

文章编号: 1000-5862(2013)02-0199-07

3 次 Hermite 曲线逼近 Conic 曲线段有关性质

徐少平, 刘小平, 李春泉, 胡凌燕, 杨晓辉

(南昌大学信息工程学院 江西 南昌 330031)

摘要: 利用 Hermite 多项式逼近法研究使用 3 次 Hermite 曲线逼近有理 Conic 曲线段的方法, 推导 3 次 Hermite 曲线与 Conic 曲线段在端点处具有 G^2 连续性、在中点具有 G^1 连续性、保形几何属性需要满足的条件以及误差函数计算公式, 通过多组不同类型的对比试验进一步证明了所述的关于用 3 次 Hermite 曲线逼近 Conic 曲线段有关性质的有效性.

关键词: 数值分析; Conic 曲线段; Hermite 曲线; 逼近; 保形

中图分类号: TP 391.9 **文献标志码:** A

逼近 Conic 曲线段有关性质的有效性.

0 引言

Conic 曲线段是一种用 2 次有理多项式(Rational Spline)形式表达的常见参数曲线, 对于有理多项式表示的曲线来说, 求交计算和计算曲线上点并不是非常高效, 所以虽然 Conic 曲线段常用来建立曲线和曲面模型, 仍然有必要研究使用多项式形式(Polynomial Spline)表示的曲线逼近使用有理多项式表示的曲线的问题^[1-3], 这不仅是因这 2 种表示参数曲线的方法各自有着独有的特性和优势, 也是因为不同曲线设计系统之间经常需要交换数据.

3 次 Hermite 曲线(又称 Ferguson 曲线)是工程上常用的曲线类型, 它的系数矩阵是由端点位置和端点的切向量构成的, 具有非常好的几何设计特性. M. S. Floter 在 1997 年提出使用多项式曲线逼近有理多项式, 但他的研究重点在使用奇数次多项式曲线逼近有理多项式通用性质方面, 并没有就具体次数、具体类型的多项式样条曲线逼近 Conic 曲线段等一些细节问题予以讨论^[4-6]. 本文对用 3 次 Hermite 曲线逼近 Conic 曲线段的问题进行详细地讨论, 推导出在端点处具有 G^2 连续性、在中点具有 G^1 连续性和保形几何属性需要满足的条件, 并给出了误差函数的计算公式, 最后通过多组不同参数组合的对比试验进一步证明了关于用 3 次 Hermite 曲线

1 Conic 曲线段和 Hermite 曲线

定义 1 Conic 曲线段的一般定义形式为

$$r(t) = \frac{w_0 B_0(t) p_0 + w_1 B_1(t) p_1 + w_2 B_2(t) p_2}{w_0 B_0(t) + w_1 B_1(t) + w_2 B_2(t)}, \quad (1)$$

其中 p_0, p_1, p_2 是控制点, w_0, w_1, w_2 为各个控制点的权重, 其值均大于 0, $B_0(t) = (1-t)^2, B_1(t) = 2t(1-t), B_2(t) = t^2$ 为 2 次 Bezier 曲线的基函数.

定义 2 将(1)式所表示的有理 2 次曲线通过改变权重系数和重新参数化可转换为标准形式的有理曲线:

$$r(t) = \frac{B_0(t) p_0 + w B_1(t) p_1 + B_2(t) p_2}{B_0(t) + w B_1(t) + B_2(t)}, \quad (2)$$

其中当 $w < 1$ 时表示椭圆, 当 $w = 1$ 时表示抛物线, 当 $w > 1$ 时表示双曲线. w 是曲线性质决定因素.

定义 3 3 次 Hermite 曲线 $H(t)$ 可以表示为

$$H(t) = [H_1(t) \ H_2(t) \ H_3(t) \ H_4(t)] [H(0) \ H(1) \ H'(0) \ H'(1)], \quad t \in [0, 1], \quad (3)$$

其中 $[H_1(t) \ H_2(t) \ H_3(t) \ H_4(t)]$ 是由基函数组成的矩阵, 矩阵元素具体的定义如下:

$$H_1(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1 \quad H_2(t) = -2t^3 + 3t^2, \\ H_3(t) = t^3 - 2t^2 + t \quad H_4(t) = t^3 - t^2.$$

$[H(0) \ H(1) \ H'(0) \ H'(1)]$ 是系数矩阵, 矩阵元

收稿日期: 2012-11-16

基金项目: 国家自然科学基金(61163023), 江西省自然科学基金(20114BAB211024) 和江西省教改课题(JXJG12124) 资助项目.

