

文章编号: 1000-5862(2013)04-0359-08

压缩真空态通过分束器后的纠缠和统计性质

胡 鹏, 马善钧*

(江西师范大学物理与通信电子学院, 江西 南昌 330022)

摘要: 基于相空间方法, 研究了压缩真空态通过分束器后的纠缠和统计性质. 采用对数负值的判据, 研究输出光场的纠缠属性. 结果表明: 对称平衡分束器输出光场纠缠量最大, 且纠缠量随压缩参数的增大而增大. 另外, 还通过 Wigner-Weyl 规则, 研究单端输出光场的一些统计性质. 结果发现: 调节输入光场和分束器参数, 输出光场展现不同的非经典性.

关键词: 压缩真空态; 分束器; 纠缠; Wigner 函数

中图分类号: O 431

文献标志码: A

0 引言

压缩光场是量子光学中的一种非常重要的非经典光场, 该场的一个正交分量的起伏比相干态下相应的起伏小, 即被压缩, 相应另一个正交分量的起伏变得更大^[1-2]. 利用这一特征, 压缩态在光通讯、微弱信号检测、高精度干涉测量、引力波探测等方面都有重要的应用^[3-5]. 在实验上已有多种方法成功地制备了压缩态, 如二次谐波、四波混频、参量下转换等. 此外, 压缩态在量子信息处理中已得到了广泛应用, 如利用双模压缩真空态实现量子态的远程传输^[6-8]与量子稠密编码^[9]. 由于压缩态得到越来越广泛的应用, 对于压缩态的研究成为量子光学领域的课题之一. 另一方面, 人们越来越意识到连续变量量子纠缠在量子信息领域的重要作用^[10-12]. 为此, 人们提出了大量方案制备量子纠缠态. 其中, 量子分束器是一种简单的线性光学器件, 它在制备量子纠缠态方面具有独特优势. M. S. Kim 小组研究发现分束器的输入光场的非经典性是分束器产生纠缠的一个必要条件, 得到了分束器纠缠定理^[13]. 接着, Wang Xianbin 在薛定谔表象中证明了 M. S. Kim 的分束器纠缠定理^[14]. 最近, S. C. Springer 等又证明了分束器的输出态具有普遍的关联性^[15]. Nha 小组也提出了利用 2 个分立的输入光场通过分束器产生纠缠的实验方案^[16].

本文将采用对数负值(logarithmic negativity)的判据^[17-18]研究压缩真空态通过分束器后的输出光场的纠缠性质, 以及研究单端口输出光场的量子统计性质, 包括 Wigner 函数、平均光子数, 以及亚泊松分布等. 将基于相空间方法^[19-20], 从输入输出角度^[21]分析考虑到量子光场经过分束器的过程. 首先推导出输入光场的 Wigner 函数, 再通过分束器的经典输入输出关系, 推导输出光场的 Wigner 函数. 由于输出光场的 Wigner 函数加载了输入光场和分束器相关参数有关的信息, 根据该输出 Wigner 函数, 可以方便分析输出光场的纠缠和统计性质受到输入光场和分束器参数的影响.

1 基本模型和理论

这里首先介绍一下光场经过分束器的输入输出理论, 并推导输出 Wigner 函数, 为研究输出光场的纠缠和统计性质奠定基础.

1.1 光场经过分束器的输入输出理论

一些常见的干涉装置, 例如分束器、马赫-曾特(Mach-Zehnder)干涉仪等, 通常可以看作作为一个具有 2 个输入和 2 个输出端口的四端设备, 如图 1 所示. 图 2 中 a_i , b_i , a_o , b_o 分别表示干涉装置 4 个端口所对应光场的湮灭算符. 在量子光学领域, Wigner 函数是量子相空间理论中最重要的组成部分, 它既是相空间理论的基础, 也是实际应用中主要的工具

收稿日期: 2013-04-02

基金项目: 江西省自然科学基金(20114BAB202004) 和江西省教育厅科技课题(GJJ12171) 资助项目.

通信作者: 马善钧(1957-) 男, 河北唐山人, 教授, 博士, 主要从事量子光学研究.

之一^[22-23]. 为此, 采用相空间 Wigner 函数方法, 从输入输出角度分析这类相关问题^[24-25].



图1 四端干涉装置示意图.

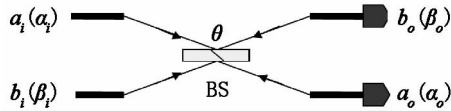


图2 压缩真空态通过分束器的示意装置

假定从2个输入端 a_i 和 b_i 分别输入光场 ρ_1 和 ρ_2 , 输入 Wigner 函数 $W_{in}(\alpha; \beta)$ 可以表达为

$$W_{in}(\alpha; \beta) = W_{\rho_1}(\alpha) W_{\rho_2}(\beta), \quad (1)$$

其中 $W_{\rho_1}(\alpha)$ 与 $W_{\rho_2}(\beta)$ 分别为光场 ρ_1 和 ρ_2 的 Wigner 函数. 通过量子力学和量子光学相关知识找出经典变换关系后, 那么输出 Wigner 函数就可以用输入 Wigner 函数的形式表达为

$$W_{out}(\alpha_o; \beta_o) = W_{in}(\alpha_i(\alpha_o; \beta_o); \beta_i(\alpha_o; \beta_o)), \quad (2)$$

其中 α_i β_i α_o 和 β_o 分别对应 a_i b_i a_o 和 b_o 模光场的幅度(如图2所示). 以光学分束器为例, 光场通过该装置的输入输出关系如图2所示. 在量子光学中, 分束器输入输出光场的量子变换关系为

$$\begin{pmatrix} a_o \\ b_o \end{pmatrix} = M_{BS} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, \quad (3)$$

其中 M_{BS} 为分束器的变换矩阵

$$M_{BS} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$\cos^2 \theta$ 表示分束器的透射率. 这里需要说明的是, 已经假定反射和透射光场的相位差为0, 并令 θ 在 $[0, 2\pi]$ 内取值.

