

文章编号: 1000-5862(2013)04-0428-04

# 有色边动态网络的同步

吴召艳, 张平辉

(江西师范大学数学与信息科学学院 江西 南昌 330022)

**摘要:** 根据数学中有色边图的概念提出有色边网络模型, 该模型可以更好地描述和研究由大量相互作用个体构成的大型复杂系统. 基于 Lyapunov 稳定性理论, 给出了有色边动态网络渐近同步的充分条件, 并给出了数值例子来验证所得的结论.

**关键词:** 同步; 有色边网络; 有色边图

**中图分类号:** O 231.5

**文献标志码:** A

## 0 引言

现实复杂系统大部分是由大量的相互作用或相互影响的个体耦合而成, 如社会网络是由相互影响的个人构成的、神经网络是由相互作用的神经元构成的、生态系统是由各种各样的物种构成的等, 并展现了整体大于部分之和的诸多特征, 如同步和涌现等. 如何来更好地描述和研究此类复杂系统有着重要的理论价值和现实意义, 因而吸引了各个领域的研究者们的关注. 最近, 很多网络模型陆续被提出用以更好地描述现实系统, 包括加权网络、有向网络、随机网络、社团网络、时滞网络等, 其中节点表示个体, 节点之间的连接边表示个体之间的相互作用<sup>[1-9]</sup>. 众所周知, 网络个体之间的相互作用包括外部耦合和内部耦合作用, 外部耦合刻画了任意2个个体之间是否有影响, 而内部耦合则更详细地描述了2个节点之间如何影响. 上述所提到的诸多网络中, 内部耦合都是假定为一样的, 即在不考虑权重的情况下, 任意有影响的个体对之间的影响方式是一样的. 然而在现实复杂系统中, 还存在着另一种影响方式. 比如, 考虑一个由多人组成的社会网络, 研究这些人之间的社会关系, 包括亲戚关系、同学关系及科研合作关系. 这里甲和乙两人可能只是亲戚关系, 甲和丙可能既是亲戚又是同学关系, 而乙和丙可能只是科研合作关系. 也就是说, 甲、乙、丙都是有相互关系的, 即他们之间的外部耦合是一样的, 但他们之

间的具体关系是不一样的, 即内部耦合矩阵不一样. 由于这类网络已不能被上述提到的网络模型较好地描述, 提出一种更为一般的网络模型是尤为必要的.

图论是研究复杂网络的有效工具并为复杂网络的研究提供理论支持. 赋权图、有向图、随机图等都被广泛用于研究相应的网络模型, 并取得了大量有价值的成果<sup>[10-11]</sup>. 为了更好地描述上述具有复杂社会关系的社会网络, 文献[12]根据有色图的概念提出了有色网络模型. 有色网络由带颜色的点和边构成, 不同颜色的点用来表示个体的差异性, 不同颜色的边用来表示个体之间相互作用的差异性. 如果一个网络中仅个体之间有差异性, 即边是无色的, 称为有色点网络; 如果仅边是有色的, 称为有色边网络. 比如, 上述社会网络若仅考虑个人之间相互关系的差异性, 即为有色边网络, 且甲、乙、丙3人之间边的颜色是不同的.

同步是复杂动态网络中一类典型的群集行为, 并有着重要的潜在应用价值, 如保密通讯、参数识别等. 文献[12]采用自适应控制和间歇控制方法将有色网络同步到任意给定的轨道. 另一方面, 一个网络能否通过调整耦合强度而不是施加外在控制实现网络自身的同步, 或者在什么条件下可以实现同步也是一个非常有趣且值得研究的问题. 本文将基于上述讨论, 重点讨论有色边网络在没有施加外在控制的情况下的同步问题, 并根据 Lyapunov 稳定性理论给出实现网络同步的充分条件.

收稿日期: 2013-03-20

基金项目: 国家自然科学基金专项基金(11226242), 江西省自然科学基金(20122BAB211006)和江西师范大学青年成长基金(3911)资助项目.

作者简介: 吴召艳(1979-), 男, 江苏徐州人, 讲师, 博士, 主要从事复杂网络的同步与控制方面的研究.