作者简介: 徐少平(1976-), 男, 江西九江人, 副教授, 博士, 主要从事图形图像处理技术、机器视觉、虚拟手术仿真等方面的研究.

素 $H(0)$, $H(1)$ 分别为 Hermite 曲线在起点和终点位置的坐标, 矩阵元素 $H'(0)$, $H'(1)$ 分别是 Hermite 曲线在起点和终点位置的切矢量坐标.

2 用 3 次 Hermite 曲线逼近 Conic 曲线段

2.1 在端点处具有 G^2 连续性

由于 3 次 Hermite 曲线的系数矩阵的构成条件就是起终点位置和切矢量, 所以用 Hermite 逼近 Conic 曲线段在端点处具有 G^1 连续的条件^[7] 分别为

$$H(0) = r(0) \quad H'(0) = \alpha_0 r'(0), \quad (4)$$

$$H(1) = r(1) \quad H'(1) = \alpha_1 r'(1). \quad (5)$$

如果在端点处具有 G^2 连续的条件还需要满足以下条件

$$H''(0) = \alpha_0^2 r''(0) + \beta_0 r'(0), \quad (6)$$

$$H''(1) = \alpha_1^2 r''(1) + \beta_1 r'(1), \quad (7)$$

其中 $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ 均为比例系数, $t=0, t=1$ 分别表示参数曲线的起终点, 即端点.

定理 1 用 3 次 Hermite 曲线逼近 Conic 曲线段在端点处具有 G^2 连续性需要满足以下条件

$$\alpha_0^2 + \alpha_0 \alpha_1 + \alpha_1^2 = 3, \quad (8)$$

其中系数 α_0, α_1 的定义与 (4) 式、(5) 式相同.

证 根据定义 2, 当 $t=0, t=1$ 时 Conic 曲线段在端点处的坐标、切矢量的坐标、曲率分别为

$$r(0) = p_0 \quad r(1) = p_2, \quad (9)$$

$$r'(0) = 2w(p_1 - p_0) \quad r'(1) = 2w(p_2 - p_1), \quad (10)$$

$$r''(0) = (4w - 8w^2)(p_1 - p_0) + 2(p_2 - p_0),$$

$$r''(1) = (-4w + 8w^2)(p_2 - p_1) - 2(p_2 - p_0). \quad (11)$$

根据定义 3 将 (3) 式关于 t 求 2 阶导得

$$H''(t) = [12t - 6, -12t + 6, 6t - 4, 6t - 2] [p_0, p_2, \alpha_0 \cdot 2w(p_1 - p_0), \alpha_1 \cdot 2w(p_2 - p_1)]. \quad (12)$$

将 $t=0, t=1$ 代入 (12) 式可以得到 Hermite 曲线在端点处的 2 阶导数为

$$H''(0) = -6p_0 + 6p_2 - 8\alpha_0 w(p_1 - p_0) - 4\alpha_1 w(p_2 - p_1), \quad (13)$$

$$H''(1) = 6p_0 - 6p_2 + 4\alpha_0 w(p_1 - p_0) + 8\alpha_1 w(p_2 - p_1). \quad (14)$$

将 (9) ~ (11) 式对应项代入 (6) 式和 (7) 式也可以得到 Hermite 曲线在端点处的 2 阶导数为

$$H''(0) = \alpha_0^2 [(4w - 8w^2)(p_1 - p_0) + 2(p_2 - p_0)] +$$

$$\beta_0 \cdot 2w(p_1 - p_0), \quad (15)$$

$$H''(1) = \alpha_1^2 [(-4w + 8w^2)(p_2 - p_1) - 2(p_2 - p_0)] + \beta_1 \cdot 2w(p_2 - p_1). \quad (16)$$

因为 $(p_2 - p_0)(p_1 - p_0) = (p_2 - p_1)(p_1 - p_0) = (p_2 - p_1)(p_2 - p_0)$, 所以 (13) 式与 (15) 式联立后化简得

$$3 - 2\alpha_1 w = \alpha_0^2. \quad (17)$$

同理, 将 (14) 式与 (16) 式联立后化简得

$$3 + 2\alpha_0 w = \alpha_1^2. \quad (18)$$

将 (17) 式与 (18) 式联立, 进一步化简为

$$3(\alpha_1 + \alpha_0) = \alpha_0^3 + \alpha_1^3, \quad (19)$$

消去 (19) 式中的因子 $(\alpha_1 + \alpha_0)$, 定理 1 得证.

也就是说采用 3 次 Hermite 曲线逼近 Conic 曲线段在端点处的具有 G^2 连续性需要满足 (8) 式条件即可, 可以看出它与 Conic 曲线段的类型决定因素 w 没有任何关系, 而只与比例系数 α_0, α_1 有关.

