第 38 卷 第 3 期　　江西师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 38 No. 3
2014 年 5 月　　Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)　　May 2014

文章编号: 1000-5862(2014)03-0229-07

关于哈密尔顿指数的综述

熊黎明, 朱倩倩
(北京理工大学数学与统计学院, 北京　100081)

摘要: 图 G 的线图 $L(G)$ 是指以 G 的边集 $E(G)$ 为顶点集且 $L(G)$ 的 2 个顶点邻接当且仅当它们在 G 中有公共顶点. n 次迭代线图 $L^n(G)$ 递归地定义为 $L^0(G)=G, L^n(G)=L(L^{n-1}(G))$ $(n\in\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\})$, 其中 $L^1(G)=L(G)$ 并且假设 $L^{n-1}(G)$ 非空, 使得 $L^n(G)$ 是哈密尔顿的最小整数 n 称为哈密尔顿指数, 用 $h(G)$ 表示. 该文综述了(类)哈密尔顿指数的一些结果.

关键词: 迭代线图; 哈密尔顿指数; 类哈密尔顿指数

中图分类号: O 157.6　　　**文献标志码:** A

0　引言

0.1　术语和符号

本文考虑的图均为有限无向无环允许有重边的的图, 且文中术语和符号参见文献[1].

设 H 是图 $G=(V,E)$ 的 1 个子图, $V(H)$ 和 $E(H)$ 分别表示 H 的顶点集和边集, 对于 H 的任意顶点 u, $E_H(u)$ 表示 H 中与 u 关联的边集. 顶点 u 在 H 中的度定义为 $|E_H(u)|$, 记为 $d_H(u)$. H 的 2 个子图 G_1、G_2 在 H 中的距离(记为 $d_H(G_1,G_2)$) 定义为 $\min\{d_H(u_1,u_2): u_1\in V(G_1), u_2\in V(G_2)\}$, 其中 $d_H(u_1,u_2)$ 表示 H 中从 u_1 到 u_2 的最短路的路长, 记 $\overline{E}(H)=\{e\in E(G): d_G(e,H)=0\}$. 记 $V_i(G)=\{v\in V(G): d_G(v)=i\}$ 和 $W(G)=V(G)\setminus V_2(G)$. G 中的 1 条路叫做枝, 是指它的端点在 $W(G)$ 中且内点均在 $V_2(G)$ 中. 如果 1 条枝的长度为 1, 则它就没有内点, 用 $B(G)$ 表示 G 中所有的枝集合, 记 $B_1(G)=\{b\in B(G): V(b)\cap V_1(b)\neq\varnothing\}$, 用 $BB(G)$ 表示 G 中所有枝键集合.

图 G 的 1 个欧拉子图是指每个顶点的度均为偶数的连通图. 图 G 叫做超欧拉图是指 G 有 1 个生成的欧拉子图. 图 G 的 1 个偶因子是指每个顶点度均为偶数的生成子图. 图 G 是顶点泛圈图是指对于每 1 个顶点 $v\in V(G)$, 任意满足 $3\leqslant k\leqslant|V(G)|$ 的整数 k, 图 G 存在 1 个 k 圈使得 $v\in V(C_k)$. 设 s 是非负整数, 如果对图 G 至多 s 个顶点的移除使得得到的图是 1 个顶点泛圈图, 则称图 G 是 1 个 s 顶点泛圈图.

图 G 的线图(记为 $L(G)$) 是指以 G 的边集为顶点集, 且 $L(G)$ 的 2 个顶点邻接当且仅当它们在 G 中是关联的. 对于整数 $n\geqslant 1$, n 次迭代线图($L^n(G)$) 递归地定义为 $L(L^{n-1}(G))$, 其中 $L^0(G)=G$ 且 $L^1(G)=L(G)$, 使得 $L^n(G)$ 是哈密尔顿的最小整数 n 称为哈密尔顿指数, 用 $h(G)$ 表示. 之后文献[2]推广了哈密尔顿指数的概念, 引入了类哈密尔顿指数, 即给定一个性质 P, 使得 $L^n(G)$ 具有性质 P 的最小整数 n 叫做图 G 的类哈密尔顿指数; 使得 $L^n(G)$ 是哈密尔顿连通的最小整数 n 称为哈密尔顿连通指数, 用 $hc(G)$ 表示; 使得 $L^n(G)$ 是超欧拉图的最小整数 n 称为超欧拉指数, 用 $s(G)$ 表示; 使得 $L^n(G)$ 存在 2-因子的最小整数 n 称为 2-因子指数, 用 $f(G)$ 表示; 使得 $L^n(G)$ 存在偶因子的最小整数 n 称为偶因子指数, 用 $ef(G)$ 表示; 同理使得 $L^n(G)$ 是 s 顶点泛圈图的最小整数 n 称为 s 顶点泛圈指数, 用 $vp_s(G)$ 表示.

