文章编号:1000-5862(2015)05-0522-04

# 一类线性算子的有界性探讨

林　燕,范　超
(中国矿业大学(北京)理学院,北京　100083)

**摘要:** 研究 1 类在调和分析与复分析领域中有着重要应用的线性算子—Toeplitz 型算子,建立了由 Calderón-Zygmund 型算子与 BMO 函数生成的 Toeplitz 型算子的 sharp 极大估计,并由此得到了该类 Toeplitz 型算子在 Lebesgue 空间的有界性.

**关键词:** Toeplitz 型算子; 有界性; Calderón-Zygmund 型算子; BMO 函数
**中图分类号:** O 174.2; G 642　　**文献标志码:** A　　**DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2015.05.17

## 0 引言

赋范线性空间和线性算子理论是泛函分析与实分析等课程中的重要内容[1-4]. 对线性算子而言,其有界性等价于算子的连续性,因而对线性算子有界性质的研究具有重要意义.

Calderón-Zygmund 型算子是调和分析研究领域中一类重要的线性算子,对 Calderón-Zygmund 型算子的研究起源于经典的 Calderón-Zygmund 算子,其理论是 20 世纪调和分析领域的重要成果之一,已经在 Fourier 分析、复分析、算子理论等方面有着很多重要应用. Toeplitz 型算子是交换子的一种重要推广,其自身也是一类线性算子,在复分析等研究领域有着很多重要应用. 迄今为止,已经有很多研究工作涉及奇异积分交换子在许多重要的函数空间上的有界性质[5-8].

文献[9]给出 Calderón-Zygmund 型算子的定义.

**定义 1**　设 $S(\mathbf{R}^n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 Schwartz 函数空间,$S'(\mathbf{R}^n)$ 是其对偶,即 $\mathbf{R}^n$ 上的缓增广义函数空间. 设 $T: S(\mathbf{R}^n) \to S'(\mathbf{R}^n)$ 是以 $K(\cdot,\cdot)$ 为核的线性算子,定义为

$$T(f)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y, f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n),$$

若满足如下 3 个条件:

(i) $T$ 可以扩张为 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上的连续算子;

(ii) 除对角线 $\{(x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n: x = y\}$ 外,$K$ 是光滑的,且

$$\int_{|x-y|>2|z-y|} (|K(x,y) - K(x,z)| + |K(y,x) - K(z,x)|)\,\mathrm{d}x \leqslant C,$$

其中 $C(>0)$ 是与 $y$ 和 $z$ 无关的常数;

(iii) 存在正常数序列 $\{C_j\}$,使得 $\forall j \in \mathbf{N}$,有

$$\left(\int_{2^j|z-y| \leqslant |x-y| < 2^{j+1}|z-y|} |K(x,y) - K(x,z)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q} \leqslant C_j(2^j|z-y|)^{-n/q'},$$

$$\left(\int_{2^j|y-z| \leqslant |y-x| < 2^{j+1}|y-z|} |K(y,x) - K(z,x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q} \leqslant C_j(2^j|z-y|)^{-n/q'},$$

其中 $(q,q')$ 是固定的正数对,满足

$$1/q + 1/q' = 1, 1 < q' < 2,$$

则称 $T$ 为 Calderón-Zygmund 型算子.

如果用 Calderón-Zygmund 型算子与经典的 Calderón-Zygmund 算子进行对比,其中经典 Calderón-Zygmund 算子的核 $K(x,y)$ 满足

$$|K(x,y)| \leqslant C|x-y|^{-n},$$

$$|K(x,y) - K(x,z)| + |K(y,x) - K(z,x)| \leqslant C|x-y|^{-n}(|z-y|/|x-y|)^\delta$$

对 $|x-y| > 2|z-y|$ 和某个 $\delta > 0$ 成立,则很容易看出经典的 Calderón-Zygmund 算子也是定义 1 中给出的 Calderón-Zygmund 型算子,此时 $C_j = 2^{-j\delta}, j \in \mathbf{N}$,且 $q$ 可为任意满足 $1 < q < \infty$ 的数. 这一事实说明 Calderón-Zygmund 型算子可以视为经典 Calderón-Zygmund 算子的推广.

