文章编号: 1000-5862(2015)05-0519-03

整函数差分的零点和不动点

甘会林

(广东财经大学数学与统计学院,广东 广州　510320)

摘要: 讨论了超越整函数 $f(z)$ 的差分的零点和不动点的存在性,在一定条件下,证明 $\Delta^2 f(z)$ 有无穷多个零点和无穷多个不动点,$\Delta^2 f(z)/f(z)$ 有无穷多个零点.

关键词: 差分; 零点; 不动点

中图分类号: O 174.55　　**文献标志码**: A　　**DOI**: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2015.05.16

0　引言及主要结果

本文使用值分布理论的标准记号[1-3],设 $f(z)$ 是复平面上的亚纯函数,用 $\sigma(f)$ 表示 $f(z)$ 的增长级,$\lambda(f)$ 表示 $f(z)$ 的零点收敛指数. Δf 表示差分算子,具体定义如下,常数 $c\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$.

$$\Delta f(z)=f(z+c)-f(z),$$
$$\Delta^{n+1}f(z)=\Delta^n f(z+c)-\Delta^n f(z),n=0,1,2,\cdots.$$

近年来,对亚纯函数差分的零点和不动点的存在性研究颇多[4-15],其中许多文献要求 $\sigma(f)<1$. 当 $\sigma(f)=1$ 时,研究成果较少. 陈宗煊和孙光镐在文献[6]中证明了下述定理.

定理A　设 $f(z)$ 为超越整函数,级 $\sigma(f)=\sigma=1$,$f(z)$ 有无穷多个零点且零点收敛指数 $\lambda(f)=\lambda<1$. 常数 $c\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$,则

$$g(z)=\Delta f(z)=f(z+c)-f(z)$$

有无穷多个零点和无穷多个不动点. 此外,设 $H=\{z_j\}$ 是由 $f(z)$ 的所有不同零点构成的集合,且 H 满足下面 2 个条件中的任一个:

(i) 至多有有限个零点 z_j,z_k 满足 $z_j-z_k=c$;

(ii) $\liminf\limits_{j\to+\infty}|z_{j+1}/z_j|=l>1$,则

$$G(z)=\frac{\Delta f(z)}{f(z)}=\frac{f(z+c)-f(z)}{f(z)}$$

有无穷多个零点和无穷多个不动点.

本文考虑 $g_2(z)=\Delta^2 f(z)=\Delta f(z+c)-\Delta f(z)$,得到类似结论. 在将定理 A 中 H 满足的条件改变之后,还考虑了 $G_2(z)=\Delta^2 f(z)/f(z)$,并证明 $G_2(z)$ 有无穷多个零点.

定理1　设 $f(z)$ 为超越整函数,级 $\sigma(f)=\sigma=1$,$f(z)$ 有无穷多个零点且零点收敛指数 $\lambda(f)=\lambda<1$,常数 $c\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$,则

$$g_2(z)=\Delta^2 f(z)=\Delta f(z+c)-\Delta f(z)$$

有无穷多个零点和无穷多个不动点.

定理2　设 $f(z)$ 如定理 1 所述,且 $f(z)$ 至多有有限个零点 z_j 满足 $f(z_j+2c)=2f(z_j+c)$,则

$$G_2(z)=\frac{\Delta^2 f(z)}{f(z)}=\frac{\Delta f(z+c)-\Delta f(z)}{f(z)}$$

有无穷多个零点.

下面的例子表明定理中的条件 $\lambda(f)=\lambda<1$ 是不能去掉的.

例1　对 $f(z)=1+e^{-z}$ 有 $\sigma(f)=1$ 和 $\lambda(f)=1$,但 $g_2(z)=e^{-z}(e^{-c}-1)^2$ 没有零点. $G_2(z)=(e^{-c}-1)^2/(1+e^z)$ 也没有零点.

1　引理

为证明定理,需涉及术语 ε-集.

注1　根据文献[6],ε-集 E 是可数个不包含原点的开圆盘的并集. 如果 E 是一个 ε-集,则对 $r\geqslant 1$ 并使圆 $S(0,r)$ 与 E 相交的 r 值集有有限对数测度和有限线测度,且对几乎所有实数 θ,集 E 与射线 $\arg z=\theta$ 相交的交点是有界的.