已知当图 G 是路时, 它的哈密尔顿指数是不存在的, 并且当图 G 是圈时, 它的哈密尔顿指数显然为 0, 本文中将不再考虑此 2 类图.

0.2　结论

1965 年, F. Harary 等[3]刻画了图 G 的使得线图 $L(G)$ 是哈密尔顿的. 自然地会考虑, 对于大多数图

收稿日期: 2014-02-10
基金项目: 国家自然科学基金(11071016; 11171129) 和教育部博士点基金(20131101110048) 资助项目.
作者简介: 熊黎明(1965-), 男, 江西安义人, 教授, 博士生导师, 主要从事图论方向研究.

来说,应用线图操作迭代有限次后得到的图将会是哈密尔顿的. 1968 年,G. Chartrand 等[4] 引入了哈密尔顿指数的概念,指出除路之外的连通图,其哈密尔顿指数总是存在的. 1983 年,L. H. Clark 等[2] 推广了哈密尔顿指数的定义,引入了类哈密尔顿指数的概念.

关于哈密尔顿指数和类哈密尔顿指数的研究结果不断地提供了新的定理和进一步的问题. 人们研究了哈密尔顿指数和类哈密尔顿指数的特征刻画、上下界的确定、补图的哈密尔顿指数、在收缩、闭包和圈闭包运算下图的稳定性等问题. 基于本文的写作目的,将集中讨论与总结上述问题的研究结论,并且给出相应的分析.

1 特征刻画

1968 年,G. Chartrand 等[4] 引入了哈密尔顿指数的概念,并证明了哈密尔顿指数的存在性,指出除路之外的连通图,其哈密尔顿指数总是存在的. 本节总结分析了哈密尔顿指数和类哈密尔顿指数的特征刻画.

1.1 哈密尔顿指数

定理1[3] 设 G 为至少有 3 条边的连通图,线图 $L(G)$ 是哈密尔顿的充要条件是图 G 存在 1 个欧拉子图 H 满足对任意边 $e \in E(G)$ 都有 $d_G(e,H) = 0$.

由定理 1 容易得到,如果 1 个图是哈密尔顿的,那么它的线图显然是哈密尔顿的,但是反之不一定成立. 之后文献 [5] 给出了当 $n \geqslant 2$ 时,迭代线图 $L^n(G)$ 是哈密尔顿的图的特征刻画.

定理2 设 G 为至少有 3 条边的连通图并且整数 $n \geqslant 2$,n 次迭代线图 $L^n(G)$ 是哈密尔顿的充要条件是 $EU_n(G) \neq \varnothing$,其中 $EU_n(G)$ 表示满足如下条件的 G 的子图 H 的集合:

(i) $d_H(x) \equiv 0(\bmod 2)$,$\forall x \in V(H)$;

(ii) $V_0(H) \subseteq \bigcup_{i=3}^{\Delta(G)} V_i(G) \subseteq V(H)$;

(iii) 对于 H 的任意子图 H_1,都有 $d_G(H_1, H - H_1) \leqslant n - 1$;

(iv) 对于每个枝 $b \in B(G) \setminus B_H(G)$,都有 $|E(b)| \leqslant n + 1$;

(v) 对于每个枝 $b \in B_1(G)$,都有 $|E(b)| \leqslant n$.

应该注意的是定理 1 不能表示为定理 2 中的 $n = 1$ 的情形,这表明定理 2 不是定理 1 的直接推广.

G. Chartrand 等[4] 得到非路树的哈密尔顿指数.

定理3 设 T 是非路树,则 $h(T) = k(T)$.

定理4[6] 如果图 G 的任意圈块都是哈密尔顿的,则 $h(T) = k(T)$.

由定理3 和定理4,运用图的分离块方法和收缩图法,文献 [5] 给出了图的哈密尔顿指数的特征刻画.

定理5 设图 G 是连通的,记 $S_{B_1}, S_{B_2}, \cdots, S_{B_t}$ 为 G 的所有分割块,则 $h(G) = \max\{h(S_{B_1}), h(S_{B_2}), \cdots, h(S_{B_t}), k(G)\}$.

由定理 5,可以归纳出满足 $h(T) = k(T)$ 的图的特征,即 $h(T) = k(T)$ 当且仅当 $h(S_{B_i}) \leqslant k(G)$ ($\forall i \in 1,2,\cdots,t$). 通过 Catlin 的收缩图方法,文献 [5] 给出了当 $h(G) \geqslant 4$ 时图的特征刻画. 随后,文献 [7] 提出了当哈密尔顿指数 $h(G) \geqslant 2$ 且最大度 $\Delta(G) \geqslant 3$ 时图的特征刻画. 文献 [8] 运用 Catlin 的收缩图方法,通过从图 G 中构造 $\tilde{H}^{(m)}(G)$ 确定了当 $h(G) \geqslant 2$ 时图的哈密尔顿指数,下面是这方面的一些结果.

