文章编号:1000-5862(2013)01-0006-03

圆对称函数的对数系数

叶中秋

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要: 运用构造一个非负函数和对复变函数模的积分进行估计的方法,对圆对称函数的对数系数 $|b_n|$ 进行了研究,得到估计 $|b_n| \leqslant An^{-1}\log(n+1)$, $n=1,2,\cdots$,这里 A 是一个绝对常数,指数 -1 是准确的.

关键词: 单叶函数; 圆对称函数; 对数系数

中图分类号: O 174.52　　**文献标志码:** A

0 引言

设 S 表示在单位圆 D 内解析且单叶的函数 $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ 所构成的函数族. 设 S^* 表示 S 中星像函数构成的子族,K 表示 S 中近于凸函数构成的子族. G 表示复平面上包含原点的区域. 称 G 是圆对称区域,如果对每个 $R \in (0,\infty)$,$G \cap \{|z| = R\}$ 或是空集,或是整个圆周 $\{|z| = R\}$,或是包含 $z = R$ 且关于实轴对称的圆周 $G \cap \{|z| = R\}$ 上的一段圆弧. 文献[1]中定义圆对称函数族 Y: 若 $f \in S$,$f(z)$ 将 D 映射为圆对称区域 G,则称 $f(z)$ 为圆对称函数,由圆对称函数所构成的函数族称圆对称函数族.

对 $f \in S$,用下面的公式定义函数的对数系数

$$\log(f(z)/z) = 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n. \qquad (1)$$

对数系数的估计在单叶函数的系数研究中有重要的意义. 柯北函数 $k(z) = z/(1-z)^2$ 的对数系数 $b_n = 1/n$. 不等式 $|b_n| \leqslant 1/n$ 对星像函数成立但对整个 S 族甚至就阶而言也不成立. 事实上存在函数 $f \in S$,其对数系数 $|b_n| = O(n^{-0.83})$[2].

对函数 $f \in S$,记 $\max\limits_{|z|=r}|f(z)| = M(r,f)$,$r<1$. N. A. Lebedev 在文献[3]中证明对 $f \in S$,对数系数成立不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{2n} \leqslant \frac{1}{2}\log M(r,f)/r.$$

I. M. Milin 在文献[4]中进一步猜测对函数 $f \in S$ 有如下不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{2n} \leqslant \frac{1}{2}\log M(r^2,f)/r^2, \qquad (2)$$

并且证明对 S^* 的函数(2)式的确是成立的. D. Girela 在文献[5]中证明对圆对称函数族 Y,(2)式成立. 对于每个单独的对数系数,叶中秋在文献[6]中证明,如果 $f \in K$,对数系数有如下不等式

$$|b_n| \leqslant A\log n/n, n = 2,3,\cdots,$$

这里 A 表示一个绝对常数. 文献[7]研究了圆对称函数的相邻系数问题. 文献[8-10]给出对数系数在研究单叶函数系数中的应用. 本文研究圆对称函数的对数系数,得到下面的定理.

定理1　设函数 $f \in Y$,对数系数由(1)式定义,则

$$|b_n| \leqslant A\log n/n, n = 2,3,\cdots$$

这里 A 表示一个绝对常数,n 的指数 -1 是准确的.

1 引理的证明

为了证明定理,首先给出下面的引理.

引理1　设函数 $f \in Y$,$|z|<1$,则

(i) $\operatorname{Im} zf'(z)/f(z) \geqslant 0$,$\operatorname{Im} z \geqslant 0$;

(ii) $\operatorname{Im} zf'(z)/f(z) \leqslant 0$,$\operatorname{Im} z \leqslant 0$.

收稿日期:2012-09-15

基金项目:国家自然科学基金(11261022)资助项目.

作者简介:叶中秋(1944-),男,江西九江人,教授,主要从事复变函数几何理论的研究.

引理 2　设函数 $f \in Y$，$|z| = r < 1$，则

$$I_1 = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{Im}\frac{zf'(z)}{f(z)}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant A_1\log\frac{1}{1-r} + A_2, \tag{3}$$

$$I_2 = \left|\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{Im}\frac{zf'(z)}{f(z)}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant A_1\log\frac{1}{1-r} + A_2, \tag{4}$$

这里 $A_1 = 6/\pi$，$A_2 = 2(7\log 2 + 4\pi)/\pi$.

证　记 $\frac{zf'(z)}{f(z)} = w(z)$，$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} = u(z)$ 和 $\operatorname{Im}\frac{zf'(z)}{f(z)} = v(z)$. 由 Cauchy-Riemann 条件，有

$$\frac{\partial w(z)}{\partial r} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v(z)}{\partial \theta} - \mathrm{i}\frac{\partial u(z)}{\partial \theta}\right).$$

对任意 $1/2 \leqslant r_0 < r < 1$ 和 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，成立如下等式

$$w(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) - w(r_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \int_{r_0}^{r}\frac{\partial w(z)}{\partial r}\mathrm{d}r = \frac{1}{r}\int_{r_0}^{r}\left(\frac{\partial v(z)}{\partial \theta} - \mathrm{i}\frac{\partial u(z)}{\partial \theta}\right)\mathrm{d}r. \tag{5}$$

从(5)式得到

$$I_1 \leqslant \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi} w(z)\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi} w(r_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta\right| + \frac{1}{\pi}\left|\int_{r_0}^{r}\frac{1}{r}\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial v(z)}{\partial \theta} - \mathrm{i}\frac{\partial u(z)}{\partial \theta}\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\right| = I_{11} + I_{12}. \tag{6}$$