2.2 中点重合条件

曲线的中点又称为肩点, 它是曲线上一个重要的位置^[7-8].

定理 2 用 3 次 Hermite 曲线逼近 Conic 曲线段在中点重合时应该满足的条件为

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 2/(1+w), \quad (20)$$

其中系数 α_0, α_1 的定义与 (4) 式、(5) 式相同, w 的定义与 (2) 式相同.

证 将 $t=1/2$ 代入 (2) 式得

$$r(1/2) = \frac{1}{2(1+w)}p_0 + \frac{w}{(1+w)}p_1 + \frac{1}{2(1+w)}p_2. \quad (21)$$

将 $t=1/2$ 代入 (3) 式得

$$H(1/2) = \frac{1}{2}p_0 + \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{4}\alpha_0 w(p_1 - p_0) - \frac{1}{4}\alpha_1 w(p_2 - p_1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha_0 w\right)p_0 + \left(\frac{1}{4}\alpha_0 w + \frac{1}{4}\alpha_1 w\right)p_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha_1 w\right)p_2. \quad (22)$$

联立 (21) 式和 (22) 式化简得 (20) 式.

定理 2 得证.

从 (20) 式中可以看成 $\alpha_0 = \alpha_1$ 的取值与 Conic 曲线段的类型决定因素 w 相关.

2.3 中点 G^1 连续性条件

定理 3 用 3 次 Hermite 曲线逼近 Conic 曲线段在中点具有 G^1 连续应该满足 (20) 式.

证 在中点具有 G^1 连续的条件除了要求中点处重合外还需要满足公式:

$$r'(1/2) \cdot H'(1/2) = 0. \quad (23)$$

将 (2) 式对 t 求导得

$$r'(t) = \left(\frac{B_0(t)p_0 + wB_1(t)p_1 + B_2(t)p_2}{B_0(t) + wB_1(t) + B_2(t)} \right)',$$

将 $t = 1/2$ 代入上式并化简得

$$r'(1/2) = p_2 - p_0. \quad (24)$$

将 (3) 式对 t 求导并将 $t = 1/2$ 代入得

$$H'(1/2) = \frac{3}{2}(p_2 - p_0) - \frac{1}{2}\alpha_0 w(p_1 - p_0) - \frac{1}{2}\alpha_1 w(p_2 - p_1). \quad (25)$$

将 (24) 式和 (25) 式代入 (23) 式并化简得

$$\frac{1}{2}\alpha_0 w - \frac{1}{2}\alpha_1 w = 0. \quad (26)$$

由 (20) 式和 (26) 式可知, 当 $\alpha_0 = \alpha_1 = 2/(1 + w)$ 时, 在中点处具有 G^1 连续性.

2.4 保形条件

定理 4 用 3 次 Hermite 曲线逼近 Conic 曲线段要具有保形性质需要满足条件为 $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, 其中系数 α_0, α_1 的定义与 (4) 式、(5) 式相同, w 的定义与 (2) 式相同

证 保形的条件为

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dH(t)}{dt} \times (p_2 - p_0) &= 0, \\ H(1/2) &= r(1/2). \end{aligned} \right. \quad (27)$$

$$H(1/2) = r(1/2). \quad (28)$$

(27) 式展开化简为

$$(6t^2 - 6t)p_0 + (-6t^2 + 6t)p_2 + (3t^2 - 4t + 1) \cdot \alpha_0 \cdot 2w(p_1 - p_0) + (3t^2 - 2t)\alpha_1 \cdot 2w(p_2 - p_1) - (3t^2 - 4t + 1)\alpha_0 + (3t^2 - 2t)\alpha_1 = 0. \quad (29)$$

将 (29) 式联立 (20) 式得 $t = 1/2$. 也就是说, 当 $t = 1/2$ 时 $H(t)$ 导数为 0, 所以使用 Hermite 曲线逼近 Conic 曲线段具有保形的特性.

如果要同时具有保形和在端点位置具有 G^2 连续性, 那么 (8) 式和 (28) 式需要联立解方程, 得到 $\alpha_0 = \alpha_1 = 1, w = 1$ 这一组特解, 即当 Conic 曲线段是抛物线时才成立. 一般地, 使用 3 次 Hermite 曲线逼近 Conic 曲线段不能同时保证在端点具有 G^2 连续性和在中点具有 G^1 连续性.