定理6 设图 G 是连通的,记 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 为图 G 中长度至少是 2 的枝. 若 $h(G) \geqslant 4$,则

$$h(G) = h(G /\!/ \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}) + 1.$$

定理7 设 G 是非路连通图,记 $G_1, G_2, \cdots, G_k$ 为 $G[\{v: d_G(v) \geqslant 3\}] - \{e\}$ 的所有非平凡组成,其中 $\{e\}$ 满足是 G 的 1 个非平凡割边,当 $h(G) \geqslant 2$ 时,有 $h(G) = h(G /\!/ \{G_1, G_2, \cdots, G_m\})$.

定理8 若图 G 是连通的,并且满足 $\Delta(G) \geqslant 3$,$h(G) \geqslant 2$,则 $h(G) = \min\{m: \tilde{H}^{(m)}(G)\}$,其中 $\tilde{H}^{(m)}(G)$ 存在生成欧拉子图.

1.2 类哈密尔顿指数

目前研究的类哈密尔顿指数主要有超欧拉指数、2-因子指数、偶因子指数、哈密尔顿连通指数等. 下面分别给出类哈密尔顿指数的特征刻画.

1.2.1 *超欧拉指数* 类似于哈密尔顿迭代线图,文献 [9] 给出了当 $L^n(G)$ 是超欧拉迭代线图时 G 的特征刻画. 通过研究,人们得到超欧拉指数的确定与哈密尔顿指数的确定有很多类似的结论. 文献 [10] 证明了对于非路树 T,有 $s(T) = k(T)$;如果 G 的任意圈块是超欧拉的,则 $s(T) = k(T)$.

定理9 设 G 是至少有 3 条边的连通图,n 是非负整数,则 G 的迭代线图 $L^n(G)$ 是超欧拉的充要条件是 $S_n(G) \neq \varnothing$,其中 $S_n(G)$ 表示满足如下条件的

G 的子图 H 的集合:

(i) $d_H(x) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$, $\forall x \in V(H)$;

(ii) $V_0(H) \subseteq \bigcup_{i=3}^{\Delta(G)} V_i(G) \subseteq V(H)$;

(iii) 对于 H 的任意子图 H_1, 都有 $d_G(H_1, H - H_1) \leqslant n$, 如果 $d_G(H_1, H - H_1) = 0$ 说明 H 是连通的;

(iv) 对于每个枝 $b \in B(G) \setminus B_H(G)$, 都有 $|E(b)| \leqslant n + 1$;

(v) 对于每个枝 $b \in B_1(G)$, 都有 $|E(b)| \leqslant n$.

定理 10　设图 G 是连通的, 记 $S_{B_1}, S_{B_2}, \cdots, S_{B_t}$ 为 G 的所有分割块, 则 $s(G) = \max\{s(S_{B_1}), s(S_{B_2}), \cdots, s(S_{B_t}), k(G)\}$.

定理 11　设图 G 是连通的, 记 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 为图 G 中长度至少是 2 的枝, 若 $s(G) \geqslant 2$, 则

$$s(G) = s(G /\!/ \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}) + 1.$$

1.2.2　2-因子指数和偶因子指数　Gould 等[11] 在 1999 年给出了线图包含 2-因子时图 G 的特征刻画. 之后, M. Ferrara 等给出了当 $n \geqslant 2$ 时, 使得 $L^n(G)$ 包含 2-因子的图 G 的特征刻画[12].

星图 $K_{1,m}(m \geqslant 3)$ 的中心是指顶点度为 m 的点. 1 个控制 k-系统是指图 G 中 k 边不交的环形和星的集合, 其中 k 边不交的环形和星要求满足对图 G 的每条边 e, 要么 e 在 k 边不交的环形中, 要么 e 在星中.

定理 12　设 G 是至少有 3 条边的简单连通图, 则 $f(G) \leqslant 1$ 当且仅当对某些正整数 k 的取值, 图 G 存在 1 个控制 k-系统.

定理 13　设 G 是至少有 3 条边的连通图并且整数 $n \geqslant 2$, n 次迭代线图 $L^n(G)$ 存在 2-因子的充要条件是 $F_n(G) \neq \varnothing$, 其中 $F_n(G)$ 表示满足如下条件的 G 的子图 H 的集合:

(i) $d_H(x) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$, $\forall x \in V(H)$;

(ii) $V_0(H) \subseteq \bigcup_{i=3}^{\Delta(G)} V_i(G) \subseteq V(H)$;

(iii) 对于 H 的任意子图 H_1, 都有 $d_G(H_1, H - H_1) \leqslant n + 1$;

(iv) 对于每个枝 $b \in B(G) \setminus B_H(G)$, 都有 $|E(b)| \leqslant n + 1$;

(v) 对于每个枝 $b \in B_1(G)$, 都有 $|E(b)| \leqslant n$.

文献 [13] 中证明了定理 13 在去掉条件 (iii) 时仍然成立. 之后, 文献 [14] 给出了迭代线图 $L^n(G)$ 包含偶因子的特征刻画. 不难看出, 这个特征刻画与前面所得结果不同.

