science [M]. Exxes, England: Longman Scientific & Technical, 1999.

[2] 丰建文，黄福生，周永正. Ω内射模 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版, 2008, 32(3): 300-305.

[3] Al-Thani H M J. k-projective semimodules [J]. Kobe J Math, 1996, 13(1): 49-59.

[4] Hall M, Planskool S. Injectivity for cancellative semimodules [J]. Sea Bull Math, 1996, 20 (4): 85-93.

[5] 佟文廷. 同调代数引论 [M]. 北京：高等教育出版社, 1998.

[6] 江俊. 优半模的半单分解 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版, 2008, 32(4): 395-398.

[7] 黄福生，杨俊燕，余安安. P-内射半模 [J]. 南昌大学学报：理科版, 2011, 35(2): 111-114.

[8] 周梦. 拟内射模及其应用 [J]. 赣南师范学院学报，1991，6: 11-21.

[9] 王聪，黄福生. 拟内射半模与伪内射半模 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版, 2012, 36(2): 155-159.

[10] 曾慧平，黄福生，肖贤明. 非零 i-内射半模的存在性 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版, 2009, 33(4): 494-497.

[11] 敖忠平，蔡述平，宋海燕. 可消半模的五引理 [J]. 新疆师范大学学报：自然科学版, 2008, 27(2): 12-14.

The Completely Subtractive Injective Decomposition of Cancellative Semimodule

LIU Xing, HUANG Fu-sheng*

(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: The concepts of completely subtractive injective decomposition and completely subtractive injective dimension of cancellative semimodule are introduced in reference of the theory of injective modules and injective dimension. And the equivalent description of *k*-projective semimodule is also given.

Key words: cancellative semimodules; completely subtractive injective decomposition; completely subtractive injective dimension

(责任编辑：曾剑锋)