

文章编号: 1000-5862(2015)05-0526-05

分数阶流行病模型的近似解析解

肖水明¹ 杨兰惠² 周家兴¹

(1. 南昌大学理学院数学系, 江西 南昌 330031; 2. 南昌大学软件学院, 江西 南昌 330047)

摘要: 在经典的 SIR 、 $SIRS$ 、 SIS 流行病模型基础上引入关于时间的分数阶导数, 并利用同伦摄动方法分别求出这3个模型的近似解析解, 而且应用数值实验结果印证了 FDEs 的记忆特征. 改进和推广了一些已有的成果, 且对深入研究分数阶流行病模型有很好的启示作用.

关键词: 分数阶微分方程; 流行病模型; 同伦摄动方法; 近似解析解

中图分类号: O 29 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2015.05.18

0 引言

流行病一直困扰着人们, 且为此遭受很大经济损失, 如 HIV、SARS、H1N1 等. 因此数学模型成为理解疾病传播过程、发展趋势和不确定因素评估的重要工具. 事实上流行病模型最早可追溯到 20 世纪 20 年代. W. O. Kermack 等^[1-2] 分别建立了 SIR 、 $SIRS$ 、 SIS 常微分方程流行病模型:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mu - \mu S(t) - \beta S(t) I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t) I(t) - (\mu + \lambda) I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \lambda I(t) - \mu R(t), \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mu - \mu S(t) - \beta S(t) I(t) + \delta R(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t) I(t) - (\mu + \lambda) I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \lambda I(t) - (\mu + \delta) R(t), \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mu - \mu S(t) - \beta S(t) I(t) + \varepsilon I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t) I(t) - (\mu + \varepsilon) I(t), \end{cases} \quad (3)$$

其中 $S(t)$ 、 $I(t)$ 、 $R(t)$ 分别代表易感者人数、染病者人数和从疾病中康复并获得免疫的人数. 设人口总数是常数 N , 并且以上所有变量均已被标准化 ($N = 1$). μ 代表出生率和死亡率; 而且所有的新生儿均是

易感者; β 是每个感染者平均每天接触次数. 在模型 SIR 和 $SIRS$ 中, λ 表示染病者的恢复率; 在 $SIRS$ 中, δ 是人均失去免疫率, 由于考虑到获得的免疫是临时的. 在 SIS 中, ε 表示从感染者到易感者的转移率, 由于从疾病中康复过来没有免疫力, 而是直接进入的易感者人群. 本文以上所述的参数均视为常值.

在 20 世纪中期, 对流行病模型研究已取得长足的发展. 目前仍有一些学者对这 3 个经典模型进行修正研究. 文献 [3] 研究年龄结构的 SIS 模型. 文献 [4] 论证染病年龄 $SIRS$ 模型平衡点渐近稳定性. 考虑到感染后有潜伏期, 时间延迟在 SIR 模型中被考虑^[5-6]. 事实上, 空间变量在流行病传播机制中具有不容忽略的因素, 因此反应扩散 SIS 流行病模型被讨论^[7-8].

分数阶导数虽然作为数学分支已有 300 多年的历史, 但是最近才被应用^[9]. 目前分数阶微分方程已经引起了广泛关注, 由于它能精确描述许多物理和生物过程, 如粘性力、电镀分析化学、生物系统的电导率、神经模型、扩散过程、阻尼定律和流变学等, 并且分数阶导数也已应用到流行病这一特殊领域, P. Shakoor 等^[10] 利用数据模拟登革热传染病 (dengue disease), 其结果表明分数阶微分方程模型比 1 阶微分方程模型更符合实际传播机制, 因而研究分数阶微分方程 (FDEs) 流行病模型具有重要的现实意义. 然而与整数阶微分方程相比, 分数阶微分方程不具有几何含义^[9], ODEs 几何理论对于分数阶微分方程不再适用. 因此促使研究分数阶流行病模型的近似解析解, 以便预防与控制流行病.

收稿日期: 2015-05-11

基金项目: 国家自然科学基金 (61304161) 和江西省教改课题 (JXJG-13-4-3) 资助项目

作者简介: 肖水明 (1978-), 男, 江西萍乡人, 讲师, 主要从事应用数学和数学建模研究.

摄动方法是早期求解非线性问题最常用的方法,其局限于小参数的假设.文献[11-12]发展了同伦摄动方法(HPM),并且S. T. Mohyud-Din等^[13]把这一方法应用到FDEs.最近,文献[14-15]获得了关于时间分数阶导数Lotka-Volterra系统的近似解析解.基于以上研究工作的启发,利用HPM方法获得了SIR、SIRS、SIS分数阶流行病近似解析解,并且对这3个模型分别根据不同分数阶导数进行了数值模拟.