收稿日期:2015-03-20
基金项目:国家自然科学基金(11171345),中央高校基本科研业务费(2009QS16)和北京高等学校青年英才计划(YETP0946)资助项目.
作者简介:林　燕(1981-),女,贵州贵阳人,副教授,博士,主要从事调和分析研究.

由经典 Calderón-Zygmund 算子生成的交换子可以看作 Toeplitz 型算子 $T_b = \sum_{k=1}^{m} T_{k,1} M_b T_{k,2}$ 的特殊情形,其中 $T_{k,1}$ 和 $T_{k,2}$ 是经典 Calderón-Zygmund 算子或 $\pm I$(这里 $I$ 表示恒等算子),$M_b f(x) = b(x) f(x)$ 是乘积算子. 当 $b \in \mathrm{BMO}$ 时,S. G. Krantz 等[10] 研究了 $T_b$ 在齐性空间上的 $L^p$ 有界性. 邱道文[11] 研究了另一类 Toeplitz 型算子在齐性空间上的有界性. Lin Yan 等[12] 讨论了与强奇异 Calderón-Zygmund 算子相关的 Toeplitz 型算子 $T_b = \sum_{k=1}^{m} T_{k,1} M_b T_{k,2}$,其中 $T_{k,1}$ 是强奇异 Calderón-Zygmund 算子或 $\pm I$,$M_b$ 是乘积算子,$T_{k,2}$ 是 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 上的有界线性算子,得到了强奇异 Calderón-Zygmund 算子与 BMO 函数生成的 Toeplitz 型算子的 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 有界性.

Lin Yan[13] 讨论了 Calderón-Zygmund 型算子的端点估计. 林燕[14] 通过建立 sharp 极大函数估计来研究 Calderón-Zygmund 型算子及其交换子的性质,并得到这些算子在 Lebesgue 和 Morrey 空间的有界性. Lin Yan 等[15] 建立 Calderón-Zygmund 型算子及其与加权 BMO 函数生成的交换子在加权 Morrey 空间的有界性.

受上述文献的启发,本文将研究 Calderón-Zygmund 型算子与 BMO 函数生成的 Toeplitz 型算子 $T_b = \sum_{k=1}^{m} T_{k,1} M_b T_{k,2}$ 的有界性,其中 $T_{k,1}$ 是 Calderón-Zygmund 型算子或 $\pm I$,$M_b$ 是乘积算子,$T_{k,2}$ 是 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 上的有界线性算子.

BMO 函数的定义和性质导致了对局部可积函数 $f$ 的 sharp 极大函数 $f^{\#}$ 的研究,其定义为

$$f^{\#}(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y) - f_B|\,\mathrm{d}y \sim \sup_{B \ni x} \inf_{a \in C} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y) - a|\,\mathrm{d}y,$$

其中 $f_B = \frac{1}{|B|}\int_B f(y)\,\mathrm{d}y$,上确界取遍所有包含 $x$ 的球 $B$. 事实上,上述定义也等价于对所有以 $x$ 为中心的球 $B$ 取上确界. 当 $f^{\#}$ 是有界函数时,$f$ 是 BMO 函数. 这一现象揭示了函数 $f$ 的某些重要性质实际上是通过 $f^{\#}$ 直接表现出来的.

**定义 2**　Calderón-Zygmund 型算子 $T$ 和某个函数 $b$ 生成的交换子定义为

$$[b,T]f(x) = b(x)Tf(x) - T(bf)(x).$$

**定义 3**　Hardy-Littlewood 极大算子 $M$ 定义为

$$M(f)(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|\,\mathrm{d}y,$$

其中 $B$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中包含 $x$ 的球. 对于 $1 < s < \infty$,记 $M_s(f) = M(|f|^s)^{1/s}$.

## 1　预备引理

**引理 1**[9]　设 $T$ 为 Calderón-Zygmund 型算子且序列 $\{C_j\} \in l^1$,则 $T$ 可扩张为 $L^p(\mathbf{R}^n)(1 < p < \infty)$ 上的有界算子,且它为弱 (1,1) 型的.