用经典复数取代量子算符($a \rightarrow \alpha$ $b \rightarrow \beta$) 从(3)式可以得到经典输入输出变换关系为

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_o \cos \theta - \beta_o \sin \theta, \\ \beta_i &= \alpha_o \sin \theta + \beta_o \cos \theta, \end{aligned} \quad (5)$$

这样, 只要知道初始输入 Wigner 函数, 利用经典变换关系就可以表达出输出 Wigner 函数.

1.2 压缩真空态经过分束器的输入输出 Wigner 函数

压缩真空态 $S(r)|\rangle$ 其显解形式为

$$S(r)|\rangle = \cosh^{-1/2} r \exp \left[\frac{\tanh r}{2} a^{\dagger 2} \right] |\rangle, \quad (6)$$

这里 $S(r) = \exp [r(a^{\dagger 2} - a^2)/2]$ 为压缩算符, 其中 a 和 a^{\dagger} 为表示光场的湮灭和产生算符, 且

$[a, a^{\dagger}] = 1$, 为方便后面讨论, 这里压缩参数 r 取实数. 单模光场 ρ 在相干态表象下的 Wigner 函数计算公式为^[26]

$$W(\alpha) = \frac{2e^2 |\alpha|^2}{\pi} \int \frac{d^2 z}{\pi} \langle -z | \rho | z \rangle e^{-2(z\alpha^* - z^*\alpha)} \quad (7)$$

其中 $\alpha = (q + ip)/\sqrt{2}$ (q 为坐标值, p 为动量值), $|z\rangle$ 表示相干态.

根据(7)式, 易得从 a_i 端输入的压缩态真空态 $S(r)|0\rangle$ 的 Wigner 函数为

$$W_{S(r)|0\rangle}(\alpha_i) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha_i|^2 \cosh 2r - \alpha_i^2 \sinh 2r - \alpha_i^{*2} \sinh 2r}, \quad (8)$$

以及从 b_i 端输入的真空态 $|0\rangle$ 的 Wigner 函数为

$$W_{|0\rangle}(\beta_i) = \frac{2}{\pi} \exp(-2|\beta_i|^2), \quad (9)$$

这样输入 Wigner 函数可以表达为

$$W_i(\alpha_i, \beta_i) = W_{S(r)|0\rangle}(\alpha_i) W_{|0\rangle}(\beta_i). \quad (10)$$

利用分束器的经典输入输出变换(5)式, 最后得出输出 Wigner 函数为

$$\begin{aligned} W_o(\alpha_o, \beta_o) &= \\ &\frac{4}{\pi^2} e^{-2(\cosh 2r \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) |\alpha_o|^2 - \sinh 2r \cos^2 \theta (\alpha_o^2 + \alpha_o^{*2})} \cdot \\ &e^{-2(\cosh 2r \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) |\beta_o|^2 - \sinh 2r \sin^2 \theta (\beta_o^2 + \beta_o^{*2})} \cdot \\ &e^{(\cosh 2r - 1) \sin 2\theta (\alpha_o^* \beta_o + \alpha_o \beta_o^*)} \cdot \\ &e^{\sinh 2r \sin 2\theta (\alpha_o \beta_o + \alpha_o^* \beta_o^*)}, \end{aligned} \quad (11)$$

从(11)式可以看出, 输出光场也具有高斯型特点; 又由于 $\alpha_o \beta_o + \alpha_o^* \beta_o^*$ 以及 $\alpha_o^* \beta_o + \alpha_o \beta_o^*$ 交叉项的存在, 意味着该输出量子态也具有纠缠的特点. 利用输出 Wigner 函数可方便研究输出端光场的纠缠和统计性质.

2 输出光场的纠缠性质

2.1 纠缠判据

量子纠缠的度量方案有很多种, 其中一种常见的用来表征双模高斯量子态纠缠属性的方案, 就是借助对数负值(logarithmic negativity), 该量值可以通过协方差矩阵计算得到的^[27-28].

对于双模高斯量子态 ρ , 假定其协方差矩阵 Λ (4×4 矩阵) 分块形式如下

$$\Lambda = \begin{pmatrix} u & w \\ w^T & v \end{pmatrix}, \quad (12)$$

其中 u v w 都是 2×2 矩阵, 其矩阵元定义为

$$\Lambda_{lm} = \frac{1}{2} \langle \hat{\xi}_l \hat{\xi}_m + \hat{\xi}_m \hat{\xi}_l \rangle - \langle \hat{\xi}_l \rangle \langle \hat{\xi}_m \rangle \quad (13)$$

算符矢量为 $\hat{\xi} = (\hat{q}_1 \ \hat{p}_1 \ \hat{q}_2 \ \hat{p}_2)^T$,且

$$\begin{aligned}\hat{q}_1 &= (a + a^\dagger)/\sqrt{2} \ \hat{p}_1 = (a - a^\dagger)/(\sqrt{2}i) , \\ \hat{q}_2 &= (b + b^\dagger)/\sqrt{2} \ \hat{p}_2 = (b - b^\dagger)/(\sqrt{2}i) ,\end{aligned}\quad (14)$$