1 预备知识

定义1 令 $\alpha \in \mathbf{R}^+$ 在 $L_1[t_0, t_1]$ 上定义算子 $J_{t_0}^\alpha$:

$$J_{t_0}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 是伽马函数,称 $J_{t_0}^\alpha$ 为 α 阶Riemann-Liouville分数积分算子.

定义2 函数 $f \in C^n([t_0, t_1], \mathbf{R})$,其 α 阶Riemann-Liouville导数为

$$D_{t_0}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-n+\alpha}} ds, \\ t_0 \leq t \leq t_1, \quad n-1 < \alpha < n.$$

定义3 函数 $f \in C^{n+1}([t_0, t_1], \mathbf{R})$,其 α 阶Caputo导数为

$${}^c D_{t_0}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{1-n+\alpha}} ds, \\ t_0 \leq t \leq t_1, \quad n-1 < \alpha < n.$$

目前这2种分数阶导数定义已被广泛认可,然而Riemann-Liouville导数存在不足,它对常数的导数不恒为0, Caputo导数修正了这一缺点,其在物理和生物中更符合实际应用.因此在本文中所涉及的导数均为Caputo导数.至于其他分数阶导数的定义请参见文献[9].

2 分数阶流行病模型

分别考察关于时间分数阶导数的SIR、SIRS、SIS模型(1)~(3).

2.1 SIR模型

首先研究分数阶SIR模型:

$$\begin{cases} {}^c D_0^\alpha S(t) = \mu - \mu S(t) - \beta S(t) I(t), \\ {}^c D_0^\eta I(t) = \beta S(t) I(t) - (\mu + \lambda) I(t), \\ {}^c D_0^\nu R(t) = \lambda I(t) - \mu R(t), \end{cases} \quad (4)$$

其中 $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \eta \leq 1$, $0 < \nu \leq 1$. 初始条件为

$S(0) = a$, $I(0) = b$, $R(0) = r$. 既然(4)式中前2式不含有 $R(t)$,只需考察(4)式的子系统

$$\begin{cases} {}^c D_0^\alpha S(t) = \mu - \mu S(t) - \beta S(t) I(t), \\ {}^c D_0^\eta I(t) = \beta S(t) I(t) - (\mu + \lambda) I(t). \end{cases} \quad (5)$$

根据HPM方法,首先构造(5)式的同伦方程

$$\begin{cases} {}^c D_0^\alpha S(t) = p [\mu - \mu S(t) - \beta S(t) I(t)], \\ {}^c D_0^\eta I(t) = p [\beta S(t) I(t) - (\mu + \lambda) I(t)], \end{cases} \quad (6)$$

其中 $p \in [0, 1]$ 是同伦参数.假设(6)式的解可表示为关于 p 的幂级数形式

$$\begin{cases} S(t) = S_0(t) + p S_1(t) + p^2 S_2(t) + p^3 S_3(t) + \cdots, \\ I(t) = I_0(t) + p I_1(t) + p^2 I_2(t) + p^3 I_3(t) + \cdots. \end{cases} \quad (7)$$

把(7)式代入到(6)式,然后令 p 的幂函数的系数为0,可得

$$\begin{aligned} p^0: D_0^\alpha S_0 &= 0, \quad D_0^\eta I_0 = 0, \\ p^1: D_0^\alpha S_1 &= \mu - \mu S_0 - \beta S_0 I_0, \\ D_0^\eta I_1 &= \beta S_0 I_0 - (\mu + \lambda) I_0, \\ p^2: D_0^\alpha S_2 &= -\mu S_1 - \beta(S_0 I_1 + I_0 S_1), \\ D_0^\eta I_2 &= \beta(S_0 I_1 + I_0 S_1) - (\mu + \lambda) I_1, \\ p^3: D_0^\alpha S_3 &= -\mu S_2 - \beta(S_0 I_2 + S_1 I_1 + S_2 I_0), \\ D_0^\eta I_3 &= \beta(S_0 I_2 + S_1 I_1 + S_2 I_0) - (\mu + \lambda) I_2, \\ &\cdots \end{aligned} \quad (8)$$

用算子 J_0^α 或 J_0^η 分别作用于(8)式中每个等式两边,则每个等式可以逐步被解出来.因此 $S(t)$ 和 $I(t)$ 解析解可以写成

$$S(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(t), \quad I(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} g_N(t), \quad (9)$$

其中 $f_N(t) = \sum_{n=0}^{N-1} S_n(t)$, $g_N(t) = \sum_{n=0}^{N-1} I_n(t)$, $N \geq 1$.由于级数在实际问题中收敛速度快,因此解可用较少的项近似.