**引理 2**　设 $T_{k,1}$ 为 Calderón-Zygmund 型算子或 $\pm I$,$q'$ 如定义 1 所述,当 $f \in C_c^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ 时,$T_1(f) = 0$. 若序列 $\{jC_j\} \in l^1$,且 $b \in \mathrm{BMO}$,则 $\forall\, l$,满足 $q' < l < \infty$,存在常数 $C > 0$,使得 $\forall\, f \in C_c^{\infty}(\mathbf{R}^n)$,有

$$M^{\#}(T_b(f))(x) \leqslant C\sum_{k=1}^{m} \|T_{k,1}\| \|b\|_* \cdot M_l(T_{k,2}(f))(x) + C\sum_{k=1}^{m} \|b\|_* M_l(T_{k,2}(f))(x).$$

**证**　对任意球 $B = B(x,r) \subset \mathbf{R}^n$,$r > 0$,有

$$T_b(f) = T_{b-b_{2B}}(f) = T_{(b-b_{2B})\chi_{2B}}(f) + T_{(b-b_{2B})\chi_{(2B)^c}}(f) := f_1 + f_2,$$

则

$$\frac{1}{|B|}\int_B |T_b(f)(y) - f_2(x)|\,\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{|B|}\int_B |f_1(y)|\,\mathrm{d}y + \frac{1}{|B|}\int_B |f_2(y) - f_2(x)|\,\mathrm{d}y := I_1 + I_2.$$

先估计 $I_1$.

$$I_1 \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{|B|}\int_B |T_{k,1} M_{(b-b_{2B})\chi_{2B}} T_{k,2} f(y)|\,\mathrm{d}y.$$

若 $T_{k,1}$ 为 Calderón-Zygmund 型算子,则取 $1 < u < l$,由 Hölder 不等式和引理 1 中所给出的 $T_{k,1}$ 在 $L^u$ 上的有界性得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B|}\int_B |T_{k,1} M_{(b-b_{2B})\chi_{2B}} T_{k,2} f(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \\
&\left(\frac{1}{|B|}\int_B |T_{k,1} M_{(b-b_{2B})\chi_{2B}} T_{k,2}(f)(y)|^u \mathrm{d}y\right)^{1/u} \leqslant \\
&|B|^{-1/u} \|T_{k,1}\|_{(u,u)} \left(\int_{2B} |b(y) - b_{2B}|^u \cdot |T_{k,2}(f)(y)|^u \mathrm{d}y\right)^{1/u} \leqslant |B|^{-1/u} \|T_{k,1}\|_{(u,u)} |2B|^{1/u} \cdot \\
&\left(\frac{1}{|2B|}\int_{2B} |b(y) - b_{2B}|^{u\cdot(l/u)'} \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{u\cdot(l/u)'}} \cdot \left(\frac{1}{|2B|}\int_{2B} |T_{k,2}(f)(y)|^l \mathrm{d}y\right)^{1/l} \leqslant \\
&C\|T_{k,1}\|_{(u,u)} \|b\|_* M_l(T_{k,2}(f))(x).
\end{aligned}$$

若 $T_{k,1} = \pm I$,则

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B|}\int_B |T_{k,1} M_{(b-b_{2B})\chi_{2B}} T_{k,2} f(y)|\,\mathrm{d}y = \\
&\frac{1}{|B|}\int_B |b(y) - b_{2B}||T_{k,2}(f)(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant
\end{aligned}$$

$$C\left(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}|b(y)-b_{2B}|^{l'}\mathrm{d}y\right)^{1/l'}\cdot$$
$$\left(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}|T_{k,2}(f)(y)|^{l}\mathrm{d}y\right)^{1/l}\leqslant$$
$$C\|b\|_{*}M_{l}(T_{k,2}(f))(x).$$

结合上述 2 种情况可知,$I_1\leqslant C\sum_{k=1}^{m}\|T_{k,1}\|\cdot\|b\|_{*}M_{l}(T_{k,2}(f))(x)$.