## 1 模型和预备知识

考虑由  $N$  个节点构成的有色边网络模型,其状态方程为

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f(x_i(t)) + \varepsilon \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} H_{ij}(x_j(t) - x_i(t)) \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

其中  $x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in}(t))^T \in \mathbf{R}^n$  是节点  $i$  的状态变量,  $\varepsilon > 0$  为耦合强度,  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  表示节点动力学,  $A = (a_{ij})_{N \times N}$  为外部耦合矩阵, 其中如果节点  $i$  和  $j$  ( $i \neq j$ ) 之间存在连接边, 则  $a_{ij} = a_{ji} = 1$ ; 否则  $a_{ij} = a_{ji} = 0$  ( $i \neq j$ ).  $H_{ij} = \text{diag}(h_{ij}^1, h_{ij}^2, \dots, h_{ij}^n) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为内部耦合对角矩阵, 其中如果节点  $i$  和  $j$  ( $i \neq j$ ) 的第  $k$  个分量相互影响, 则  $h_{ij}^k = h_{ji}^k = 1$ ; 否则  $h_{ij}^k = h_{ji}^k = 0$ .

记  $c_{ij}^k = a_{ij} h_{ij}^k$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$  ( $i \neq j$ ),  $c_{ii}^k = -\sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}^k = -\sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ji}^k$ ,  $\mathcal{C}_k = \text{diag}(c_{11}^k, c_{22}^k, \dots, c_{nn}^k)$ ,  $\mathcal{C}_k = (c_{ij}^k)_{N \times N}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , 则易知  $\mathcal{C}_k$  为行和为 0 的对称矩阵. 如果  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ , 则称网络(1)中的节点实现同步. 在接下来的讨论中, 需要如下假设:

**假设 1** 对于函数  $f(x(t))$  存在对角矩阵  $\Delta = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$  使得  $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$ ,

$$(y - x)^T (f(y) - f(x)) \leq (y - x)^T \Delta (y - x).$$

容易验证很多典型的混沌系统, 如 Lorenz 系统、Chua 电路、陈系统等都满足假设 1.

令  $e_i(t) = x_i(t) - \bar{x}(t)$  为同步误差, 其中  $\bar{x}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t)$ , 则可得如下误差系统:

$$\frac{de_i(t)}{dt} = f(x_i(t)) - f(\bar{x}(t)) + \varepsilon \sum_{j=1}^N c_{ij} e_j(t) + f(\bar{x}(t)) - \frac{d\bar{x}(t)}{dt} \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

显然, 如果误差系统(2)关于零点是渐近稳定的, 则有色边网络(1)就可以实现同步.

## 2 有色边网络的同步条件与证明

**定理 1** 如果假设 1 成立,  $\mathcal{C}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) 为不可约矩阵, 且下列  $n$  个不等式成立:

$$\delta_k + \varepsilon \lambda_k^2 < 0 \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

其中  $\lambda_k^2$  为  $\mathcal{C}_k$  的第 2 大特征值, 则误差系统(2)关于零点是渐近稳定的, 即有色边网络(1)可以实现渐

近同步.

证 考虑如下 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t),$$

则其导数计算如下

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^N e_i^T(t) \frac{de_i(t)}{dt} = \sum_{i=1}^N e_i^T(t) [f(x_i(t)) - f(\bar{x}(t))] + \varepsilon \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} e_j(t) + \\ &\quad \sum_{i=1}^N e_i^T(t) f(\bar{x}(t)) - \sum_{i=1}^N e_i^T(t) \frac{d\bar{x}(t)}{dt}. \end{aligned}$$

根据  $e_i(t)$  的定义可得  $\sum_{i=1}^N e_i(t) = 0$ , 从而可知,

$$\sum_{i=1}^N e_i^T(t) f(\bar{x}(t)) - \sum_{i=1}^N e_i^T(t) \frac{d\bar{x}(t)}{dt} = 0.$$

记  $\tilde{e}_k(t) = (e_{1k}(t), e_{2k}(t), \dots, e_{Nk}(t))^T$ ,  $\boldsymbol{\rho}(t) = (e_1^T(t), e_2^T(t), \dots, e_N^T(t))^T$ , 矩阵  $C$  如下:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{NN} \end{pmatrix},$$

根据假设 1 有

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &\leq \sum_{i=1}^N e_i^T(t) \Delta e_i(t) + \varepsilon \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} e_i^T(t) e_j(t) = \\ &\quad \boldsymbol{\rho}^T(t) (\mathbf{I}_N \otimes \Delta) \boldsymbol{\rho}(t) + \varepsilon \boldsymbol{\rho}^T(t) C \boldsymbol{\rho}(t) = \\ &\quad \sum_{k=1}^n \tilde{e}_k^T(t) (\delta_k \mathbf{I}_N + \varepsilon C_k) \tilde{e}_k(t). \end{aligned}$$