3 逼近的误差及其分析

3.1 误差计算公式

定理 5 使用 3 次 Hermite 曲线逼近 Conic 曲线段, Hermite 曲线可以写成为

$$H(t) = K_0(t)p_0 + K_1(t)p_1 + K_2(t)p_2, \quad (30)$$

其中 $K_0(t) = (H_1(t) - H_3(t)\alpha_0 \cdot 2w)$, $K_1(t) = (H_3(t)\alpha_0 \cdot 2w - H_4(t)\alpha_1 \cdot 2w)$, $K_2(t) = (H_2(t) +$

$$H_4(t)\alpha_1 \cdot 2w).$$

证 将 (4) 式和 (5) 式代入 (3) 式得

$$H(t) = [H_1(t), H_2(t), H_3(t), H_4(t)] [p_0, p_2, \alpha_0 \cdot 2w(p_1 - p_0), \alpha_1 \cdot 2w(p_2 - p_1)],$$

将其化简得函数和控制点乘积形式为

$$H(t) = (H_1(t) - H_3(t)\alpha_0 \cdot 2w)p_0 + (H_3(t)\alpha_0 \cdot 2w - H_4(t)\alpha_1 \cdot 2w)p_1 + (H_2(t) + H_4(t)\alpha_1 \cdot 2w)p_2.$$

定理 5 得证.

由于 3 次 Hermite 曲线可以写成 (30) 式的形式, 3 次 Hermite 曲线逼近 Conic 曲线段的误差函数^[9]可由下式计算:

$$d_H(H, r) \leq \frac{1}{4} \max \left(\frac{1}{w^2}, 1 \right).$$

$$\max_{t \in [0, 1]} |f(H(t))| |p_0 - 2p_1 + p_2|, \quad 0 < w \leq 3, \quad (31)$$

其中 $f(H(t)) = K_1^2(t) - 4w^2 K_0(t) K_2(t)$, $f(H(t))$ 函数是用来计算 Hermite 曲线上某点用重心坐标表示时的误差值, $d_H(H, r)$ 为 Hermite 曲线 $H(t)$ 与 Conic 曲线 $r(t)$ 之间的 Hausdorff 距离, 其值大小直接反映逼近效果. 在具体应用过程中, 可以预先设置误差上限的阈值, 通过计算 (31) 式, 如果发现待逼近的 Conic 曲线段超过了阈值, 可以先将其细分后再用 3 次 Hermite 曲线逼近.

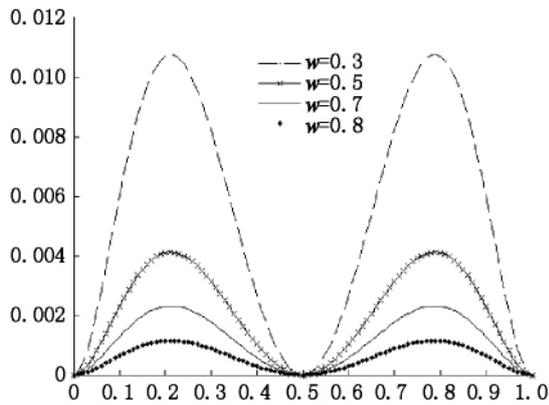
3.2 误差函数分析

根据 (31) 式可知, 使用 3 次 Hermite 曲线逼近 Conic 曲线段的误差范围主要取决于 $f(H(t))$ 部分的函数值, 而该部分如将公式直接展开将是 1 个最高次数为 6 的复杂多项式, 要取它的最大值需要对这个多项式求导并求零值点, 然后再筛选出极值点. 这种方法求取比较复杂, 本文所采用的方法是直接使用数值计算的方法^[10-11], 将 $f(H(t))$ 作为定义在 $t \in [0, 1]$ 上的函数, 并将该函数的图形详细绘制出来后再分析. 具体地, 在 $f(H(t))$ 函数中将按照 w 与 α_0, α_1 是否相关对参数 w, α_0, α_1 分为 2 种情况考虑.

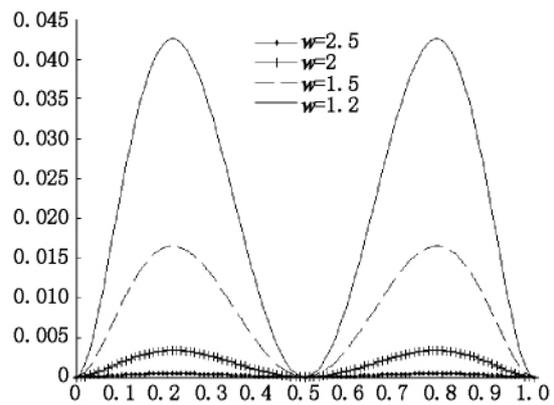
试验 1 设 $\alpha_0 = \alpha_1 = 2/(1 + w)$, 即与 w 相关, 让 w 取值变换, 所绘制的图形如图 1 所示. 误差值在 $t = 0.5$ 处取得最小值, 这是因为根据 (20) 式 Hermite 逼近 Conic 曲线段的时候在 $t = 0.5$ 处的点重合所致; 误差值在 $t \approx 0.2, t \approx 0.8$ 处取得最大值, 误差上限的数量级为 10^{-2} . 另外, 从图 1 中可以看出当 $w > 1$ 时误差值的整体幅度随 w 值的增大而增大, 误差数量级为 10^{-2} ; 但当 $w = 1$ 时是一个非常特殊的临界点, 这时 $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, 误差值恒等于 0. 实际