分别为对应各模的坐标和动量算符,并且 $\langle \bullet \rangle \equiv \text{tr}[\bullet \rho]$. 定义对数负值 E_N 为

$$E_N = \max[0, -\ln 2\mathcal{N}_{\min}] ,\quad (15)$$

这里 $\mathcal{N}_{\min} = \min[\mathcal{N}_+, \mathcal{N}_-]$,且 \mathcal{N}_{\pm} 为

$$\mathcal{N}_{\pm} = \sqrt{\frac{\Sigma \pm \sqrt{\Sigma^2 - 4\det\mathbf{A}}}{2}} ,\quad (16)$$

其中 $\Sigma = \det\mathbf{u} + \det\mathbf{v} - 2\det\mathbf{w}$. 如果 $E_N > 0$,则双模高斯态是纠缠的,否则是分立的;也就是说,双模高斯态纠缠的充要条件是 $\mathcal{N}_{\min} < 1/2$,而当 $\mathcal{N}_{\min} \mathcal{N}/2$ 时,则意味着双模高斯态是分立的.

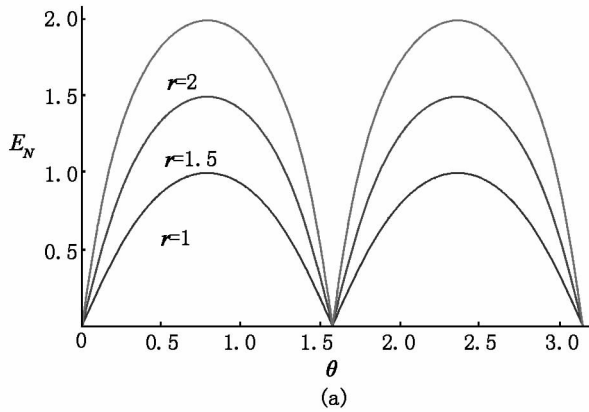
2.2 输出光场的纠缠分析

通过变量变换关系

$$\alpha_o = (q_1 + ip_1)/\sqrt{2} \ \beta_o = (q_2 + ip_2)/\sqrt{2} ,\quad (17)$$

可以从(11)式的输出 Wigner 函数形式直接推导出如下关系式

$$W(\chi) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{\det\mathbf{A}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\chi^T \mathbf{A}^{-1} \chi\right) ,\quad (18)$$



其中 $\chi = (q_1 \ p_1 \ q_2 \ p_2)^T$,相应的协方差矩阵 \mathbf{A} 为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} m & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & n & 0 & \vartheta \\ \kappa & 0 & m & 0 \\ 0 & \vartheta & 0 & n \end{pmatrix} ,\quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned}m &= \cos^2 \theta e^{-2r}/2 + \sin^2 \theta/2 , \\ n &= \cos^2 \theta e^{2r}/2 + \sin^2 \theta/2 , \\ \kappa &= \sin 2\theta (1 - e^{-2r})/4 , \\ \vartheta &= \sin 2\theta (1 - e^{2r})/4 ,\end{aligned}\quad (20)$$

易得 $\det\mathbf{A} = 1/16$,以及

$$\det\mathbf{u} = \det\mathbf{v} = \frac{\sin^2 2\theta \cosh 2r}{8} + \frac{\cos 4\theta}{16} + \frac{3}{16} ,$$

$$\det\mathbf{w} = \frac{\sin^2 2\theta}{8} - \frac{\sin^2 2\theta \cosh 2r}{8} ,$$

$$\Sigma = \frac{1}{2}(\cosh^2 r - \sinh^2 r \cos 4\theta) .\quad (21)$$

结合前面所阐述的理论,将(21)式代入(16)式,从而得到输出光场的对数负值 E_N ,绘制其示意图如图3所示.

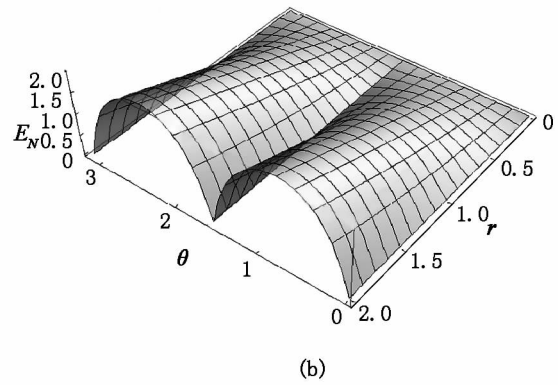


图3 a为输出端对数负值的2维图 b为3维图

为直观展示纠缠的变化情况,在图3中绘制了对数负值 E_N 在不同压缩参量 r 的情形下随参量 θ 的演化图形(如图3(a)所示),并绘制了对数负值 E_N 在 (r, θ) 空间的3维图3(b).显然,对数负值 E_N 始终为正值,意味着输出端光场态存在纠缠,且对数负值随分束器调节参数 θ 呈周期性变化,周期为 $\pi/2$. 对于特定的分束器调节参数 θ ,压缩参数 r 越大,对数负值 E_N 越大,即压缩越大纠缠也越大;而对于特定的压缩参数 r ,当 $\theta = \pi/4, 3\pi/4$ 时(对称平衡分束器)纠缠最大.这些结果表明,对称平衡分束器输出光场纠缠最大,且纠缠量随压缩参数的增大而增

大.这一结果与文献[27]的结论是一致的.

3 单端输出光场的量子统计属性

这一部分研究 a_o 端光场的统计性质,其中包括 Wigner 函数、平均光子数以及亚泊松参数.根据量子光学的相空间理论知识,通过 Wigner 函数 $W(\alpha)$ 可以方便计算出对称算符 $O_s(a, a^\dagger)$ 的期望值,即 Wigner-Weyl 规则^[29]

$$\langle O_s(a, a^\dagger) \rangle = \int O_s(\alpha, \alpha^*) W(\alpha) d^2 \alpha^* ,\quad (22)$$

其中 $O_s(\alpha \alpha^*)$ 是 $O_s(a \rho^\dagger)$ 的经典表示.

