

文章编号: 1000-5862(2014)01-0047-04

基于有理 Haar 小波求解分数阶 第2类 Fredholm 积分方程

张倩, 韩惠丽*, 张盼盼

(宁夏大学数学计算机学院, 宁夏 银川 750021)

摘要: 利用有理 Haar 小波函数数值求解分数阶第2类 Fredholm 积分方程, 用有理 Haar 小波定义及性质与配置法给出有理 Haar 小波积分算子矩阵, 将积分方程转化为代数方程组进行求解. 最后通过误差分析和数值算例将分数阶积分方程的精确解和用 Haar 小波所得数值解进行比较, 表明了该算法具有较高的精确度.

关键词: 有理 Haar 小波; 分数阶; 第2类 Fredholm 积分方程; 配置法

中图分类号: O 175.5

文献标志码: A

0 引言

近年来, 分数阶微积分受到越来越多数学家和物理学家的关注, 因为在一些科学领域, 比如物理、力学、化学和生物学中的很多实际问题都被转化为分数阶偏微分方程和积分方程. 所以, 求解分数阶积分方程就显得很重要. 但一般情况下, 很难得到其解析解, 因此, 获得其数值解具有一定的理论意义和应用价值. 求解分数阶积分方程的方法也很多, 比如 Adomian 分解法、配置法、功率谱密度法等. 最近小波变换被用来求解积分方程^[1-2], 主要用到的有 Haar 小波、Legendre 小波、Chebyshev 小波等, 并逐渐用这些方法求解了不同类型的分数阶微积分方程^[3-8]. 1976年, R. T. Lynch 给出了有理 Haar 小波的定义, 他通过去掉无理数和引进2元积分基将 Haar 变换有理化, 称之为有理化 Haar 小波, 它保存了 Haar 小波的所有性质, 具有很高的应用价值. 目前运用该方法求解整数阶积分方程的研究很多^[9-11], 但求解分数阶积分方程的相关文献却很少. 本文主要利用有理 Haar 小波求解了分数阶第2类 Fredholm 积分方程, 最后数值算例表明了该方法的有效性.

1 分数阶微积分定义

定义1 α 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分为

$$(I_{A+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_A^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad x > A, [\alpha] > 0, \quad (1)$$

$$(I_{B-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^B (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt \quad x < B, [\alpha] > 0, \quad (2)$$

其中(1)式和(2)式分别是 Riemann-Liouville 分数阶的左积分和右积分, $\Gamma(\alpha)$ 是伽马函数, α 是正实数, $[\alpha]$ 是 α 的整数部分. 若 $\alpha = n \in \mathbb{N}$, 则(1)式、(2)式和整数阶积分定义一致, 即

$$I_{A+}^{\alpha} f(t) = I_{A+}^n f(t) = \int_A^t d\tau_1 \int_A^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_A^{\tau_{n-1}} f(\tau_n) d\tau_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_A^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-n}},$$

对于右积分 $I_{B-}^{\alpha} f(t)$ 也类似.

α 阶分数阶微分定义为

$$(D^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt,$$

其中 $f^{(n)}(x) = d^n f / dx^n$, $n = [\alpha] + 1$. 若 $\alpha + 1 = n \in \mathbb{N}$, 则 $D^{\alpha} f(x)$ 是常微分方程 $f^{(n)}(x)$ 且 $(I^{\alpha} D^{\alpha} f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$.

2 有理 Haar 函数及函数逼近

记有理 Haar 函数为 $RH(r, t)$, $r = 1, 2, 3, \cdots$. 有

收稿日期: 2013-12-03

基金项目: 国家自然科学基金(11261041)资助项目.

通信作者: 韩惠丽(1972-), 女, 河北石家庄人, 教授, 博士, 主要从事奇异积分方程数值解法的研究.

理 Haar 函数的函数值仅由值 $+1, -1, 0$ 构成, 定义 $[a, b]$ 上的有理 Haar 函数^[12] 为

$$RH(r, t) = \begin{cases} 1, & J_1 \leq \frac{t-a}{b-a} < J_{1/2}, \\ -1, & J_{1/2} \leq \frac{t-a}{b-a} < J_0, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

其中 $J_u = (j-u)/2^i$, $\mu = 0, 1/2, 1$, $r = 2^i + j - 1$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$, $j = 1, 2, 3, \dots, 2^i$, $i = j = 0$ 当且仅当 $RH(0, t) = 1$, $a \leq t < b$.