然后估计 $I_2$.

$$I_2\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{|B|}\int_{B}|T_{k,1}M_{(b-b_{2B})\chi_{(2B)^c}}T_{k,2}(f)(y)-T_{k,1}M_{(b-b_{2B})\chi_{(2B)^c}}T_{k,2}(f)(x)|\mathrm{d}y.$$

若 $T_{k,1}$ 为 Calderón-Zygmund 型算子,则题设条件 $q'<l<\infty$ 保证了 $1/l<1/q'$,故 $\exists\ s\in(1,\infty)$,使得 $1/s=1/q'-1/l=1-1/q-1/l$. 利用 Hölder 不等式可知

$$\frac{1}{|B|}\int_{B}|T_{k,1}M_{(b-b_{2B})\chi_{(2B)^c}}T_{k,2}(f)(y)-T_{k,1}M_{(b-b_{2B})\chi_{(2B)^c}}T_{k,2}(f)(x)|\mathrm{d}y\leqslant$$
$$\frac{1}{|B|}\int_{B}\int_{(2B)^c}|K(y,z)-K(x,z)||b(z)-b_{2B}||T_{k,2}(f)(z)|\mathrm{d}z\mathrm{d}y\leqslant$$
$$\frac{1}{|B|}\int_{B}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^j|y-x|\leqslant|z-x|<2^{j+1}|y-x|}|K(y,z)-K(x,z)||b(z)-b_{2B}||T_{k,2}(f)(z)|\mathrm{d}z\mathrm{d}y\leqslant$$
$$\frac{1}{|B|}\int_{B}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_{2^j|y-x|\leqslant|z-x|<2^{j+1}|y-x|}|K(y,z)-K(x,z)|^{q}\mathrm{d}z\right)^{1/q}\left(\int_{2^j|y-x|\leqslant|z-x|<2^{j+1}|y-x|}|b(z)-b_{2B}|^{s}\mathrm{d}z\right)^{1/s}\left(\int_{2^j|y-x|\leqslant|z-x|<2^{j+1}|y-x|}|T_{k,2}(f)(z)|^{l}\mathrm{d}z\right)^{1/l}\mathrm{d}y\leqslant$$
$$\frac{1}{B}\int_{B}\sum_{j=1}^{\infty}C_j(2^j|x-y|)^{-n/q'}\left(\int_{2^{j+1}B}|b(z)-b_{2B}|^{s}\mathrm{d}z\right)^{1/s}\cdot\left(\int_{2^{j+1}B}|T_{k,2}(f)(z)|^{l}\mathrm{d}z\right)^{1/l}\mathrm{d}y=$$
$$\frac{1}{|B|}\left(\int_{B}|y-x|^{-n/q'}\mathrm{d}y\right)\sum_{j=1}^{\infty}C_j2^{-jn/q'}|2^{j+1}B|^{1/q'}\cdot\left(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|b(z)-b_{2B}|^{s}\mathrm{d}z\right)^{1/s}\cdot\left(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|T_{k,2}(f)(z)|^{l}\mathrm{d}z\right)^{1/l}\leqslant$$
$$C\frac{1}{|B|}|B|^{1/q}\sum_{j=1}^{\infty}C_j2^{-jn/q'}|2^{j+1}B|^{1/q'}j\|b\|_{*}\cdot M_{l}(T_{k,2}(f))(x)\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}jC_j\|b\|_{*}\cdot M_{l}(T_{k,2}(f))(x)=C\|b\|_{*}M_{l}(T_{k,2}(f))(x).$$

若 $T_{k,1}=\pm I$,则上述估计显然成立.

结合上述 2 种情况可知

$$I_2\leqslant C\sum_{k=1}^{m}\|b\|_{*}M_{l}(T_{k,2}(f))(x).$$

综合 $I_1$ 和 $I_2$ 可得

$$M^{\#}(T_b(f))(x)\leqslant C\sum_{k=1}^{m}\|T_{k,1}\|\|b\|_{*}M_{l}(T_{k,2}(f))(x)+C\sum_{k=1}^{m}\|b\|_{*}M_{l}(T_{k,2}(f))(x).$$

**引理 3**[16] Hardy-Littlewood 极大算子 $M$ 是 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 上的有界算子,其中 $1<p<\infty$.

## 2 主要结果

下面给出本文的主要结果.