3.1 Wigner 函数

a_o 端光场的密度算符 ρ_{a_o} 可以通过对输出端密度算符 ρ_{out} 进行部分求迹获得, 即 $\rho_{a_o} = \text{tr}(\rho_{out})$. 相应地, 在相空间理论中 a_o 端的 Wigner 函数 $W_{a_o}(\alpha_o)$ 则可由输出端 Wigner 函数 $W_o(\alpha_o, \beta_o)$ 在 β_o 平面内积分得到, 即

$$W_{a_o}(\alpha_o) = \int W_o(\alpha_o, \beta_o) d^2\beta_o, \quad (23)$$

将(16)式代入(23)式并积分, 得到 a_o 端光场 Wigner 函数的解析表达式

$$W_{a_o}(\alpha_o) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sqrt{J}} \exp(A |\alpha_o|^2 + B \alpha_o^2 + B \alpha_o^{*2}), \quad (24)$$

其中

$$J = (2 \cosh 2r \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta)^2 - 4 \sin^4 \theta \sinh^2 2r, \quad (25)$$

$$A = -(2 \cosh 2r \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta) + 2(\cosh 2r \cdot \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\cosh 2r - 1)^2 \sin^2 2\theta / J + (2 \cosh 2r \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta) \sin^2 2\theta \sinh^2 2r / J - 4(\cosh 2r - 1) \sin^2 \theta \sin^2 2\theta \sinh^2 2r / J, \quad (26)$$

以及

$$B = -\sinh 2r \cos^2 \theta + 2(\cosh 2r \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \cdot (\cosh 2r - 1) \sin^2 2\theta \sinh 2r / J - \sin^2 \theta \sin^2 2\theta \cdot \sinh^3 2r / J - (\cosh 2r - 1)^2 \sin^2 \theta \sin^2 2\theta \cdot \sinh 2r / J. \quad (27)$$

很明显 J, A, B 与输入光场压缩参数 r 和分束器的调节参数 θ 有关, 说明 a_o 端光场的 Wigner 函数受到输入光场和分束器参数的影响. 可以通过(24)式验证几种特殊情形来. 特别地, 当 $\theta = 0, \pi$ 时, $J \rightarrow 4, A \rightarrow -2 \cosh 2r, B \rightarrow -\sinh 2r, W_{a_o}(\alpha_o) \rightarrow W_{S(r)}(\alpha_o)$, 该情形对应的是全透射的情况; $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ 时 $J \rightarrow 4, A \rightarrow -2, B \rightarrow 0, W_{a_o}(\alpha_o) \rightarrow W_{| \rangle}(\alpha_o)$, 该情形对应的是反透射的情况.

为了更清楚地展示不同参数对 Wigner 分布函数的影响, 利用(23)式在相空间绘制了 Wigner 函数的图形. 图4画出了压缩参数 $r = 1$, 分束器调节参数 $\theta = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 3\pi/2$ 时 a_o 端口 Wigner 函数 3 维图. 各种情形下的 Wigner 函数都呈现高斯形态. 图5画出了 $\theta = \pi/4$ 时, 即对称平衡(50/50)分束器时, 压缩参量 $r = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ 时 a_o 端的 Wigner 函数. 可以明显看到, 压缩参数 r 越大, Wigner 函数在某一方向压缩越显著.

3.2 平均光子数

前面已经知道, 输入的光场是压缩真空态

$S(r) | \rangle$ 和真空态 $| \rangle$ 根据压缩算符变换关系

$$S^\dagger(r) a^\dagger S(r) = a^\dagger \cosh r + a \sinh r,$$

$$S^\dagger(r) a S(r) = a \cosh r + a^\dagger \sinh r. \quad (28)$$

易得压缩态真空态 $S(r) | \rangle$ 的平均光子数为

$$\langle a_i^\dagger a_i \rangle = 2 \sinh^2 r, \quad (29)$$

以及真空态 $| \rangle$ 的平均光子数为 $\langle b_i^\dagger b_i \rangle = 0$, 即输入端的总光子数为 $\langle a_i^\dagger a_i \rangle + \langle b_i^\dagger b_i \rangle = 2 \sinh^2 r$. 由于分束器是一种有 2 个输入端口和 2 个输出端口的线性无损耗光学装置, 因此输入输出粒子数必定守恒, 即

$$\langle a_i^\dagger a_i \rangle + \langle b_i^\dagger b_i \rangle = \langle a_o^\dagger a_o \rangle + \langle b_o^\dagger b_o \rangle, \quad (30)$$

为此, 可以只计算 a_o 端的平均光子数, 其定义为 $\langle a_o^\dagger a_o \rangle = \text{tr}(a_o^\dagger a_o \rho_{a_o})$. 由于

$$a_o^\dagger a_o = (a_o^\dagger a_o)_s - 1/2, \quad (31)$$

基于相空间方法考虑, 可以利用已知的 Wigner 函数 $W_{a_o}(\alpha_o)$ 直接计算 $(a_o^\dagger a_o)_s$ 的期望值, 其中 $(\cdot)_s$ 符号表示算符的对称编序. 根据 Wigner-Weyl 规则得到

$$\begin{aligned} \langle (a_o^\dagger a_o)_s \rangle &= \int \alpha_o^* \alpha_o W_{a_o}(\alpha_o) d^2\alpha_o = \\ &= \frac{4}{\sqrt{J}} \frac{d^2}{dx dy} \int e^{A |\alpha_o|^2 + x \alpha_o + y \alpha_o^* + B \alpha_o^2 + B \alpha_o^{*2}} \frac{d^2\alpha_o}{\pi} \Big|_{x=y=0} = \\ &= \frac{4}{\sqrt{J(A^2 - 4B^2)}} \frac{d^2}{dx dy} \exp\left(\frac{-Axy + x^2 B + y^2 B}{A^2 - 4B^2}\right) \Big|_{x=y=0} = \\ &= -\frac{4A}{\sqrt{J(A^2 - 4B^2)^3}}, \end{aligned} \quad (32)$$