有理 Haar 小波满足正交性

$$\int_a^b RH(r, t) RH(v, t) dt = \begin{cases} 2^{-i}(b-a), & r = v, \\ 0, & r \neq v, \end{cases}$$

其中 $v = 2^n + m - 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots, 2^n$.

定义在 $[a, b]$ 上平方可积的函数可以用有理 Haar 小波 $RH(r, t)$ 展开为

$$f(t) = \sum_{r=0}^{+\infty} a_r RH(r, t), \quad (3)$$

其中 $a_r = \frac{2^i}{(b-a)} \int_a^b f(t) RH(r, t) dt$, $r = 2^i + j - 1$, $i = 0, 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots, 2^i$. 当 $r = 0$ 时, 取 $i = j = 0$. 若令 $i = 0, 1, 2, \dots, m$, 则将(3) 式中的无穷级数截断且取它的前 k 项逼近, 有

$$f(t) = \sum_{r=0}^{k-1} a_r RH(r, t) = \sum_{r=0}^{k-1} a_r \varphi_r(t) = A^T \Psi(t), \quad (4)$$

其中 $k = 2^{m+1}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, A 和 Ψ 分别是有理 Haar 小波的系数向量和基向量函数, 表达式为 $A = [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}]^T$, $\Psi(t) = [\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_{k-1}(t)]^T$, 其中 $\varphi_r(t) = RH(r, t)$, $r = 0, 1, 2, \dots, k-1$.

取节点 $x_l = (2l-1)/(2k)$, $l = 1, 2, \dots, k$, 则(4) 式的离散形式为

$$f(x_l) = \sum_{r=0}^{k-1} a_r RH(r, x_l) = \sum_{r=0}^{k-1} a_r \varphi_r(x_l),$$

从而得到了有理 Haar 小波矩阵

$$\Phi_{k \times k} = [\Psi(a + \frac{1}{2k}(b-a)), \Psi(a + \frac{3}{2k}(b-a)), \dots, \Psi(a + \frac{2k-1}{2k}(b-a))].$$

相应地, 有 $F = A^T \Phi_{k \times k}$, 其中 F 的第 l 个分量为 $f(x_l)$.

3 分数阶第 2 类 Fredholm 积分方程

考虑分数阶积分方程

$$f(x) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b K(x, t) (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = u(x), \quad x \in [a, b] \quad (5)$$

的数值解, 已知核 $K(x, t)$ 和函数 $u(x)$, $\alpha > 0$ 是实数, 当 $\alpha = 1$ 时, (5) 式是一般的 Fredholm 积分方程. 必须要考虑到的情况是: 当 α 为非整数时, 表达式 $(x-t)^\alpha$ 仅当 $x \geq t$ 时有意义. 所以用下面的形式给出了分数阶第 2 类 Fredholm 积分方程

$$f(x) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^x K(x, t) (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt + \int_x^b K(x, t) (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt \right] = u(x), \quad x \in [a, b], \quad (6)$$

其中括号里面分别表示 Riemann-Liouville 分数阶的左积分和右积分. 记

$$g_r(x_l) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b K(x_l, t) (x_l-t)^{\alpha-1} \varphi_r(t) dt,$$

其中 $r = 0, 1, \dots, k-1$, $l = 1, 2, \dots, k-1$.

当 $x \rightarrow x_l$ 时, 引进矩阵

$$G = [g_r(x_l)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^{x_l} K(x_l, t) (t-x_l)^{\alpha-1} \varphi_r(t) dt + \int_{x_l}^b K(x_l, t) (x_l-t)^{\alpha-1} \varphi_r(t) dt \right]. \quad (7)$$