定理 14　设 G 是非路连通图, n 是任一正整数, $L^n(G)$ 包含偶因子的充要条件是满足下面 2 条:

(i) 对于每个枝 $b \in B_1(G)$, 都有 $|E(b)| \leqslant n$;

(ii) 任意奇的枝键存在长度最大为 $n+1$ 的枝.

由定理 14 推得, 如果图 G 是满足 $\beta(G) \geqslant 1$ 的非路简单图, 则 $ef(G) = \beta(G)$; 若图 G 是满足 $\beta(G) \geqslant 2$ 的非路简单图, 则 $ef(G) = f(G)$.

定理 15　设 G 是非路连通图且满足 $\max\{h_1(G), h_2(G) - 1, h_3(G) - 1\} \geqslant 1$, 则

$$ef(G) = \max\{h_1(G), h_2(G) - 1, h_3(G) - 1\}.$$

1.2.3　哈密尔顿连通指数　2013 年, Eminjan Sabir 等[15] 给出了非圈单循环图的 $hc(G) = h(G) + 1$ 的特征刻画.

定理 16　设 G 是 $|V(G)| \geqslant 4$ 的非圈单循环图, $hc(G) = h(G) + 1$ 当且仅当如下条件成立:

(i) $h(G) = \max\{\{l(Q)\}, \{l(P) + 1\}\} = l(P) + 1$;

(ii) $h(G) = \max\{\{l(Q)\}, \{l(P) + 1\}\} = l(Q)$,

其中 P 为端点 u 和 v 满足 $d_G(u) \geqslant d_G(v) = 3$ 的 G 中的最长复路, Q 为 G 中最长的端路.

2　指数的上下界分析

确定 1 个图的哈密尔顿指数 $h(G)$ 是 NP-完全困难的. 1976 年, M. R. Garey 等在文献 [6] 中证明了判定 1 个给定的立方图为哈密尔顿的是 NP-完全的. 1981 年, A. A. Bertossi 在文献 [7] 中证明了判断 1 个给定的线图为哈密尔顿的也是 NP-完全的. 近年来, 人们对于哈密尔顿指数以及类哈密尔顿指数上下界的研究更加深入. Z. Ryjáček 等[18] 证明了对任意确定的 $k \geqslant 1$, $(3, k)$-Hamind 是 NP-完全的; 3-Hamind 是 NP-完全的; 对任意图 G, 确定 $h_3(G)$ 有多项式次数的算法.

2.1　哈密尔顿指数的上下界

G. Chartrand 证明了非路连通图的哈密尔顿指数总是存在的, G. Chartrand 等[4] 给出了计算不是路的树的哈密尔顿指数的公式. 关于哈密尔顿指数的上界的文献早已存在, 下面 2 个定理叙述了比较容易描述的哈密尔顿指数的上界. 通过运用 Catlin 的收缩图方法, M. Sarazin 给出了非路连通简单图哈密尔顿指数的 1 个上确界.

定理 17[19]　设 G 是非路连通简单图, 记 l 为不包含在 3-圈中的最长枝的长度, 则 $h(G) \leqslant l + 1$.

定理 18[6]　设 G 是具有 n 个顶点的非路连通简单图, 则 $h(G) \leqslant n - \Delta(G)$.

2001 年, Xiong Liming 等[20] 将定理 18 进行了

拓展,得到下述定理.

定理 19 设 G 是非路连通图,则 $h(G) \leqslant d_{iam}(G) - 1$,并且此确界可以取到,其中 $d_{iam}(G)$ 为图 G 的直径.

2002 年,Xiong Liming 等[5] 给出了定理 18 的 1 个简单证明,并得到了下述定理.

定理 20 设 G 是非路连通图,则

$$h(G) \leqslant \max\{|E(b)|: b \in B(G) \backslash B_0(G)\} + 1.$$

由定理 20 可以推出对于非路简单连通图 G,上述不等式仍然成立,并且上述确界比定理 17 更强.

引言部分已经定义了枝键的符号表示 $BB(G)$,在总结下面的定理前先给出与枝键相关的其他符号的定义. 对任意枝键 $S \in BB(G)$,用 $l(S)$ 表示枝键 S 的长度,即最短的枝的长度. 定义 $BB_1(G) = B_1(G)$,$BB_2(G) = \{S \in BB(G): |S| = 1, b \in S$ 且在 G 中的端点度 $\geqslant 3\}$,$BB_3(G) = \{S \in BB(G): |S| \geqslant 3$ 且 $|S|$ 是奇的$\}$,

$$h_i(G) = \begin{cases} \max\{l(S): S \in BB_i(G)\}, i \in \{1,2,3\}, \\ \text{当 } BB_i(G) \text{ 非空时}, \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$