在以上计算中利用了积分公式

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2 z}{\pi} \exp(\zeta |z|^2 + \xi z + \eta z^* + f z^2 + g z^{*2}) &= \\ \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 4fg}} \exp\left(\frac{-\xi \xi^* \eta + \xi^2 g + \eta^2 f}{\zeta^2 - 4fg}\right), \end{aligned} \quad (33)$$

其收敛条件是 $\text{Re}(\xi \pm f \pm g) < 0, \text{Re}\left(\frac{\zeta^2 - 4fg}{\xi \pm f \pm g}\right) < 0$. 这样得到 a_o 端光场的平均光子数为

$$\langle a_o^\dagger a_o \rangle = -\frac{4A}{\sqrt{J(A^2 - 4B^2)^3}} - \frac{1}{2}, \quad (34)$$

该值同样与压缩参数 r 和分束器的调节参数 θ 有关. 特别地当 $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ 时, 平均光子数 $\langle a_o^\dagger a_o \rangle = 0$; $\theta = 0, \pi$ 时, 平均光子数有最大值. 这是由于当 $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ 时 a_o 端的透射率为 0, 即 a_o 端对应的是真空态; 当 $\theta = 0, \pi$ 时, a_o 端的透射率为 1, 即 a_o 端对应的是压缩真空态. 图6绘制了在不同压缩参数 r 情形下, 平均光子数随参量 θ 的演化图形. 从图中我们可以清晰的看到, 平均光子数随 θ 呈周期为 π 的变化; 对于特定的 θ 值, 压缩参数 r 越大, 平均光子数越大.

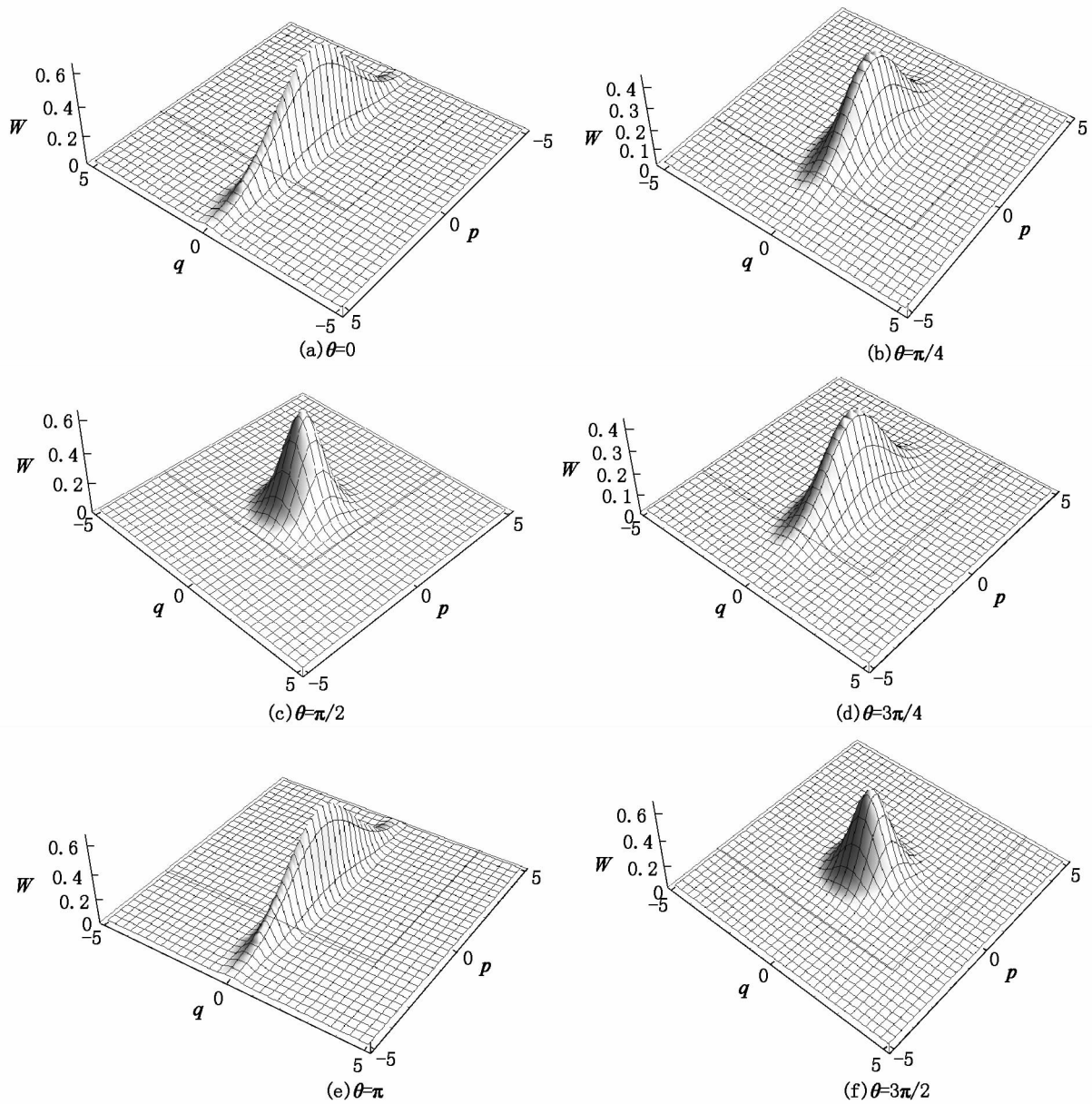


图4 当 $r=1$ $\theta=0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 3\pi/2$ 时 a_o 端光场的 Wigner 函数