结合有理 Haar 小波的定义可以计算出该矩阵

$$(i) G = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_{1/2}} K(x_l, t) (t-x_l)^{\alpha-1} dt - \int_{\varepsilon_{1/2}}^{\varepsilon_0} K(x_l, t) (t-x_l)^{\alpha-1} dt \right], \quad x_l \in (-\infty, \varepsilon_1);$$

$$(ii) G = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_{\varepsilon_1}^{x_l} K(x_l, t) (x_l-t)^{\alpha-1} dt + \int_{x_l}^{\varepsilon_{1/2}} K(x_l, t) (t-x_l)^{\alpha-1} dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varepsilon_{1/2}}^{\varepsilon_0} K(x_l, t) (t-x_l)^{\alpha-1} dt \right], \quad x_l \in [\varepsilon_1, \varepsilon_{1/2}];$$

$$(iii) G = \left[\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_{1/2}} K(x_l, t) (x_l-t)^{\alpha-1} dt - \int_{\varepsilon_{1/2}}^{x_l} K(x_l, t) (x_l-t)^{\alpha-1} dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_l}^{\varepsilon_0} K(x_l, t) (t-x_l)^{\alpha-1} dt \right], \quad x_l \in [\varepsilon_{1/2}, \varepsilon_0];$$

$$(iv) G = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_{1/2}} K(x_l, t) (x_l-t)^{\alpha-1} dt - \int_{\varepsilon_{1/2}}^{\varepsilon_0} K(x_l, t) (x_l-t)^{\alpha-1} dt \right], \quad x_l \in (\varepsilon_0, +\infty),$$

其中 $\varepsilon_1 = a + (j-1)(b-a)/2^i$, $\varepsilon_{1/2} = a + (j-1/2)(b-a)/2^i$, $\varepsilon_0 = a + j(b-a)/2^i$.

由(4) 式可得

$$f(t) = \sum_{r=1}^k a_r \varphi_r(t), \quad (8)$$

将(8) 式代入(6) 式, 并利用(7) 式得

$$\sum_{r=1}^k a_r [\varphi_r(x_l) - g_r(x_l)] = u(x_l), \quad l = 1, 2, \dots, k.$$

转化为矩阵形式

$$A^T(\Phi - G) = U, \quad (9)$$

其中 $\Phi = [\varphi_r(x_i)]$, $U = [u(x_i)]$, $G = [g_r(x_i)]$. 通过 Matlab 解此线性方程组, 得到 (9) 式的解 A^T , 进而得到 (5) 式的解.

4 误差分析与数值算例

为了说明有理 Haar 小波的有效性和精确性, 利用该方法求解了文献 [1] 中的算例, 并与 Haar 小波方法进行了比较, 并给出了误差分析.

(i) 若精确解 f 是已知的, 可计算 $e_k(i) = f(x_i) - f_k(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, 并定义误差估计为 $\delta_k = \max_i |e_k(i)|$ 或全局误差 $\sigma_k = \|e_k\|_2/k$;

(ii) 若精确解 f 是未知的, 则先计算方程在分辨率 J 时的数值解 $f_J(x)$, 再计算分辨率为 $J+1$ 时的数值解 $f_{J+1}(x)$, 则 $e_J(x_i) = f_J(x_i) - f_{J+1}(x_i)$, 误差估计定义为 $\delta_J = \max_i |e_J(x_i)|$, $\sigma_J = \|f_J - f_{J+1}\|_2/k$.

例 1 考虑方程 $f(x) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^x xt(x-t)^{\alpha-1} f(t) dt + \int_x^1 xt(t-x)^{\alpha-1} f(t) dt \right] = 11x/12 - x^2$, $x \in [0, 1]$.

当 $\alpha = 1.0$ 时方程的精确解为 $f(x) = x(1 -$

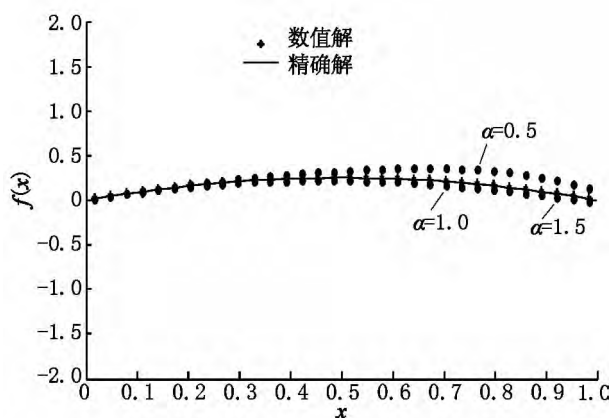


图1 $k=32$ α 取不同值的数值解与精确解

由表1和表2可知, 当 $\alpha = 1.0$ $k = 32, 64$ 时的数值解与精确解的误差很小, 并利用第2种误差计算方法得到了当 $\alpha = 1.5$ k 取不同值时的局部和全局误差估计, 说明了该方法的有效性和良好的逼近效果, 并随着 k 值的增大误差越来越小.