上,只有 w 的取值在 1 附近且 $\alpha_0 = \alpha_1 = 2/(1+w)$ 时,逼近效果非常好,一般误差上限的数量级为

10^{-4} .当 $w < 1$ 时又开始有误差值,并且随着 w 值的减少而变大,误差数量级为 10^{-2} .



(a) $w < 1$ $\alpha_0 = \alpha_1 = 2/(1+w)$

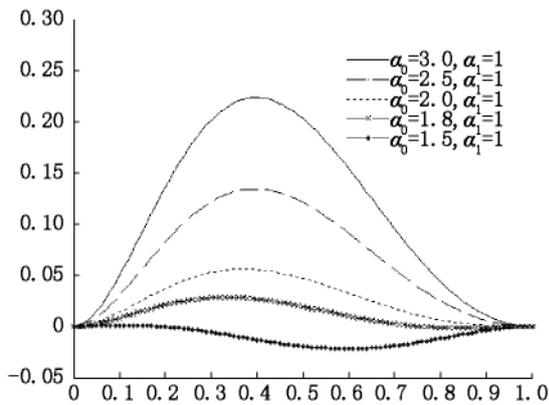


(b) $w > 1$ $\alpha_0 = \alpha_1 = 2/(1+w)$

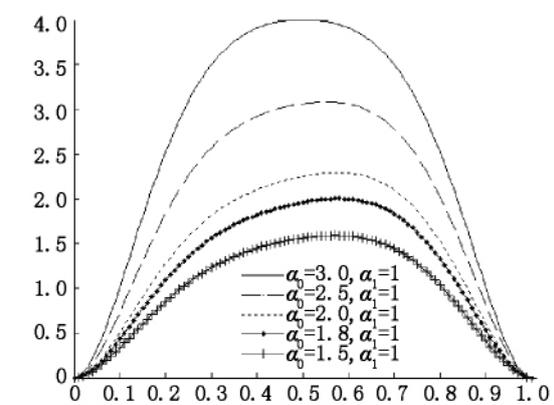
图1 α_0, α_1 与 w 相关

试验2 设 w 值不与 α_0, α_1 值相关.绘制的图形如图2所示.从图2可以看出除了端点处以外,误差曲线没有取零值的地方,也就是说 Hermite 曲线与 Conic 曲线段没有共同的交点.当 $w > 1$ 时, α_0/α_1 值越大,误差曲线函数值越大,逼近效果越差;当

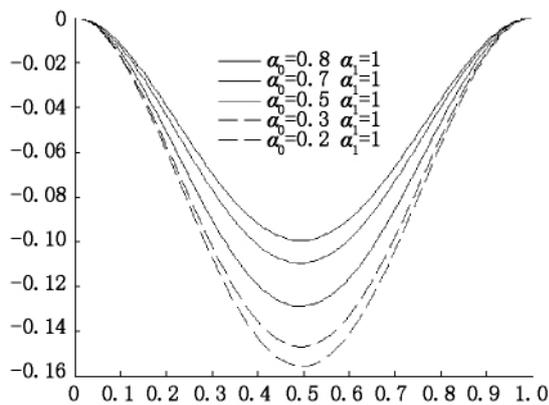
$w < 1$ 时, α_0/α_1 值如果大于 1,其值越大,误差曲线函数值越大,逼近效果越差;当 $w < 1$ 时, α_0/α_1 值如果小于 1,其值越小,误差曲线函数值越大,逼近效果越差.