3.3 Mandel Q 参数

光场的非经典性可以通过观察其是否具有次泊松分布的特点来判断. 次泊松分布的特点可以借助 Mandel 提出的 Q 参数来表征, 其定义为

$$Q = \frac{\langle a_o^{\dagger 2} a_o^2 \rangle}{\langle a_o^{\dagger} a_o \rangle^2} - \langle a_o^{\dagger} a_o \rangle, \quad (35)$$

该参数反映了所考虑的光场与具有泊松分布特征的相干态光场光子数分布偏离情况. 当 $Q=0$ 时, 光场为泊松分布, 而当 $Q>0$ (或 $Q<0$) 时, 则称光场具有超(或次)泊松分布. 接下来我们讨论 a_o 端光场的 Mandel Q 参数, 判断其非经典性.

由算符编序关系可知

$$a_o^{\dagger 2} a_o^2 = (a_o^{\dagger 2} a_o^2)_s - 2(a_o^{\dagger} a_o)_s + 1/2, \quad (36)$$

根据 Wigner-Weyl 规则, 并仿照计算(32)式同样的方法, 有

$$\begin{aligned} \langle a_o^{\dagger 2} a_o^2 \rangle_s &= \int \alpha_o^{*2} \alpha_o^2 W_{\alpha_o}(\alpha_o) d^2 \alpha_o = \\ \frac{4}{\sqrt{J}} \frac{d^4}{dx^2 dy^2} \int e^{A|\alpha_o|^2 + x\alpha_o + y\alpha_o^* + B\alpha_o^2 + B\alpha_o^{*2}} \frac{d^2 \alpha_o}{\pi} \Big|_{x=y=0} &= \\ \frac{4}{\sqrt{J(A^2 - 4B^2)}} \frac{d^4}{dx^2 dy^2} \exp\left(\frac{-Axy + x^2 B + y^2 B}{A^2 - 4B^2}\right) \Big|_{x=y=0} &= \end{aligned}$$

$$\frac{4(2A^6 - 12A^4B^2 + 64B^6)}{\sqrt{J(A^2 - 4B^2)^9}}, \quad (37)$$

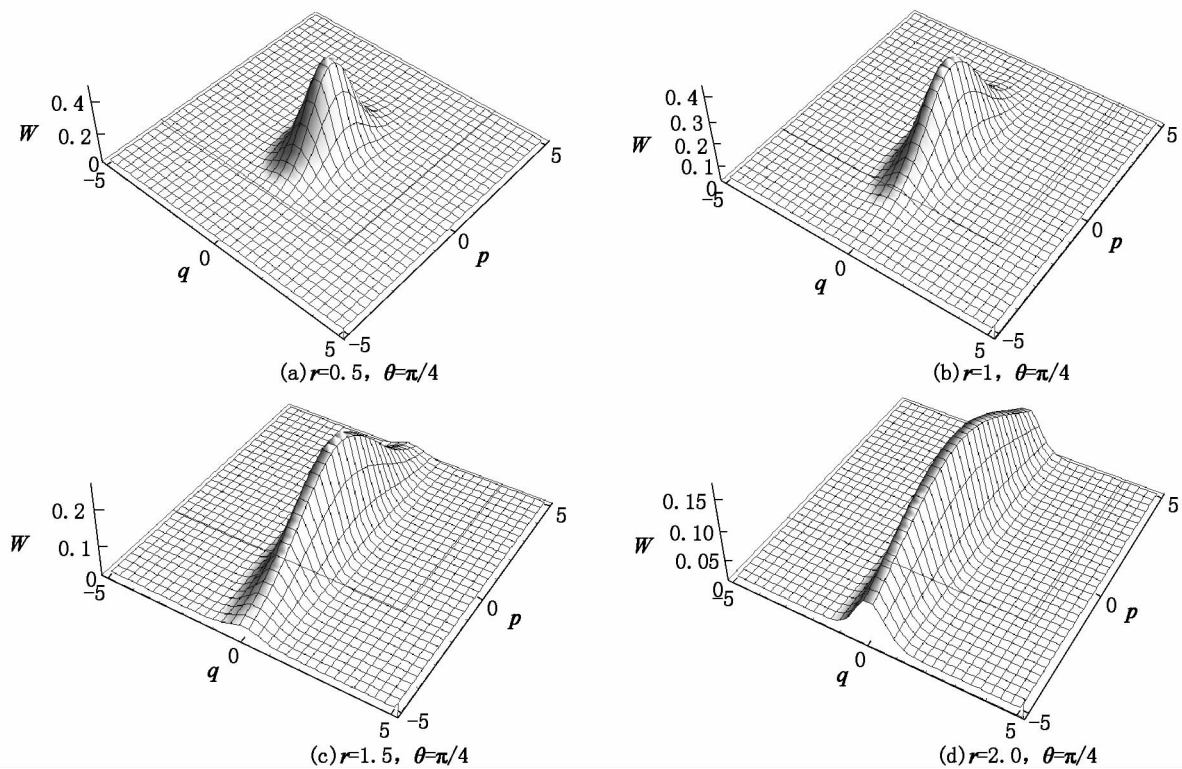


图5 当 θ 为 $\pi/4$ r 分别取 0.5, 1, 1.5, 2 时 α_o 端光场的 Wigner 函数

即有

$$\langle a_o^{\dagger 2} a_o^2 \rangle = \frac{4(2A^6 - 12A^4B^2 + 64B^6)}{\sqrt{J(A^2 - 4B^2)^9}} + \frac{8A}{\sqrt{J(A^2 - 4B^2)^3}} + \frac{1}{2}, \quad (38)$$

将 (34) 和 (38) 式代入 (35) 式, 可得 α_o 端光场的 Mandel Q 参数.