例 2 求解方程

$$f(x) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^x (2-x-t)(x-t)^{\alpha-1} f(t) dt + \int_x^1 (2-x-t)(t-x)^{\alpha-1} f(t) dt \right] = 15x/4 + x^2.$$

当 $\alpha = 1.0$ 时方程的精确解为 $f(x) = x^2 - 3$, $x \in$

$x)$. 表1给出了 $\alpha = 1.0$ k 取不同值的数值解和精确解以及误差. 表2给出了当 $\alpha = 1.5$ $k = 8, 16, 32$ 时方程的数值解的误差估计. 图1给出了当 $k = 32$ α 取不同值时方程精确解与数值解的比较, 图2则给出了当 $k = 64$ $\alpha = 1.0$ 时精确解与数值解的比较.

表1 当 $\alpha = 1.0$ k 取不同值时的数值解及精确解

x	$k=32$	$k=64$	精确解
1/32	0.030 03	0.030 21	0.030 27
5/32	0.131 60	0.131 78	0.131 83
9/32	0.201 92	0.202 09	0.202 15
13/32	0.240 99	0.241 15	0.241 21
17/32	0.248 81	0.248 97	0.249 02
21/32	0.225 38	0.225 53	0.225 58
25/32	0.170 70	0.170 85	0.170 89
29/32	0.084 77	0.084 91	0.084 96
δ_k	6.0×10^{-5}	3.113×10^{-6}	
σ_k	1.51×10^{-5}	5.505×10^{-7}	

表2 当 $\alpha = 1.5$ $k = 8, 16, 32$ 时数值解的误差估计

k	δ_J	σ_J
8	1.228×10^{-3}	2.008×10^{-4}
16	3.023×10^{-4}	3.558×10^{-5}
32	7.708×10^{-5}	6.297×10^{-6}

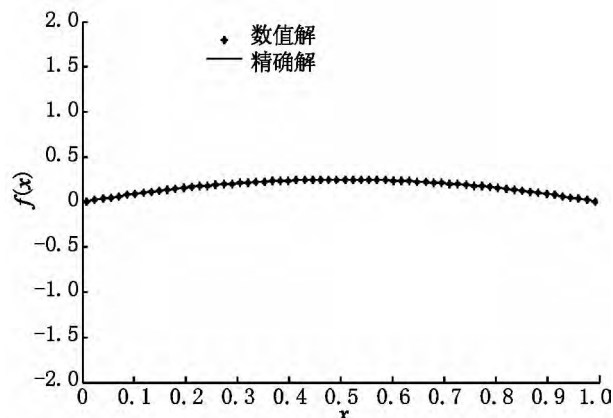
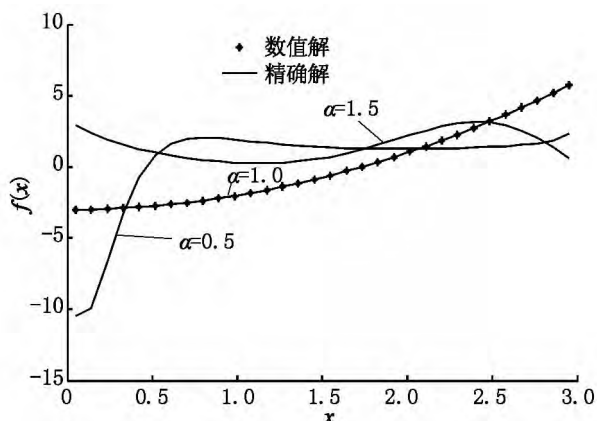
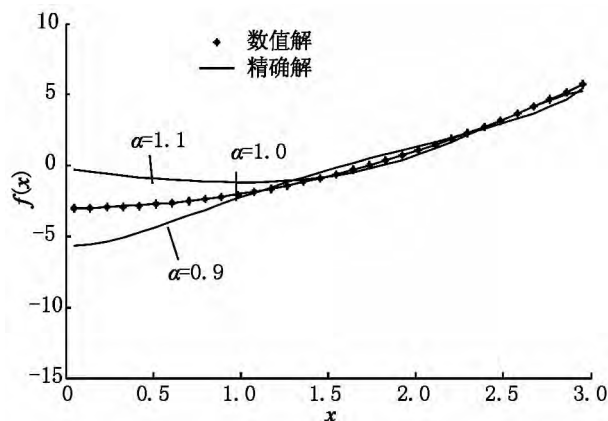


图2 $k=64$ $\alpha=1.0$ 的数值解与精确解

$[0, 3]$. 表3给出了当 $\alpha = 1.5$ $k = 16, 32$ 和 $\alpha = 1.0$ $k = 64, 128$ 时的误差估计与文献 [1] 所得误差的比较. 图3和图4分别给出了当 $k = 32$ $\alpha = 0.9, 1.0, 1.1$ 时的数值解与精确解的比较.