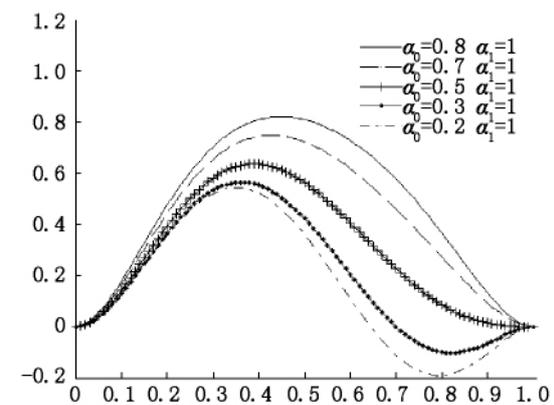
(a) $w = 0.5$ $\alpha_0/\alpha_1 > 1$ 的误差函数曲线



(b) $w = 2$ $\alpha_0/\alpha_1 > 1$ 的误差函数曲线



(c) $w = 0.5$ $\alpha_0/\alpha_1 < 1$ 的误差函数曲线



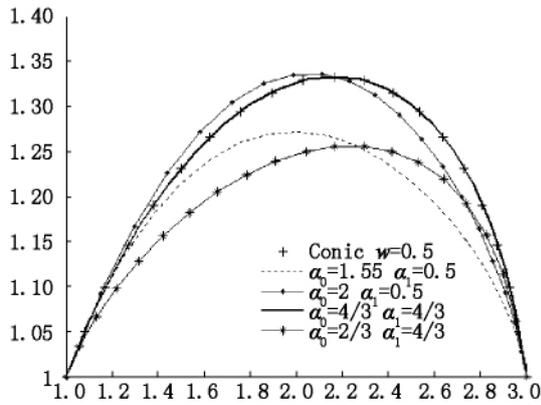
(d) $w = 2$ $\alpha_0/\alpha_1 < 1$ 的误差函数曲线

图2 α_0, α_1 与 w 无关

4 试验数据及其分析

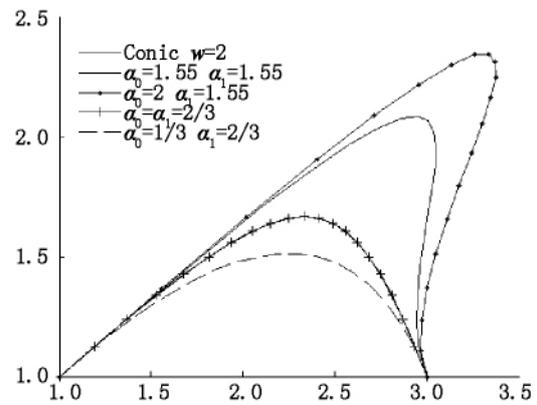
为了比较 3 次 Hermite 曲线逼近 Conic 曲线段的整体效果, 按照 w 的取值把试验分成 3 组完成^[12] (所有的试验的控制点均为 $p_0 = (1, 1)$, $p_1 = (2.5, 2)$, $p_2 = (2, 1)$).

A 组 设定 $w=0.5$, α_0, α_1 可变, 绘制的图形如图 3(a) 所示. 可以看出图中参数是 $\alpha_0 = 1.55, \alpha_1 =$



(a) $w=0.5$

0.5 的 Hermite 逼近曲线具有 G^2 连续性, 但其与 Conic 曲线段存在较大的误差, $\alpha_0 \neq \alpha_1$ 且 $\alpha_0/\alpha_1 > 1$, 这一点也可以从图 2 中得到映证; 当 $\alpha_0 = \alpha_1 = 2/(1+w) = 4/3$ 时绘制的 Hermite 逼近曲线与 Conic 曲线段在中点处具有 G^1 连续性, 逼近效果较好, 图中其它曲线反映了 α_0/α_1 值越大误差也越大的这种特点.



(b) $w=2$

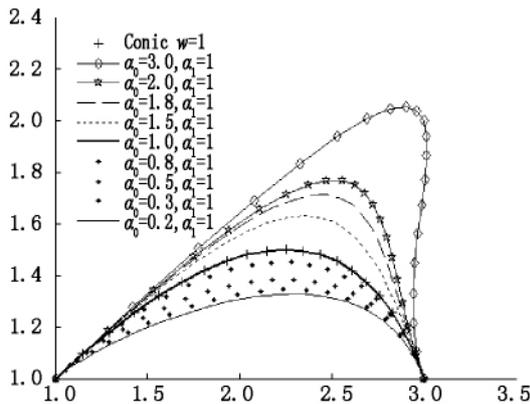
图 3 G^2, G^1 Hermite 逼近曲线

B 组 设定 $w=2$ 绘制的图形如图 3(b) 所示. 它的基本情况和当 $w=0.5$ 时类似, 但由于 w 值较大, Hermite 逼近曲线的误差较大; 可以看出图中参数是 $\alpha_0 = 1.55, \alpha_1 = 0.5$ 的 Hermite 逼近曲线具有 G^2 连续性, 但与其原 Conic 曲线段存在较大的误差; 当 $\alpha_0 = \alpha_1 = 2/3$ 时绘制的 Hermite 逼近曲线与 Conic 曲线段逼近效果较好, 并且 Hermite 逼近曲线在 $t = 0.5$ 时与 Conic 曲线段重合. 其它情况的曲线反映了 α_0/α_1 值越大误差也越大的情况.