特别地, 当 $\theta = 0, \pi$ 时 α_o 端光场退化为压缩真空态 $S(r)|\rangle$, 我们可以发现 $Q \rightarrow \cosh 2r$, 即压缩真空态是超泊松分布的; 当 $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ 时 α_o 端光场退化为真空态 $Q \rightarrow -1$, 即真空态是次泊松分布的. 图 7(a) 绘制了不同 θ 情形下, Q 参数随 r 的演化图形. 图 7(b) 是 Q 参数在 (r, θ) 空间的 3 维图, Q 参数随 r 呈周期性变化, 且周期为 π , 其展示了不同情形下 α_o 端光场的非经典性特点^[30].

4 结论

本文以压缩真空态作为输入源, 研究其通过分

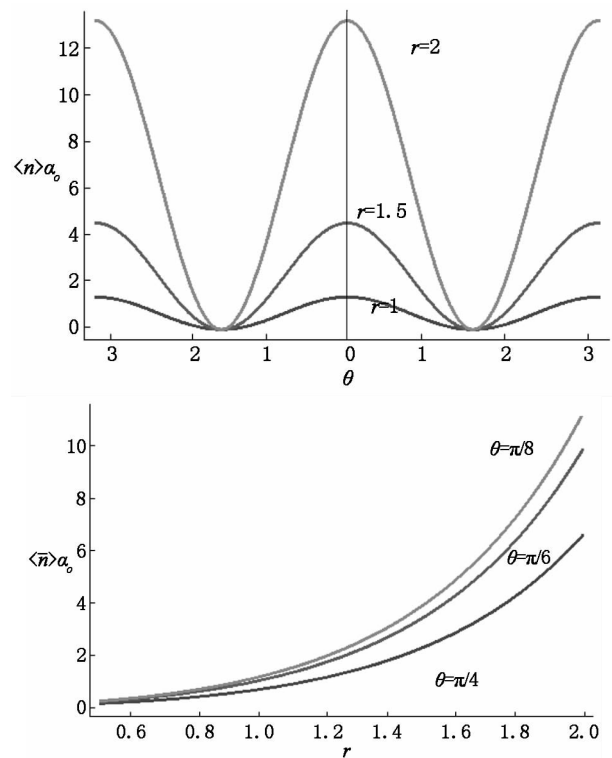


图6 α_o 端光场平均光子数

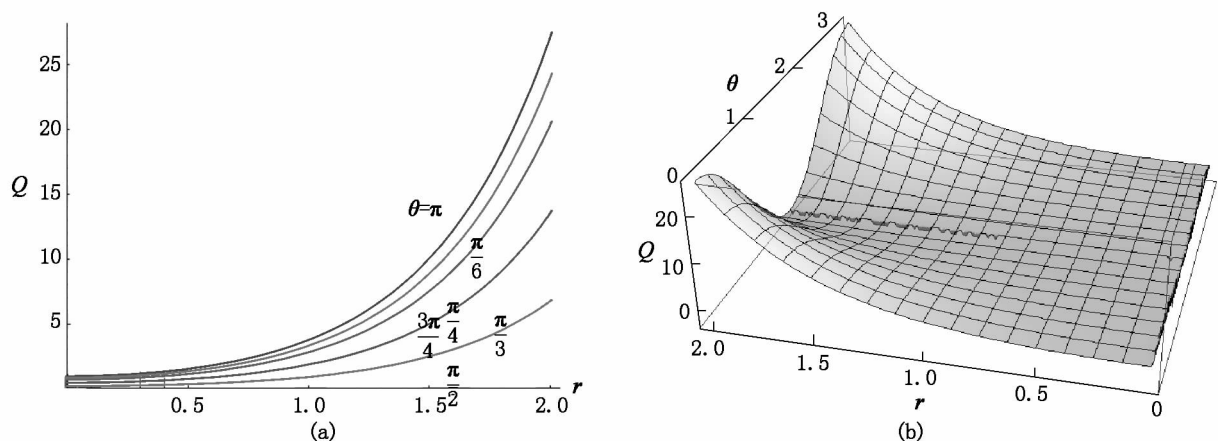


图7 图(a)为 Q 参数随参量 θ 和 r 变化的2维图,图(b)为3维图

束器后的量子统计和纠缠特性. 这里我们主要用的是相空间方法中的 Wigner 函数来处理问题. 利用输出端的 Wigner 函数方便地诱导出输出光场的协方差矩阵,通过对数负值研究了输出端光场的纠缠性质. 结果表明,对称平衡分束器时输出光场纠缠量最大,且此纠缠量随压缩参数的增大而增大. 另外,还得到了单端输出光场的 Wigner 函数、平均光子数、亚泊松分布的统计性质. 研究发现,当调节输入光场压缩参数 r 和分束器参数 θ ,输出光场展现不同的非经典性. 通过分束器可以实现量子态工程,产生一些具有特殊量子属性的非经典量子态.