图3和图4是 α 取不同值时方程所得的数值结果, 说明了有理 Haar 小波方法的有效性, 并将当 $\alpha = 1.0, 1.5$ k 取不同值时所得数值结果与文献 [1] 进行比较, 误差明显更小, 说明本文方法更优一些. 且所得数值解随着 k 值的增大误差越小. 因此, 如果要得到好的解, 就应该相应的取较大 k 值.

图3 $\alpha=0.5, 1.0, 1.5$ $k=32$ 的数值解与精确解图4 $\alpha=0.9, 1.0, 1.1$ $k=32$ 的数值解与精确解表3 当 $\alpha=1.5$ $k=16, 32$ 和 $\alpha=1.0$ $k=64, 128$ 时的误差估计

α	k	本文方法 误差	本文方法 全局误差	文献[1]方法 误差	文献[1]方法 全局误差
1.5	16	$\delta_j = 0.1020$	$\sigma_j = 9.4 \times 10^{-3}$	$\delta_j = 0.386$	$\sigma_j = 4.3 \times 10^{-2}$
1.5	32	$\delta_j = 0.0302$	$\sigma_j = 1.9 \times 10^{-3}$	$\delta_j = 0.200$	$\sigma_j = 1.5 \times 10^{-2}$
1.0	64	$\delta_k = 2.7 \times 10^{-3}$	$\sigma_k = 8.9 \times 10^{-5}$	$\delta_k = 7.7 \times 10^{-3}$	$\sigma_k = 1.8 \times 10^{-4}$
1.0	128	$\delta_k = 5.9 \times 10^{-4}$	$\sigma_k = 1.5 \times 10^{-5}$	$\delta_k = 6.8 \times 10^{-4}$	$\sigma_k = 3.2 \times 10^{-5}$

5 结论

本文运用有理 Haar 小波求解了第 2 类分数阶 Fredholm 积分方程,利用配置法将 Fredholm 积分方程转换为代数方程组进行求解,最后通过误差分析和数值算例的数值解与精确解的比较说明了该算法的有效性,且与文献[1]中的结果进行比较,得到了该算法比文献[1]中的逼近效果更好,同时也得出了随着最大分辨率的增大,数值解的精度也越来越高。

6 参考文献

- [1] 张建平,韩惠丽,潘学锋.解线性 Fredholm 积分-微分方程组的 Legendre 方法[J].科学技术与工程,2009,24(9):7283-7287.
- [2] 秦君琴,何力军.含 Cauchy 核的奇异积分方程的 3 次样条小波解法[J].江西师范大学学报:自然科学版,2011,35(3):313-315.
- [3] Lepik U. Solving fractional integral equations by the Haar wavelet method[J]. Appl Math Comput, 2009, 214(2): 468-478.
- [4] Saeedi H, Mollahasani N, Moghadam M M, et al. An operation Haar wavelet method for solving fractional Volterra equations[J]. Int J Appl Math Comput Sci, 2011, 21(3): 535-547.
- [5] Li Yuanlu, Zhao Weiwei. Haar wavelet operational matrix

of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations [J]. Appl Math Comput, 2010, 216(8): 2276-2285.