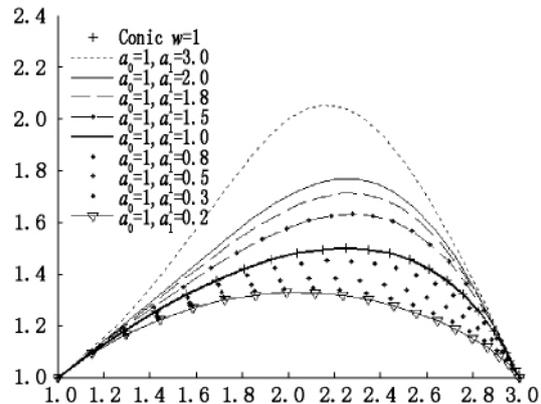
C 组 设定 $w=1$. 绘制的图形如图 4 所示. 其中当 $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ 时是非常特殊的取值情况, 因为满

足这组取值的 Hermite 逼近曲线将能与 Conic 曲线段在端点处具有 G^2 连续性和在中点具有 G^1 连续性; 另外, 当 $\alpha_0 \neq \alpha_1$ 时, Hermite 逼近曲线与 Conic 曲线段将有非常大的误差, 比值 $\alpha_0/\alpha_1 > 1$ 逼近曲线在 Conic 曲线段外部, $\alpha_0/\alpha_1 < 1$ 在 Conic 曲线段内部.

特殊地, 利用 3 次 Hermite 曲线逼近 $1/4$ 圆^[13-14] 的效果和误差如图 5 所示, Conic 曲线段的控制点为 $p_0 = (0, 1)$, $p_1 = (1, 1)$, $p_2 = (1, 0)$, $w = \sqrt{2}/2$, $\alpha_0 = \alpha_1 = 2/(1 + \sqrt{2}/2)$. 从图中可以看出逼近效果非常好, 最大的误差上限值仅为 5.4×10^{-4} .

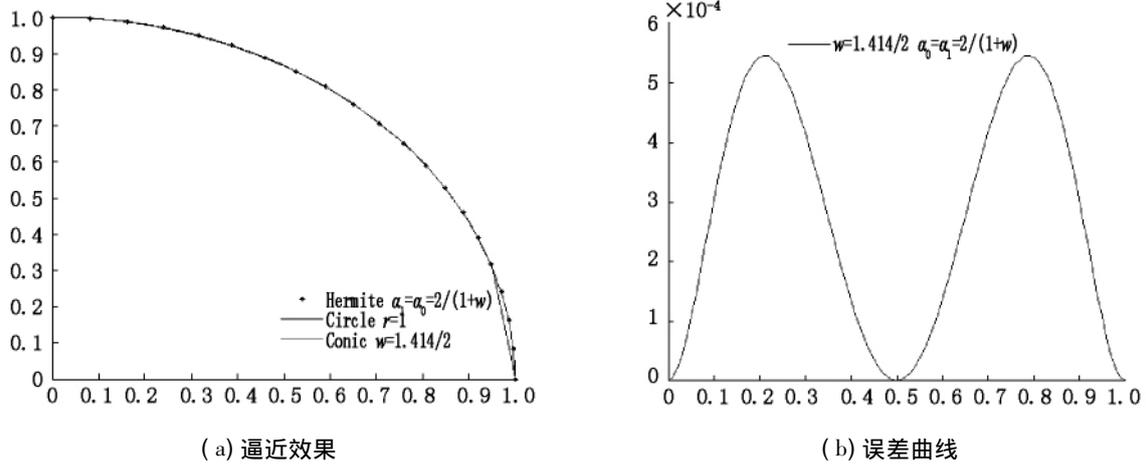


(c) $\alpha_0 = x, \alpha_1 = 1$



(d) $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = x$

图 4 当 $w=1$ 时 Hermite 曲线逼近效果

图5 Hermite 曲线逼近 $1/4$ 单位圆

5 结束语

主要讨论了利用常见 3 次 Hermite 曲线这种特定类型的曲线逼近 Conic 曲线段,并推导了在端点具有 G^2 连续性、中点具有 G^1 连续性、保形性 3 种几何条件性质需要满足的条件. 本文的结论可以直接扩展到曲面的情况,采用本文讨论问题的方法还可以推广到用更高阶的 Hermite 曲线逼近 Conic 曲线段情况,在用高阶 Hermite 曲线逼近中,由于阶数升高,将能在端点处、中点处和保形方面取得更高的几何连续性的结论,但计算复杂度将大大增加.