5 参考文献

- [1] Dodonov V V. Nonclassical states in quantum optics: a squeezed review of the first 75 years [J]. J Opt B: Quantum Semiclass Opt 2002 4: R1-R33.
- [2] Loudon R, Knight P L. Squeezed light [J]. J Mod Opt, 1987 34: 709-759.
- [3] Walls D F. Squeezed states of light [J]. Nature, 1983, 306: 141-146.
- [4] Collett M J, Walls D F. Squeezing spectra for nonlinear optical systems [J]. Phys Rev A, 1985 32: 2887-2892.
- [5] Lakshmi P A, Agarwal G S. Effect of cooperativity on squeezing in resonance fluorescence optics communications [J]. Phys Rev A, 1984 29: 2260-2262.
- [6] Milburn G J, Braunstein S L. Quantum teleportation with squeezed vacuum states [J]. Phys Rev A, 1999 60: 937-942.
- [7] Zhang Jing, Peng Kunchi. Quantum teleportation and dense coding by means of bright amplitude-squeezed light and direct measurement of a Bell state [J]. Phys Rev A, 2000 62: 64302.
- [8] 宋同强. 利用双模压缩真空态实现量子态的远程传输 [J]. 物理学报, 2004 53: 3358-3362.
- [9] Ban M. Quantum dense coding via a two-mode squeezed vacuum state [J]. J Opt B: Quantum Semiclass Opt, 1999 (1): L9-L11.
- [10] Braunstein S L, Loock P V. Quantum information with continuous variables [J]. Rev Mod Phys, 2005 77: 513-577.
- [11] Braunstein S L, Kimble H J. Dense coding for continuous variables [J]. Phys Rev A, 2000 61: 42302.
- [12] Tyc T, Sander B C. How to share a continuous-variable quantum secret by optical interferometry [J]. Phys Rev A, 2002 65: 42310.
- [13] Kim M S, Son W, Buzek V et al. Entanglement by a beam splitter: nonclassicality as a prerequisite for entanglement [J]. Phys Rev A, 2002 65: 32323.
- [14] Wang Xian bin. A Theorem for the beam-splitter entangler [J]. Phys Rev A, 2002 66(2): 24303.
- [15] Springer S C, Lee J, Bellini M et al. Conditions for factorizable output from a beam splitter [J]. Phys Rev A, 2009, 79: 62303.
- [16] Tahira R, Ikram M, Nha H, Zubairy M S. Entanglement of Gaussian states using a beam splitter [J]. Phys Rev A, 2009 79: 23816.
- [17] Werner R F, Wolf M M. Bound entangled Gaussian states [J]. Phys Rev Lett, 2001 86: 3658-3661.
- [18] Giedke G, Kraus B, Lewenstein M et al. Entanglement criteria for all bipartite Gaussian states [J]. Phys Rev Lett, 2001 87: 167904.

- [19] Schleich W P. Quantum optics in Phase space [M]. Berlin: Verlag 2001.
- [20] Suda M. Quantum interferometry in phase space [M]. Berlin: Springer-Verlag 2006.
- [21] Ekert A K ,Knight P L. Relationship between semiclassical and quantum-mechanical input-output theories of optical response [J]. Phys Rev A ,1991 43: 3934-3938.
- [22] Wigner E P. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium [J]. Phys Rev ,1932 40: 749-759 .
- [23] Hillary M ,O'Connell R F ,Scully M O ,et al. Distribution functions in physics [J]. Fundamentals Phys Rep ,1984 , 106: 121-167.
- [24] Xu Xuexiang ,Jia Fang ,Hu Liyun ,et al. Quantum interference between an arbitrary-photon Fock state and a coherent state [J]. J Mod Opt 2012 59: 1624-1633.
- [25] 徐学翔 张英孔 张浩亮 ,等. N00N 态的 Wigner 函数及 N00N 态作为输入的量子干涉 [J]. 物理学报 ,2013 , 62: 114204.
- [26] Fan H Y ,Zaidi H R. Application of IWOP technique to the generalized Weyl correspondence [J]. Phys Lett A ,1987 , 124: 303-307.
- [27] 张延亮 周清平 周方. 相干压缩态通过分束器的纠缠性质 [J]. 科技信息 2010 19: 13.
- [28] Xu Xuexiang ,Hu Liyun ,Fan Hongyi. Fluctuation of mesoscopic RLC circuit at photon-subtracted and photon-added thermo vacuum states with finite temperature [J]. Mod Phys Lett B 2011 25: 31-39.
- [29] Lee C T. Nonclassical photon statistics of two-mode squeezed states [J]. Phys Rev A ,1990 42: 1608-1616.
- [30] 邓阿丽 ,夏云杰. 利用分束器产生的一类非经典光场 [J]. 量子光学学报 2004 10: 39.

Entanglement and Statistical Properties of Squeezed Vacuum State after an Beam Splitter

HU Peng ,MA Shan-jun *

(College of Physics and Communication Electronics ,Jiangxi Normal University ,Nanchang Jiangxi 330022 ,China)

Abstract: Based on phase space method ,we study entanglement and statistical properties of squeezed vacuum state after an beam splitter. We adopt the criterion of logarithmic negativity to study the entanglement properties of the output light field. The results show that the maximum entanglement is found for the symmetrical beam splitter and the amount of entanglement increases with the squeezing parameter. In addition ,we also use the Wigner-Weyl rules to study the statistical properties of light field in one of the output ports. It is found that the nonclassicality of the output field will change by adjusting the relative parameter of the input light field and the beam splitter.

Key words: squeezed vacuum state; beam splitter; entanglement; Wigner function

(责任编辑: 冉小晓)