引理1[4]　设 $g(z)$ 在复平面上超越亚纯,级 $\sigma(g)<1$. 设 $h>0$,则存在一个 ε-集 E 使

$$\frac{g'(z+c)}{g(z+c)}\to 0,\frac{g(z+c)}{g(z)}\to 1,z\to\infty,z\in\mathbf{C}\setminus E$$

对所有满足 $|c|\leqslant h$ 的 c 一致成立.

收稿日期: 2014-12-25

基金项目: 国家自然科学基金(11101096,11301140)和广东省自然科学基金(s2012010010376)资助项目.

作者简介: 甘会林(1977-),女,江西萍乡人,副教授,主要从事函数论方向研究.

引理2[16] 设$f_j(z)(j=1,\cdots,n)(n\geqslant 2)$都是亚纯函数,$g_j(z)(j=1,\cdots,n)$都是整函数,且满足下面3个条件:

(i) $\sum_{j=1}^{n} f_j(z)e^{g_j(z)}\equiv 0$;

(ii) 当$1\leqslant j<k\leqslant n$时,$g_j(z)-g_k(z)$不等于常数;

(iii) 当$1\leqslant j\leqslant n,1\leqslant h<k\leqslant n$时,$T(r,f_j)=o\{T(r,e^{g_h-g_k})\},r\to\infty,r\notin E$,其中$E\subset(1,\infty)$,且$E$的线测度和对数测度都有穷,则$f_j(z)\equiv 0(j=1,\cdots,n)$.

引理3[16] 设$f(z)$为非常数的周期亚纯函数,则级$\sigma(f)\geqslant 1$.

2 定理的证明

定理1的证明 根据定理1的条件,可设$f(z)=h(z)e^{az+b}$,其中a,b为常数,$a\neq 0$,$h(z)$为超越整函数,且$\sigma(h)=\lambda(h)=\lambda(f)<1$,则

$$g_2(z)=\Delta^2 f(z)=\Delta f(z+c)-\Delta f(z)=$$
$$f(z+2c)-2f(z+c)+f(z)=$$
$$h(z+2c)e^{az+2ac+b}-2h(z+c)e^{az+ac+b}+h(z)e^{az+b}=$$
$$[h(z+2c)e^{2ac}-2h(z+c)e^{ac}+h(z)]e^{az+b}. \quad (1)$$

先证$g_2(z)$有无穷多个零点.假设$g_2(z)$只有有限个零点,则由(1)式知,

$$h(z+2c)e^{2ac}-2h(z+c)e^{ac}+h(z)\not\equiv 0.$$

故存在非零多项式$p(z)$使

$$h(z+2c)e^{2ac}-2h(z+c)e^{ac}+h(z)=p(z). \quad (2)$$

由引理1,存在ε-集E_1,E_2分别使下面2个等价式成立

$$h(z+2c)\sim h(z),z\to\infty,z\in\mathbf{C}\backslash E_1,$$
$$h(z+c)\sim h(z),z\to\infty,z\in\mathbf{C}\backslash E_2.$$

所以当$z\to\infty$且$z\in\mathbf{C}\backslash(E_1\cup E_2)$时,有

$$h(z+2c)e^{2ac}-2h(z+c)e^{ac}+h(z)\sim$$
$$(e^{2ac}-2e^{ac}+1)h(z)=(e^{ac}-1)^2h(z). \quad (3)$$

由(2)~(3)式得

$$(e^{ac}-1)^2h(z)\sim p(z),z\to\infty,z\in\mathbf{C}\backslash(E_1\cup E_2).$$

若$e^{ac}=1$,则上式与$p(z)$是非零多项式矛盾,若$e^{ac}\neq 1$,则上式与$h(z)$为超越整函数矛盾.所以$g_2(z)$有无穷多个零点.

再证$g_2(z)$有无穷多个不动点.令

$$g_2^*(z)=g_2(z)-z, \quad (4)$$

则只需证$g_2^*(z)$有无穷多个零点.假设$g_2^*(z)$只有有限个零点,则可写$g_2^*(z)=p^*(z)e^{dz+\alpha}$,其中$p^*(z)$为非零多项式,$d,\alpha$为常数,$d\neq 0$.不失一般性,可假设$\alpha=b$.事实上,若$\alpha\neq b$,则$p^*(z)e^{dz+\alpha}=e^{\alpha-b}p^*(z)e^{dz+b}$,且$e^{\alpha-b}p^*(z)$仍为非零多项式,仍旧用$p^*(z)$表示.所以由(1)式和(4)式得

$$p^*(z)e^{dz+b}=h_0(z)e^{az+b}-z, \quad (5)$$

其中$h_0(z)=h(z+2c)e^{2ac}-2h(z+c)e^{ac}+h(z)$,$h_0(z)$为超越函数且$\sigma(h_0)<1$.