由于  $C_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) 为不可约对称矩阵, 易知其有 1 个重数为 1 的 0 特征值, 其余特征值均为负值. 记  $0 = \lambda_k^1 > \lambda_k^2 \geq \lambda_k^3 \geq \dots \geq \lambda_k^N$  为  $C_k$  的特征值,  $\Lambda_k = \text{diag}(\lambda_k^1, \lambda_k^2, \dots, \lambda_k^N)$ , 则存在酉矩阵  $U_k = (u_k^1, u_k^2, \dots, u_k^N)$  使得  $U_k^T C_k U_k = \Lambda_k$ ,  $\mu_k^1 = \frac{1}{\sqrt{N}}(1, 1, \dots, 1)^T$ .

令  $\boldsymbol{\eta}_k(t) = U_k^T \tilde{e}_k(t) = (\eta_{k1}(t), \eta_{k2}(t), \dots, \eta_{kn}(t))^T$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , 则  $\eta_{k1}(t) = u_k^{1T} \tilde{e}_k(t) = 0$ , 从而可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_k^T(t) \Lambda_k \boldsymbol{\eta}_k(t) &\leq \lambda_k^2 \boldsymbol{\eta}_k^T(t) \boldsymbol{\eta}_k(t) = \lambda_k^2 \tilde{e}_k^T(t) \tilde{e}_k(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} &\leq \sum_{k=1}^n \delta_k \tilde{e}_k^T(t) \tilde{e}_k(t) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\eta}_k^T(t) U_k^T C_k U_k \cdot \\ \boldsymbol{\eta}_k(t) &= \sum_{k=1}^n \delta_k \tilde{e}_k^T(t) \tilde{e}_k(t) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\eta}_k^T(t) \Lambda_k \boldsymbol{\eta}_k(t) \leq \\ &\quad \sum_{k=1}^n (\delta_k + \varepsilon \lambda_k^2) \tilde{e}_k^T(t) \tilde{e}_k(t). \end{aligned}$$

于是, 如果条件(3)成立, 就有  $dV(t)/dt < 0$ , 根据 Lyapunov 稳定性理论可知  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0$ , 即误差

系统(2)关于零点是渐近稳定的,也就是说,有色边网络(1)实现了渐近同步.定理1得证.

由定理1的证明可知,对于给定的有色边网络,只要其局部动力学函数 $f(x(t))$ 满足假设1,且其耦合矩阵 $C_k(k=1,2,\dots,n)$ 为不可约矩阵,总可以选择适当的耦合强度 $\varepsilon$ 使其达到同步.

### 3 数值例子

本节将考虑1个由6个陈系统耦合成的有色边网络,其状态方程如下:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f(x_i(t)) + \varepsilon \sum_{j=1, j \neq i}^6 a_{ij} H_{ij}(x_j(t) - x_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, 6,$$

其中

$$x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t), x_{i3}(t))^T,$$

$$f(x_i(t)) = \begin{pmatrix} 35(x_{i2}(t) - x_{i1}(t)) \\ -7x_{i1}(t) + 28x_{i2}(t) - x_{i1}(t)x_{i3}(t) \\ x_{i1}(t)x_{i2}(t) - 3x_{i3}(t) \end{pmatrix},$$

$$H_{12} = H_{36} = H_{45} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_{14} = H_{23} = H_{56} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H_{16} = H_{25} = H_{34} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