- [6] Li Yuanlu. Solving a nonlinear fractional differential equation using Chebyshev wavelets [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simul, 2010, 15(9): 2284-2292.
- [7] Saeedi H, Moghadam M M, Mollahasani N, et al. A CAS wavelet method for solving nonlinear Fredholm integro-differential equations of fractional order [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2011, 16(3): 1154-1163.
- [8] Zhu Li, Fan Qibin. Solving fractional nonlinear Fredholm integro-differential equations by the second kind Chebyshev wavelet [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2012, 17(6): 2333-2341.
- [9] Maleknejad K, Mirzaee F. Using rationalized Haar wavelet for solving linear integral equations [J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 160(2): 579-587.
- [10] Maleknejad K, Mirzaee F, Abbasbandy S. Solving linear integro-differential equations system by using rationalized Haar functions method [J]. Appl Math Comput, 2004, 155(2): 317-328.
- [11] Reihani M H, Abadi Z. Rationalized Haar functions method for solving Fredholm and Volterra integral equations [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, 200(1): 12-20.
- [12] Ohkita M, Kobayashi Y. An application of rationalized Haar functions to solution of linear differential equations [J]. IEEE Trans Circuit Syst, 1986, 33(9): 853-862.

(下转第 82 页)

- demonstration of frequency-agile terahertz metamaterials [J]. *Nat Photonics* 2008 2(4):295-298.
- [14] Cavalleri A ,Toth C S ,Siders C W ,et al. Femtosecond structural dynamics in VO_2 during an ultrafast solid-solid phase transition [J]. *Phys Rev Lett* ,2001 ,87 (23) : 237401-237404.
- [15] Driscoll T ,Palit S ,Qazilbash M M ,et al. Dynamic tuning of an infrared hybrid-metamaterial resonance using vanadium dioxide [J]. *Appl Phys Lett* ,2008 ,93 (2) : 24101-24104.
- [16] Matthew J D ,Koray A ,Imogen M P ,et al. Frequency tunable near-infrared metamaterials based on VO_2 phase transition [J]. *Opt Expr* 2006 ,17(20) : 18330-18339.
- [17] Wen Qiye ,Zhang Huaiwu ,Yang Qinghui ,et al. A tunable hybrid metamaterial absorber based on vanadium oxide films [J]. *J Phys D: Appl Phys* ,2012 ,45 (23) : 235106-235111.
- [18] Wen Qiye ,Zhang Huaiwu ,Yang Qinghui ,et al. Terahertz metamaterials with VO_2 cut-wires for thermal tunability [J]. *Appl Phys Lett* 2010 ,97(2) : 21111-21113.
- [19] Hood P J ,Denatale J F. Millimeter-wave dielectric properties of epitaxial vanadium dioxide thin films [J]. *J Appl Phys* ,1991 ,70(1) : 376-381.
- [20] 郭荣新 ,袁继昌. 多蜂窝 MISO 通信系统中干扰消除策略研究 [J]. *江西师范大学学报:自然科学版* 2013 ,37 (1) : 37-41.
- [21] 杨鼎成. 单天线双层毫微微网络的下行中断性能研究 [J]. *江西师范大学学报:自然科学版* ,2013 ,37(6) : 557-560.

The Tunable Hybrid Meta-Material Based on Vanadium Oxide Phase Transition

YU Ping ,XIONG Kuang-wei

(School of Basic Sciences ,East China Jiaotong University ,Nanchang Jiangxi 330013 ,China)

Abstract: A tunable hybrid metamaterial in THz band has been designed and simulated. The resonance frequencies shift of this hybrid structure is obtained by actively varying the effective length of electrically resonant cross. This was realized by using Vanadium dioxide (VO_2) film bridges that can be triggered the insulator-metal phase transition at the four tops of the cross structure. Simulation results present that dual band resonances come from the individual structure. So this hybrid metamaterial based on VO_2 phase transition shows some advantages such as tunability ,frequency agility ,easily fabrication and polarization independency in THz band.

Key words: compound unusual transmitter; dioxide vanadium; the band tunable

(责任编辑: 冉小晓)

(上接第 50 页)

Numerical Solution of Fractional Fredholm Integral Equation of the Second Kind Based on the Rationalized Haar Wavelet

ZHANG Qian ,HAN Hui-li* ,ZHANG Pan-pan

(School of Mathematics and Computer Science ,Ningxia University ,Yinchuan Ningxia 750021 ,China)

Abstract: The rationalized Haar functions are used to solve the solution of fractional order Fredholm integral equation of the second kind. The integral equation can be reduced to a system of algebraic equations by using rationalized Haar wavelet and collection method. Finally ,the numerical solution of fractional integral equation with exact solution and the numerical solutions using Haar wavelet are compared by error analysis and numerical examples. The result shows that the algorithm has high accuracy.

Key words: rationalized Haar wavelet; fractional order; Fredholm integral equation of the second kind; collocation method

(责任编辑: 曾剑锋)