定理 21[7] 设 G 是非路连通图,则

$$h(G) \leqslant \max\{h_1(G), h_2(G) + 1, h_3(G) + 1\};$$

如果 $h(G) \geqslant 1$,则

$$h(G) \geqslant \max\{h_1(G), h_2(G) + 1, h_3(G) - 1\}.$$

定理21 给出了哈密尔顿指数 $h(G)$ 的 1 个下确界和 1 个上确界. 由定理 19 和定理 21 可以得到结论: 假设 G 是非路连通图并且 $h(G) \geqslant 1$,若 $h_3(G) = d_{iam}(G)$,则 $h(G) = d_{iam}(G) - 1$. 反过来,如果知道 $h(G) = d_{iam}(G) - 1$,则 $h_1(G)$,$h_2(G)$,$h_3(G)$ 的特征是什么样的? 同样地,满足 $h(G) = n - \Delta(G)$ 的 $h(G)$,$h_1(G)$,$h_2(G)$,$h_3(G)$ 的特征又是什么样的? 文献[7] 给出了 1 个结果: 若 G 是 2-连通简单图并且满足 $h(G) = n - \Delta(G)$,则 $h(G) \leqslant h_3(G) + 1 \leqslant 3$. 这个结果部分地回答了第 2 个问题,其它类似的问题还有待进一步研究. 之后文献[21] 得到: 假设 G 是具有 n 个顶点的 2-连通简单图,若 $h_3(G) \geqslant (n - \Delta(G) - 2)/3 \geqslant 7/3$,则 $h(G) = h_3(G) - 1$.

哈密尔顿指数的 1 个公式[5] 指出: 要确定 1 个图的哈密尔顿指数只需要考虑块以及所有的边都是割边的路. 注意到每个块都是 2-连通的,这促使人们可以只对 2-连通图哈密尔顿指数的研究. 由定理 21[21] 推导出: 对于非路 2-连通图,有

$$h_3(G) - 1 \leqslant h(G) \leqslant h_3(G) + 1.$$

定理 18 给出了哈密尔顿指数的 1 个上界 $h(G) \leqslant n - \Delta(G)$,对于 2-连通简单图,文献[21] 将定理 18 推广,得到下述定理.

定理 22 对于具有 n 个顶点的 2-连通简单图 G,如果 $\Delta(G) \leqslant n - 3$,则 $h(G) \leqslant (n - \Delta(G))/3$,除图 G 与 G_l 同构外,其中 G_l 是用长 $l = |V(G) + 1|/3 \geqslant 3$ 的路替换具有 3 条平行边的偶极子得到的.

P. Holub 对 2-连通图在 $h_3(G) - 1 \leqslant h(G) \leqslant h_3(G) + 1$[21] 的基础上进行了更加深入地讨论,他在文献[22] 中给出了禁用子图方面的 2-连通图的哈密尔顿指数的上界,并且引入了 $L^{-1}(G)$ 的定义,其中 $L^{-1}(G)$ 代表的图 H 是满足 $L(H) = G$ 的图.

定理23 设 k 是一正整数,G 是不包含长为 k 的路的 2-连通图,则 $h(G) < (k + 2)/3$.

定理 24 设 k 是一正整数,G 是不包含与 $L^{-1}(Z_k)$ 同构的子图的 2-连通图,则

$$h(G) < (k + 3)/2.$$

定理 25 设 i,j 是正整数,G 是 2-连通图,若 G 不包含任何以 $L^{-1}(B_{i,j})$ 作为子图的图($L^{-1}(B_{i,j})$ 不必非得存在),则 $h(G) < (i + j + 5)/3$.

定理 26 设 i,j 是正整数,G 是 2-连通图,如果 G 不包含任何以 $L^{-1}(N_{i,j,k})$ 作为子图的图($L^{-1}(N_{i,j,k})$ 不必非得存在),则 $h(G) < (i + j + k + 5)/3$.

定理 23 ~ 定理 26 的上界是否能够取到,P. Holub 并没有确定. 不过,他在文献[22] 中给出了使得定理24 ~ 定理26 的上界取值更小的图应满足的条件. 若图 G 是 2-连通图,而且具有使得 $h(G) = k$ 的最小顶点数,则定理24 中的上界为$(k + 1)/2$,定理25 中的上界为$(i + j + 2)/3$,定理 26 中的上界为$(i + j + k + 2)/3$.

定理 27[23] 设 G 是 2-连通简单图,t 是一非负整数,如果 $\kappa(G) \geqslant \alpha(G) - t$,则 $h(G) \leqslant \lfloor (2t + 2)/3 \rfloor$,其中 $\kappa(G)$ 为图 G 的连通度,$\alpha(G)$ 为图 G 的独立数.

2.2 类哈密尔顿指数的上下界

2.2.1 *超欧拉指数* 文献[10] 给出了超欧拉指数的上下界.

定理 28 设 G 是非路连通图,则

$$s(G) \leqslant \max\{h_1(G), h_2(G) + 1, h_3(G)\};$$

如果 $s(G) \geqslant 1$,则

$$s(G) \geqslant \max\{h_1(G), h_2(G), h_3(G) - 1\}.$$

若定理 28 的上下界均可以取到,则它们即为上

确界和下确界.