可断言$a=d$.若$a\neq d$,则把(5)式写成$p^*(z)e^{dz+b}-h_0(z)e^{az+b}+ze^0=0$,它满足引理2的条件,所以$p^*(z)\equiv h_0(z)\equiv z\equiv 0$,矛盾.

由(5)式得

$$(h_0(z)-p^*(z))e^{az+b}=z. \quad (6)$$

由引理2和(6)式有$h_0(z)-p^*(z)\equiv 0,z\equiv 0$,矛盾.所以$g_2^*(z)$有无穷多个零点,即$g_2(z)$有无穷多个不动点.定理1证毕.

定理2的证明 利用定理1的证明过程.假设$G_2(z)$只有有限个零点.因

$$G_2(z)=\frac{\Delta^2 f(z)}{f(z)}=$$
$$\frac{h(z+2c)e^{2ac}-2h(z+c)e^{ac}+h(z)}{h(z)}\triangleq\frac{h_0(z)}{h(z)},$$

所以$h_0(z)$的所有零点一定也是$h(z)$的零点,至多有限个例外.设$h_0(z)$的零点集为$\{z_j^*\}$,则$h_0(z_j^*)=0$,$h(z_j^*)=0$,至多有限个z_j^*例外.而$h_0(z_j^*)=0$,即

$$h(z_j^*+2c)e^{2ac}-2h(z_j^*+c)e^{ac}+h(z_j^*)=0,$$

得$h(z_j^*+2c)e^{ac}=2h(z_j^*+c)$.所以有

$$f(z_j^*)=h(z_j^*)e^{az_j^*+b}=0,$$
$$f(z_j^*+2c)=h(z_j^*+2c)e^{az_j^*+2ac+b}=2h(z_j^*+c)e^{az_j^*+ac+b}=2f(z_j^*+c).$$

这与定理2的条件矛盾.所以$G_2(z)$有无穷多个零点.

3 参考文献

[1] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations [M]. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1993.

[2] Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon, 1964.

[3] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[4] Whittaker J M. Interpolatory functions theory [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1935.

[5] Hayman W K. Slowly growing integral and subharmonic functions [J]. Comment Math Helv, 1960, 34(1): 75-84.

[6] Chen Zongxuan, Shon K H. On zeros and fixed points of differences of meromorphic functions [J]. J Math Anal Appl, 2008, 344(1): 373-383.
[7] Chen Zongxuan, Shon K H. Estimates for the zeros of differences of meromorphic functions [J]. Sci China Ser A, 2009, 52(11): 2447-2458.
[8] 张然然, 陈宗煊. 亚纯函数差分多项式的值分布 [J]. 中国科学, 2012, 42(11): 1115-1130.
[9] 陈美茹, 陈宗煊. 某类均差分的值分布 [J]. 数学学报, 2012, 55(5): 855-860.
[10] Bergweiler W, Langley J K. Zeros of differences of meromorphic functions [J]. Math Proc Cambridge Philos Soc, 2007, 142(1): 133-147.
[11] Cui Weiwei, Yang Lianzhong. Zeros and fixed points of difference operators of meromorphic functions [J]. Acta Math Sci, 2013, 33B(3): 773-780.
[12] Fletcher A, Langley J K, Meyer J. Slowly growing meromorphic functions and the zeros of differences [J]. Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy, 2009, 109(2): 147-154.
[13] 李爱平, 易才凤, 谭祖山. 一类差分亚纯函数零点的估计 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2010, 34(2): 183-187.
[14] 谭祖山, 易才凤, 李爱平. 一类差分函数的不动点 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2011, 35(4): 358-361.
[15] 易才凤, 李爱平. 一类复合差分函数零点的估计 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2012, 36(1): 41-46.
[16] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1995.

The Zeros and Fixed Points of Difference of Entire Functions

GAN Huilin

(School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Finance & Economics, Guangzhou Guangdong 510320, China)

Abstract: In this paper, the existence of zeros and fixed points of difference of transcendental entire functions is investigated. Under some conditions, $\Delta^2 f(z)$ has infinitely many zeros and infinitely many fixed points, and $\Delta^2 f(z)/f(z)$ has infinitely many zeros.

Key words: difference; zero; fixed point

(责任编辑: 王金莲)