现在分别估计(6)式右边的 2 个积分. 由单叶函数的偏差定理，置 $r_0 = 1/2$，可以得到

$$I_{11} \leqslant \max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} |w(r_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| \leqslant (1 + r_0)/(1 - r_0) = 3.$$

容易看出

$$I_{12} \leqslant \frac{1}{\pi}\left|\int_{r_0}^{r}\frac{1}{r}\left(v(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) - \mathrm{i}u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right)\Big|_0^{\pi}\mathrm{d}r\right| = \frac{1}{\pi}\left|\int_{r_0}^{r}\frac{1}{r}w(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\Big|_0^{\pi}\mathrm{d}r\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\left|\int_{r_0}^{r}\frac{1}{r}\left(w(-r) - w(r)\right)\mathrm{d}r\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\left(\left|\log f(-r)\right| + \left|\log f(r)\right|\right)\Big|_{r_0}^{r}. \tag{7}$$

由单叶函数的偏差定理，对任意 $1/2 \leqslant r_0 < r < 1$，

$$\left|\log f(z)\right| \leqslant \left|\log\frac{f(z)}{z}\right| + |\log z| \leqslant \left|\log\frac{f(z)}{z}\right| + \left|\arg\frac{f(z)}{z}\right| + |\log r| + 2\pi \leqslant \log\frac{1}{1-r} + \log\frac{1+r}{1-r} + \log\frac{1}{r} + 2\pi \leqslant 3\log\frac{1+r}{1-r} + 2\log 2 + 2\pi. \tag{8}$$

由(8)式，得到

$$|\log f(r_0)| \leqslant 5\log 2 + 2\pi.$$

因此

$$(7)\text{ 式的右边} \leqslant \frac{2}{\pi}\left(3\log\frac{1}{1-r} + 7\log 2 + 4\pi\right).$$

这就证明了(3)式，用完全同样的方法可以证明(4)式.

2　定理 1 的证明

仍然使用引理证明中的记号，显然有等式

$$w(z) = 2\mathrm{i}v(z) + \overline{w(z)}. \tag{9}$$

从(1)式可以得

$$w(z) = 1 + z\log(f(z)/z)' = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} nb_n z^n. \tag{10}$$

设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$0 < |z| = r < 1$，由(10)式有

$$2nb_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=r} w(z)z^{-n-1}\mathrm{d}z, n = 1, 2, \cdots, \tag{11}$$

因此，由(9)式和(11)式得到

$$2n|b_n|r^n = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\left(v(z) + 2\mathrm{i}\,\overline{w(z)}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} v(z)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} w(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta\right|. \tag{12}$$

显然(12)式右边的第 2 个积分等于 0. 由引理 1 和引理 2，

(12)式右边的第 1 个积分 $\leqslant$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|v(z)|\,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}|v(z)|\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi} v(z)\,\mathrm{d}\theta\right| + \frac{1}{\pi}\left|\int_{\pi}^{2\pi} v(z)\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant 2\left(A_1\log\frac{1}{1-r} + A_2\right). \tag{13}$$

令 $r = 1 - \frac{1}{n+1}$，$n = 1, 2, \cdots$，由(13)式得到

$$2|b_n|\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \leqslant 2(A_1\log(n+1) + A_2).$$

容易看到，存在一个绝对常数 A，使得

$$|b_n| \leqslant An^{-1}\log(n+1), n = 1, 2, 3, \cdots.$$

从柯北函数的对数系数 $b_n = 1/n$，可以看出定理 1 中 n 的指数 -1 是不能改进的. 这样就完成了定理 1 的证明.

3 参考文献

[1] Jenkins J A. On circularly symmetric functions [J]. Proc Amer Math Soc,1955,6(4):620-624.

[2] Duren P L. Univalent functions [M]. New York: Springer-Verlag,1983:242.

[3] Lebedev N A. Applications of the area principle to problems on nonoverlapping domains [J]. Trudy Mat Inst Steklov,1961,60:211-231.

[4] Milin I M. On a property of the logarithmic coefficients of univalent functions,in: metric questions in theory of functions [J]. Naukova Dumka Kiev,1980,86:90.

[5] Girela D. Logarithmic coefficients of univalent functions [J]. Annal Acad Sci Fen Math,2000,25(2):337-350.

[6] Ye Zhongqiu. The logarithmic coefficients of close-to-convex functions [J]. Bulletin the Institute of Math Acad Sinica,2008,3(3):445-452.

[7] 宁菊红,叶中秋. 圆对称函数的相邻系数 [J]. 数学研究,2005,38(3):286-291.

[8] 叶中秋,宁菊红. 具有两个增长方向的单叶函数的相邻系数 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2002,26(3):208-210.

[9] 叶中秋,徐庆华. 一类单叶函数系数的 Goluzin 问题 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2002,26(4):333-335.

[10] 宁菊红,叶中秋. 具有 $m(m\geqslant 3)$ 个增长方向的单叶函数的相邻系数 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2003,27(1):42-44.

The Logarithmic Coefficients of Circularly Symmetric Functions

YE Zhong-qiu

(College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: A non-negative function and estimate the integration of model of a complex function have been constructed. The logarithmic coefficients $|b_n|$ of circularly symmetric functions is discussed by this method. The estimate $|b_n|\leqslant An^{-1}\log(n+1)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ is given,where A is an absolute constants,and the exponent -1 is sharp.

Key words: univalent functions; circularly symmetric functions; logarithmic coefficient

(责任编辑:王金莲)