2.2.2　2-因子指数　2007 年，Xiong Liming 等[13]证明了 2-因子指数的上下界与哈密尔顿指数的大小关系.

定理 29　设 G 是非路连通图，则

$$h(G)-2\leqslant f(G)\leqslant h(G).$$

定理 30　设 G 是非路连通图，则

$$f(G)\geqslant \max\{h_1(G),h_2(G)-1\}.$$

由定理 29 ~ 定理 30 得到 1 个确定 2-因子指数的公式，如下所述.

定理 31　设 G 是非路连通图，当 $\beta(G)\geqslant 2$ 时，$f(G)=\beta(G)$；当 $\beta(G)\leqslant 1$ 时，$f(G)\leqslant 2$，其中

$$\beta(G)=\max\{h_1(G),h_2(G)-1\}.$$

2.2.3　哈密尔顿连通指数　2009 年，Chen Zhihong 等[24]给出了哈密尔顿连通指数的上下界，并证明了所有的上下界均可取到. 之后，E. Sabir 等[15]给出了哈密尔顿连通指数与哈密尔顿指数的大小关系.

定理 32　设 G 是非路非圈的连通图，k 是内部顶点度都为 2 的最长路的长度，则

$$k-1\leqslant hc(G)\leqslant \max\{d_{iam}(G),k-1\}.$$

设 $\kappa^3(G)=\min\{m: L^m(G)$ 是 3-连通$\}$，下述结果说明哈密尔顿连通指数与 $\kappa^3(G)$ 最多相差 2.

定理 33　设 G 是非路非圈的连通图，则

$$\kappa^3(G)\leqslant hc(G)\leqslant \kappa^3(G)+2.$$

定理 34　设 G 是非路非圈的连通图，则

$$hc(G)\leqslant |V(G)|-\Delta(G)+1.$$

定理 35　设 T 是非路 $|V(G)|\geqslant 5$ 的树，则 $h(T)\leqslant hc(T)\leqslant h(T)+1$，其中 $h(T)=\max\{\{l(P)+1\},\{l(Q)\}\}$，$P$ 和 Q 在定理 16 中已经定义.

定理 36　设 T 是非路 $|V(G)|\geqslant 4$ 的树，则

$$k\leqslant hc(G)\leqslant \max\{k+1,k'+1\},$$

其中 $k=\max\{\{l(P)+1\},\{l(Q)\}\}$，$k'$ 是最长圈路的长度.

2.2.4　泛圈指数　对泛圈指数，人们重点研究了 s 顶点泛圈指数. 文献[25]讨论了上界的取值，随后对于 3-边连通图改善了结论的上界，但是下界和上界是否可以取到仍然有待解决.

定理 37　设 G 是非路非圈非 $K_{1,3}$ 的连通简单图，则

$$vp_s(G)\leqslant\begin{cases} l(G)+s+1, & 0\leqslant s\leqslant 4,\\ l(G)+\lceil \log_2(s-2)\rceil+4, & s\geqslant 5.\end{cases}$$

定理 38　设 G 是根本 3-边连通图，则

$$vp_s(G)\leqslant\begin{cases} s+3, & 0\leqslant s\leqslant 6,\\ \lceil \log_2(s-2)\rceil+3, & s\geqslant 7.\end{cases}$$

3　补图的哈密尔顿指数

本节分析总结了补图的哈密尔顿指数. 2001 年，Xiong Liming[20]给出了图 G 和其补图 $\overline{G}$ 的哈密尔顿指数的关系. 随后，文献[21]推广了上述结论，考虑了 2-连通图的问题.

定理 39　设图 G 及其补图 $\overline{G}$ 都是顶点个数 $n\geqslant 61$ 的非路连通图，则要么 $L(G)$ 是哈密尔顿的，要么 $L(\overline{G})$ 是哈密尔顿的，若图 G 及其补图 $\overline{G}$ 都不是哈密尔顿的，则 $\max\{h(G),h(\overline{G})\}\leqslant(n-1)/2$，等号成立当且仅当图 G 或者补图 $\overline{G}$ 与顶点个数 $n=2t-1$ 的图 G'' 同构，其中 G'' 是由顶点个数为 t 的补图的 1 个顶点标志长为 $t-1$ 的路的顶点的 1 个端点得到的.

定理 40　设图 G 及其补图 $\overline{G}$ 都是顶点个数 $n\geqslant 74$ 的 2-连通图，如果图 G 及其补图 $\overline{G}$ 都不是哈密尔顿的，则 $\max\{h(G),h(\overline{G})\}\leqslant(n-3)/6$.