6 参考文献

- [1] 孙家广,胡事民. 计算机图形学基础教程 [M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2011.
- [2] 曾芳玲,陈效群,冯玉瑜. 二次曲线的多项式逼近 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2003, 15(5): 547-541.
- [3] 董辰世,陈志扬,汪国昭,等. 曲面交线的 B 样条优化逼近 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2004, 16(4): 450-453.
- [4] 王小林,秦东晨,饶芳,等. 四次 Hermite 曲线的构造及其特性 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 17(8): 1700-1703.
- [5] Floater M S. High order approximation of Conic sections by quadratic splines [J]. Computer-Aided Geometric Design, 1995, 12(6): 617-637.
- [6] Floater M S. An $O(h^{2n})$ Hermite approximation for Conic sections [J]. Computer Aided Geometric Design, 1997, 14(2): 135-151.
- [7] Lian Fang. A rational quartic Bezier representation for Conics [J]. Computer Aided Geometric Design, 2002, 19(2): 297-312.
- [8] 喻德生,师晶,曾接贤. 一类 3 次代数曲线的光滑拼接及保凸性 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2010, 34(2): 128-132.
- [9] Ahn Y J, Kim Y S, Shin Y S. Approximation of circular arcs and offset curves by Bezier curves of high degree [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2004, 167(2): 405-416.
- [10] 侯超钧,曾艳姝,吴东庆,等. 全局连续的分段最小二乘曲线拟合方法 [J]. 重庆师范大学学报: 自然科学版, 2011, 28(6): 44-48.
- [11] 蔡山,张浩,陈洪辉,等. 基于最小二乘法分段三次曲线拟合方法研究 [J]. 科学技术与工程, 2007, 7(3): 352-355.
- [12] Lian Fang. Circular arc approximation by quintic polynomial curves [J]. Computer-Aided Geometric Design, 1998, 15(8): 843-861.
- [13] Samuel R Buss. 3D Computer graphics: a mathematical introduction with OpenGL [M]. London: Cambridge University Press, 2002.
- [14] Patrikalakis N M. Approximate conversion of rational splines [J]. Computer Aided Geometric Design, 1989, 6(2): 485-233.

Relevant Properties of Approximation to Conic Sections with Cubic Hermite Curves

XU Shao-ping, LIU Xiao-ping, LI Chun-quan, HU Ling-yan, YANG Xiao-hui

(School of Information Engineering, Nanchang University, Nanchang Jiangxi 330031, China)

Abstract: By the Hermite polynomials method, an approach to approximate Conic sections in the form of a rational Bezier curve with Hermite polynomial curves is studied. The property condition of constructed Hermite polynomial curve such as G^2 -continuity with the Conic section at the end points and G^1 -continuity at the parametric mid-point and shape-preserving has been proposed. Explicit error bound is also derived and discussed. The validity of the proposed method for approximating Conic sections with Hermite polynomial curves is further proved through multiples sets of different types of comparative tests.

Key words: numerical analysis; Conic sections; Hermite curves; approximation; shape preserving

(责任编辑: 曾剑锋)

(上接第 178 页)

- [9] 杨丕文. 复 Clifford 分析中的正则向量函数 [J]. 宁夏大学学报: 自然科学版, 1998, 19(1): 67-68.
- [10] 黄沙. Clifford 分析中双正则函数的非线性边值问题 [J]. 中国科学: A 辑, 1996, 26(3): 227-236.
- [11] 李觉友, 杨丕文. Clifford 分析中一类广义正则函数的非线性边值问题 [J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2006, 29(1): 30-33.
- [12] 黄沙. Clifford 分析中一个带位移的非线性边值问题 [J]. 系统科学与数学, 1991, 11(4): 336-345.
- [13] 许娜, 乔玉英. Clifford 分析中无界域上正则函数带 Haseman 位移的边值问题 [J]. 数学物理学报, 2008, 28A(5): 846-855.

The Boundary Value Problem with Haseman Shift for k -Regular Functions on Unbounded Domains in Clifford Analysis

FANG Yan-bing, HAN Hui-li*, ZHANG Yan

(School of Mathematics and Computer Science, Ningxia University, Yinchuan Ningxia 750021, China)

Abstract: By the method of integral equation and the fixed-point theorem, the boundary value problem with Haseman shift for k -regular functions on unbounded domains in Clifford analysis is discussed. Moreover, the existence and uniqueness of the solution for the problem is proved.

Key words: Clifford analysis; k -regular function; unbounded domains

(责任编辑: 曾剑锋)