**定理 1** 设 $T_{k,1}$ 为 Calderón-Zygmund 型算子或 $\pm I$,$T_{k,2}$ 是 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 上有界算子,$q'$ 如定义 1 所述,当 $f\in C_c^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ 时,$T_1(f)=0$. 若序列 $\{jC_j\}\in l^1$,且 $b\in\mathrm{BMO}$,则 $T_b$ 在 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 上有界,其中 $q'<p<\infty$.

**证** 因为 $q'<p<\infty$,故存在常数 $l$,使得 $q'<l<p$,由引理 2 和引理 3 可得

$$\|T_b(f)\|_{p}\leqslant\|M(T_b(f))\|_{p}\leqslant C\|M^{\#}(T_b(f))\|_{p}\leqslant C\sum_{k=1}^{m}\|T_{k,1}\|\|b\|_{*}\cdot\|M_l(T_{k,2}(f))\|_{p}+C\sum_{k=1}^{m}\|b\|_{*}\|M_l(T_{k,2}(f))\|_{p}=$$
$$C\sum_{k=1}^{m}\|T_{k,1}\|\|b\|_{*}\|M(|T_{k,2}(f)|^{l})\|_{p/l}^{1/l}+C\sum_{k=1}^{m}\|b\|_{*}\|M(|T_{k,2}(f)|^{l})\|_{p/l}^{1/l}\leqslant C\sum_{k=1}^{m}\|T_{k,1}\|\cdot\|b\|_{*}\||T_{k,2}(f)|^{l}\|_{p/l}^{1/l}+C\sum_{k=1}^{m}\|b\|_{*}\cdot\||T_{k,2}(f)|^{l}\|_{p/l}^{1/l}=C\sum_{k=1}^{m}\|T_{k,1}\|\|b\|_{*}\cdot\|T_{k,2}(f)\|_{p}+C\sum_{k=1}^{m}\|b\|_{*}\|T_{k,2}(f)\|_{p}\leqslant$$
$$C\left(\sum_{k=1}^{m}(\|T_{k,1}\|+1)\|T_{k,2}\|\right)\|b\|_{*}\|f\|_{p}.$$

故 $T_b$ 在 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 上有界. 定理 1 得证.

当 $T_{k,1}$,$T_{k,2}$ 都是 Calderón-Zygmund 型算子或 $\pm I$ 时,定理 1 中 $p$ 的范围可以扩大到 $1<p<\infty$.

**定理 2** 设 $T_{k,1}$,$T_{k,2}$ 为 Calderón-Zygmund 型算子或 $\pm I$,当 $f\in C_c^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ 时,$T_1(f)=0$. 若序列 $\{jC_j\}\in l^1$ 且 $b\in\mathrm{BMO}$,则 $T_b$ 在 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 上有界,其中 $1<p<\infty$.

**证** (i) 当 $q'<p<\infty$ 时,由定理 1 知,$T_b$ 在 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 上有界.

(ii) 当 $1<p<q'$ 时,因为 $1<q'<2$,所以

$q' < q < p'$. 由于 $T^*_{k,1}$, $T^*_{k,2}$ 仍为 Calderón-Zygmund 型算子或 $\pm I$, 故 $T^*_b = \sum_{k=1}^{m} T^*_{k,2} M_b T^*_{k,1}$ 满足定理 1 的条件. 由定理 1 知, $T^*_b$ 在 $L^{p'}(\mathbf{R}^n)$ 上有界. 故

$$\| T_b(f) \|_p = \sup_{\|g\|_{p'}\le 1} | \langle T_b(f), g\rangle | =$$

$$\sup_{\|g\|_{p'}\le 1} | \langle f, T^*_b(g) \rangle | \le \sup_{\|g\|_{p'}\le 1} \|f\|_p \| T^*_b(g) \|_{p'} \le C \| b \|_* \sup_{\|g\|_{p'}\le 1} \|f\|_p \|g\|_{p'} \le C \| b \|_* \|f\|_p.$$

所以 $T_b$ 在 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 上有界.

(iii) 当 $p = q'$ 时,结合上述 2 种情形的结论和插值定理可得 $T_b$ 的有界性.