4　(类)哈密尔顿指数在收缩、闭包和圈闭包运算下的稳定性

2005 年，Xiong Liming 等[26]通过 1 个特殊图例首次证明了对 1 个图增加 1 条边不会使得它的哈密尔顿指数增加. 随后运用这个结果证明了对图进行收缩和闭包(此时要求图为无爪图)操作均不会影响哈密尔顿指数的取值，即哈密尔顿指数是稳定的. 图 G 的子图 F 的所有附着点的集合记作 $A_G(F)$. $G|_F$ 表示将图 G 的子图 F 的顶点标号为 v_F 并且用与 v_F 附着的有 1 个顶点的度为 1 的边替换图中存在的环之后得到的图，称 $G|_F$ 是图 G 的子图 F 收缩得到的图，其中 $|E(G)|=|E(G|_F)|$. $cl(G)$ 表示图 G 的闭包.

定理 41　设 G 是非路非连通图，F 是图 G 的 $A_G(F)$-收缩子图，则 $h(G)=h(G|_F)$.

定理 42　设 G 是至少有 3 条边的非路无爪连通图，则 $h(G)=h(cl(G))$.

近来 H. Broersma 等提出了无爪图闭包的加强定义-圈闭包. 文献[27]证明了闭无爪图在圈闭包运算下其哈密尔顿指数是稳定的. 若无爪图 $G=cl(G)$，则称 G 为闭无爪图. $cl_C(G)$ 表示图 G 的圈闭包.

定理 43　设 G 是至少有 3 条边的非路连通闭无爪图，则 $h(G)=h(cl_C(G))$.

文献[28]在定理 43 的基础上,研究了当无爪图的迭代线图 $L^n(G)$ 存在最多有 k 分支的 2-因子时,对图 G 进行闭包操作后得到的迭代线图 $L^n(cl(G))$ 的稳定性,得到下述定理.

定理 44 设图 G 是无爪连通图,整数 $n \geqslant 1$,$L^n(G)$ 存在 1 个最多有 k 个分支的 2-因子的充要条件是 $L^n(cl(G))$ 存在 1 个最多有 k 分支的 2-因子.

2010 年,Xiong Liming 等[29]首次证明了对 1 个图在度数和至少是 3 的 2 顶点之间增加 1 条边不会使得它的超欧拉指数增加. 运用这个结果得到了与哈密尔顿指数的稳定性类似的结论.

定理 45 设 G 是非路非超欧拉图,F 是图 G 的 $A_G(F)$-收缩子图,则 $s(G) = s(G|_F)$.

定理46 设 G 是至少有 3 条边的非路无爪连通图,则 $s(G) = s(cl(G))$.

5 进一步研究的问题

用 $\omega(G)$ 表示图 G 的分支数. 设 G 是 1 个非平凡简单图,且非完全图,t 是 1 个实数,若对每个 $S \subset V(G)$ 且 $\omega(G-S) > 1$ 时,有 $|S| \geqslant t\omega(G-S)$,则称图 G 是 t-坚韧图. 使图 G 是 t-坚韧的最大数 t 称为图 G 的坚韧度,记作 $t(G)$,即

$$t(G) = \min_{S \subset V(G)} \left\{ |S| / \omega(G-S) \right\},$$

S 是图 G 的顶点割.

图的哈密尔顿指数与坚韧度间存在一定的关系,可得下述结论.

定理 47 设 G 是 1 个非平凡简单图,如果坚韧度 $t(G) > 1$,则哈密尔顿指数 $h(G) \leqslant 2$.

证 因为 $t(G) > 1$,所以 $\forall S \subset V(G)$ 有

$$|S| / \omega(G-S) > 1.$$

设图 G 的连通度为 $\kappa(G)$,若 $\kappa(G) \leqslant 2$,令 S_0 是 G 的 1 个最小顶点割,则

$$|S_0| \leqslant 2,且\ \omega(G-S_0) \geqslant 2,$$

从而 $|S_0| / \omega(G-S_0) \leqslant 1$,这与 $|S| / \omega(G-S) > 1$ 对任意 $S \subset V(G)$ 成立矛盾,故 $\kappa(G) \geqslant 3$.

已知 $\kappa(G) \leqslant \delta(G)$ ($\delta(G)$ 表示图 G 的顶点最小度),所以 $\delta(G) \geqslant 3$. 因此,图 G 的哈密尔顿指数 $h(G) \leqslant 2$. 证毕.

最后以下列问题结束综述.

问题: 给出一般的禁用子图与哈密尔顿指数的关系.

6 参考文献

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications [M]. New York: American Elsevier, 1976.

[2] Clark L H, Wormald N C. Hamiltonian-like indices of graphs [J]. Ars Combinatoria, 1983, 15: 131-148.

[3] Harary F, Nash-Williams C St J A. On Eulerian and Hamiltonian graphs and line graphs [J]. Canad Math Bull, 1965, 8(6): 701-709.

[4] Chartrand G, Wall C E. On the Hamiltonian index of a graph [J]. Studia Sci Math Hungar, 1973, 8: 43-48.

[5] Xiong Liming, Liu Zhanhong. Hamiltonian iterated line graphs [J]. Discrete Math, 2002, 256(1/2): 407-422.