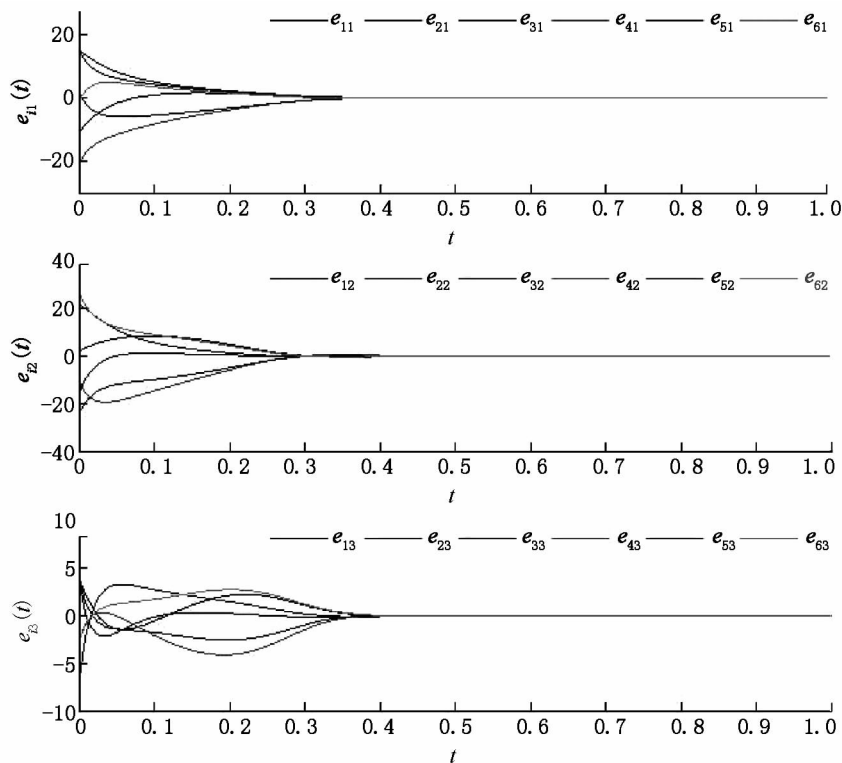


图1 有色网络(1)的同步误差轨道

于是根据文献[3]中的讨论,对函数 $f(\cdot)$ 和 $\forall x, y \in \mathbf{R}^3$ ,可以选择 $\Delta = \text{diag}(31, 62, 31)$ 使得 $(y-x)^T(f(y) - f(x)) = (y-x)^T \Delta (y-x)$ ,即假设1成立.根据 $C_k$ 的定义可知,

$$C_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

通过计算可得  $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \lambda_3^2 = -1$ , 则可以选择耦合强度  $\varepsilon = 63$  使得  $\delta_k + \varepsilon \lambda_k^2 < 0$  ( $k = 1, 2, 3$ ), 即定理 1 中的条件 (3) 满足, 也就是说有色边网络 (1) 可以实现同步. 图 1 给出了同步误差的轨道, 从中可以看出给出的条件 (3) 是有效的.

## 4 小结

本文讨论了有色边网络的同步. 首先提出了有色边网络模型, 其次根据 Lyapunov 稳定性理论, 解析地给出了网络实现同步的充分条件, 最后给出了数值例子验证方法的有效性.

## 5 参考文献

- [1] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of 'small-world' networks [J]. *Nature*, 1998, 393(6): 440-442.
- [2] Girvan M, Newman M E J. Community structure in social and biological networks [J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2002, 99(12): 7821-7826.
- [3] Yu Wenwu, Chen Guanrong, Lü Jinhua. On pinning synchronization of complex dynamical networks [J]. *Automatica* 2009, 45(2): 429-435.
- [4] Albert R, Jeong H, Barabási A L. Diameter of the worldwide web [J]. *Nature*, 1999, 401(9): 130-131.
- [5] Williams R J, Martinez N D. Simple rules yield complex food webs [J]. *Nature*, 2000, 404(3): 180-183.
- [6] Hong H, Choi M Y. Synchronization on small-world networks [J]. *Phys Rev E* 2002, 65(2): 126-139.
- [7] Fan Jin, Wang Xiaofan. On synchronization in scale-free dynamical networks [J]. *Physica A*, 2005, 349(3/4): 443-451.
- [8] 周天寿, 胡长春. 三类基因振子和它们的基本动力学 [J]. *江西师范大学学报: 自然科学版* 2008, 32(1): 1-5.
- [9] 周天寿. 基因表达模型的研究进展: 概率分布 [J]. *江西师范大学学报: 自然科学版* 2012, 36(3): 221-229.
- [10] 汪小帆, 李翔, 陈关荣. 复杂网络理论及其应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.
- [11] Chen Guanrong, Wang Xiaofan, Li Xiang. Introduction to complex networks: models, structures and dynamics [M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [12] Wu Zhaoyan, Xu Xinjian, Chen Guanrong, et al. Adaptive synchronization and pinning control of colored networks [J]. *Chaos* 2012, 22(4): 134-137.

[1] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of 'small-

## Synchronization of Edge-Colored Dynamical Network

WU Zhao-yan, ZHANG Ping-hui

(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

**Abstract:** A class of edge-colored dynamical network models have been proposed according to the colored graph theory in mathematics. This kind of models can better describe and study the large-scale real complex systems coupled with large number of interacting individuals. Based on Lyapunov stability theory, the sufficient condition for the synchronization of edge-colored network is derived. Finally, a numerical example is provided to verify our derived result.

**Key words:** synchronization; edge-colored dynamical network; colored graph

(责任编辑: 曾剑锋)