由于交换子可以看作 Toeplitz 型算子的特殊情况,故可以得到交换子的相应结论如下.

**推论 1**　设 $T$ 为 Calderón-Zygmund 型算子,若序列 $\{jC_j\} \in l^1$ 且 $b \in \mathrm{BMO}$, 则交换子 $[b,T]$ 在 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 上有界,其中 $1 < p < \infty$.

## 3　总结

综上可知,对于由 Calderón-Zygmund 型算子与 BMO 函数生成的 Toeplitz 型算子这一类线性算子而言,通过建立其 sharp 极大估计,可以得到该类 Toeplitz 型算子在 Lebesgue 空间的有界性,同时也可以获得由 Calderón-Zygmund 型算子与 BMO 函数生成的交换子的相应结论. 这些结果可以看作对线性算子理论的进一步丰富和完善.

## 4　参考文献


[1] 程其襄,张奠宙,魏国强,等. 实变函数与泛函分析基础 [M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社,2010.

[2] 周美珂. 泛函分析 [M]. 2 版. 北京: 北京师范大学出版社,2007.

[3] 张恭庆,林源渠. 泛函分析讲义: 上册 [M]. 北京: 北京大学出版社,2001.

[4] Folland G B. Real analysis: Modern techniques and their applications [M]. 2 版. 北京: 世界图书出版公司北京公司,2007.

[5] Coifman R R,Rochberg R,Weiss G. Factorization theorems for Hardy spaces in several variables [J]. Ann Math,1976,103(3):611-635.

[6] Chiarenza F,Frasca M,Longo P. $W^{2,p}$-solvability of the Dirichlet problem for nondivergence elliptic equations with VMO coefficients [J]. Trans Amer Math Soc,1993,336(2):841-853.

[7] Di Fazio G,Ragusa M A. Interior estimates in Morrey spaces for strongly solutions to nondivergence form equations with discontinuous coefficients [J]. J Funct Anal,1993,112(2):241-256.

[8] Paluszynski M. Characterization of the Besov spaces via the commutator operator of Coifman,Rochberg and Weiss [J]. Indiana Univ Math J,1995,44(1):1-17.

[9] Chang Derchen,Li Junfeng. Weighted scale estimates for generalized Calderón-Zygmund type operator [J]. Contemporary Math Amer Math Soc,2007,44(5):61-70.

[10] Krantz S G,Li Songying. Boundedness and compactness of integral operators on spaces of homogeneous type and applications,I [J]. J Math Anal Appl,2001,258(2):629-641.

[11] 邱道文. 齐型空间上的一类积分算子 [J]. 数学年刊: A 辑,2001,22(6):797-804.

[12] Lin Yan,Lu Shanzhen. Toeplitz operators related to strongly singular Calderón-Zygmund opetators [J]. Sci China Ser A,2006,49(8):1048-1064.

[13] Lin Yan. Endpoint estimates for Calderón-Zygmund type operators [J]. Acta Math Sinica English Ser,2010,26(3):523-532.

[14] 林燕. Calderón-Zygmund 型算子及其交换子的 sharp 极大函数估计 [J]. 数学物理学报,2011,31A(1):206-215.

[15] Lin Yan,Sun Guofeng. Generalized Calderón-Zygmund operators and commutators on weighted Morrey spaces [J]. PanAmer Math J,2015,25(1):53-65.

[16] Stein E M. Harmonic analysis: real-variable methods,orthogonality,and oscillatory integrals [M]. Princeton: Princeton Univ Press,1993.


# The Boundedness of a Class of Linear Operators


LIN Yan,FAN Chao

(School of Sciences,China University of Mining & Technology,Beijing 100083,China)



**Abstract:** A class of linear operators called Toeplitz operators is studied,which have important applications in harmonic analysis and complex analysis. The sharp maximal estimates for the Toeplitz operators generated by Calderón-Zygmund type operators and BMO functions are established. And based on the sharp maximal estimates,the boundedness of this kind of Toeplitz operators on Lebesgue spaces is obtained.



**Key words:** Toeplitz operator; boundedness; Calderón-Zygmund type operator; BMO function

(责任编辑: 曾剑锋)