[6] Sarazin M L. A simple upper bound for the Hamiltonian index of a graph [J]. Discrete Math, 1994, 134(1/2/3): 85-91.

[7] Xiong Liming, Broersma H J, Li Xueliang, et al. The Hamiltonian index of a graph and its branch-bonds [J]. Discrete Math, 2004, 285(1/2/3): 279-288.

[8] Yi Hong, Lin Jianliang, Tao Zhisui, et al. The Hamiltonian index of graphs [J]. Discrete Math, 2009, 309(1): 288-292.

[9] 熊黎明,刘展鸿,易桂生. Super-Euler 迭代线图的特征刻划 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2000, 24(2): 107-110.

[10] Xiong Liming, Yan Huiya. On the supereulerian index of a graph [J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2005, 14(5): 453-457.

[11] Gould R, Hynds E. A note on cycles in 2-factors of line graphs [J]. Bull ICA 1999, 26: 46-48.

[12] Ferrara M, Gould R, Hartke S. The structure and existence of 2-factors in iterated line graphs [J]. Discussiones Mathematicae: Graph Theory, 2007, 27(3): 507-526.

[13] Xiong Liming, Li Mingchu. On the 2-factor index of a graph [J]. Discrete Math, 2007, 307(21): 2478-2483.

[14] Xiong Liming. The existence of even factors in iterated line graphs [J]. Discrete Math, 2008, 308(23): 5891-5894.

[15] Sabir Eminjan, Vumar Elkin. Spanning connectivity of the power of a graph and Hamiltonian connected index of a graph [J]. Graphs and Combinatorics (to appear). DOI: 10.1007/s00373-013-1362-4.

[16] Garey M R, Johnson D S, Tarjan R E. The planar Hamiltonian circuit problem is NP-complete [J]. SIAM J Comput, 1976, 5(4): 704-714.

[17] Bertossi A A. The edge Hamiltonian path problem is NP-complete [J]. Inform Process Lett, 1981, 13(4/5): 157-159.

[18] Ryjáček Z, Woeginger G J, Xiong Liming. Hamiltonian in-

dex is NP-complete [J]. Discrete Applied Math, 2011, 159(4): 246-250.

[19] Lai Hongjian. On the Hamiltonian index [J]. Discrete Math, 1988, 69(1): 43-53.

[20] Xiong Liming. The Hamiltonian index of a graph [J]. Graphs Combin, 2001, 17(4): 775-784.

[21] Xiong Liming, Wu Quxin. The Hamiltonian index of a 2-connected graph [J]. Discrete Math, 2008, 308(24): 6373-6382.

[22] Holub P. Forbidden subgraphs and the Hamiltonian index of a 2-connected graph [EB/OL]. Ars Combin. [2014-03-12]. http://www.combinatorialmath.ca/arscombinatoria/toc.html.

[23] Han Longsheng, Lai Hongjian, Xiong Liming, et al. The Chvátal-Erdös condition for supereulerian graphs and the Hamiltonian index [J]. Discrete Math, 2010, 310(15/16): 2082-2090.

[24] Chen Zhihong, Lai Hongjian, Xiong Liming, et al. Hamilton-connected indices of graphs [J]. Discrete Math, 2009, 309(14): 4819-4827.

[25] Zhang Lili, Shao Yehong, Chen Guihai, et al. *s*-vertex pancyclic index [J]. Graphs and Combinatorics, 2012, 28(3): 393-406.

[26] Xiong Liming, Ryjáček Z, Broersma H J. On stability of the Hamiltonian index under contractions and closures [J]. Journal of Graph Theory, 2005, 49(2): 104-115.

[27] 王丽娜, 熊黎明. 闭无爪图在圈闭包运算下哈密尔顿指数的稳定性 [J]. 应用数学学报, 2010, 33(3): 424-431.

[28] Saito A, Xiong Liming. Closure, stability and iterated line graphs with a 2-factor [J]. Discrete Math, 2009, 309(16): 5000-5010.

[29] Xiong Liming, Li Mingchu. Supereulerian index is stable under contractions and closures [J]. Ars Combinatoria, 2010, 97: 129-142.

The Hamiltonian Index of a Graph——A Survey

XIONG Li-ming, ZHU Qian-qian

(College of Mathematics and Statistics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

Abstract: Let G be a simple graph. The line graph $L(G)$ of a graph G is a graph which has $E(G)$ as its vertex set and two vertices are adjacent in $L(G)$ if and only if they share an end vertex in G. The n-th iterated line graph $L^n(G)$ is defined recursively by $L^0(G) = G, L^n(G) = L(L^{n-1}(G))$ ($n \in \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$), where $L^1(G) = L(G)$ and $L^{n-1}(G)$ is assumed to be nonempty. The hamiltonian index of a graph G, denoted by $h(G)$, is the smallest integer n such that $L^n(G)$ is hamiltonian. The results of hamiltonian (like) indices of graphs have been summaric-zed.

Key words: iterated line graph; hamiltonian index; hamiltonian-like index

(责任编辑: 王金莲)