为了简化计算,引入下列记号

$$\begin{aligned} 2C_{S1} &= \mu - \mu a - \beta ab, \quad C_{I1} = \beta ab - b\mu - b\lambda, \quad C_{S21} = \\ &= -(\mu + \beta b) C_{S21}, \quad C_{S22} = -\beta a C_{I1}, \quad C_{I21} = (\beta a - \mu - \\ &\lambda) C_{I1}, \quad C_{I22} = \beta b C_{S1}. \end{aligned}$$

经繁琐计算,可得到(8)式中每个等式的解为

$$\begin{aligned} S_0(t) &= a, \quad I_0 = b, \quad S_1(t) = C_{S1} t^\alpha / \Gamma(\alpha + 1), \\ I_1(t) &= C_{I1} t^\eta / \Gamma(\eta + 1), \quad S_2(t) = C_{S21} t^{2\alpha} / \Gamma(2\alpha + 1) + \\ &+ C_{S22} t^{\alpha+\eta} / \Gamma(\alpha + \eta + 1), \quad I_2(t) = C_{I21} t^{2\eta} / \Gamma(2\eta + 1) + \\ &+ C_{I22} t^{\alpha+\eta} / \Gamma(\alpha + \eta + 1), \quad S_3(t) = -(\mu + \beta b) C_{S21} t^{3\alpha} / \Gamma(3\alpha + 1) - \\ &- \beta a C_{I21} t^{\alpha+2\eta} / \Gamma(2\eta + \alpha + 1) - \\ &- ((\mu + \beta b) C_{S22} + \beta a C_{I22}) t^{2\alpha+\eta} / \Gamma(2\alpha + \eta + 1) - \\ &- \beta C_{S1} C_{I1} \Gamma(\alpha + \eta + 1) t^{2\alpha+\eta} / [\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\eta + 1) \Gamma(2\alpha + \\ &\eta + 1)], \quad I_3(t) = \beta b C_{S21} t^{2\alpha+\eta} / \Gamma(2\alpha + \eta + 1) + \\ &+ (\beta a - \mu - \lambda) C_{I21} t^{3\eta} / \Gamma(3\eta + 1) + (\beta b C_{S22} + (\beta a - \end{aligned}$$

$$\mu - \lambda) C_{\rho 22} t^{\alpha+2\eta} / \Gamma(\alpha + 2\eta + 1) + \beta C_{S1} C_{\rho} \Gamma(\alpha + \eta + 1) t^{\alpha+2\eta} / [\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\eta + 1) \Gamma(\alpha + 2\eta + 1)],$$

类似的方法可得到其他项,由此从(9)式得到 $S(t)$ 和 $I(t)$ 的近似解.本文只保留(7)式中的前4项,则(5)式的解可被近似为下列形式:

$$\begin{cases} S(t) \approx S_0 + S_1(t) + S_2(t) + S_3(t), \\ I(t) \approx I_0 + I_1(t) + I_2(t) + I_3(t). \end{cases}$$

2.2 SIRS 模型

考虑下列分数阶流行病模型:

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha S(t) = \mu - \mu S(t) - \beta S(t) I(t) + \delta R(t), \\ {}^c D_t^\eta I(t) = \beta S(t) I(t) - (\mu + \lambda) I(t), \\ {}^c D_t^\nu R(t) = \lambda I(t) - \mu R(t) - \delta R(t), \end{cases} \quad (10)$$

其中 $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \eta \leq 1$, $0 < \nu \leq 1$. 初始条件 $S(0) = a$, $I(0) = b$, $R(0) = r$. 由于总人口数为单位1,则 $R(t) = 1 - S(t) - I(t)$,代入(10)式得

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha S(t) = \mu - \mu S(t) - \beta S(t) I(t) + \\ \delta(1 - S(t) - I(t)), \\ {}^c D_t^\eta I(t) = \beta S(t) I(t) - (\mu + \lambda) I(t). \end{cases} \quad (11)$$

类似的方法,经计算得(11)式的近似解析解为

$$\begin{cases} S(t) \approx S_0 + S_1(t) + S_2(t) + S_3(t), \\ I(t) \approx I_0 + I_1(t) + I_2(t) + I_3(t). \end{cases}$$

其中 $S_0(t) = a$, $I_0(t) = b$, $S_1(t) = C_{S1} t^\alpha / \Gamma(\alpha + 1)$, $I_1(t) = C_{\rho} t^\eta / \Gamma(\eta + 1)$, $S_2(t) = C_{S21} t^{2\alpha} / \Gamma(2\alpha + 1) + C_{S22} t^{\alpha+\eta} / \Gamma(\alpha + \eta + 1)$, $I_2(t) = C_{\rho 21} t^{2\eta} / \Gamma(2\eta + 1) + C_{\rho 22} t^{\alpha+\eta} / \Gamma(\alpha + \eta + 1)$, $S_3(t) = -(\mu + \delta + \beta b) C_{S21} t^{3\alpha} / \Gamma(3\alpha + 1) - (\delta + \beta a) C_{\rho 21} t^{\alpha+2\eta} / \Gamma(\alpha + 2\eta + 1) - (\mu + \delta + \beta b) C_{S22} + (\delta + \beta a) C_{\rho 22} t^{2\alpha+\eta} / \Gamma(2\alpha + \eta + 1) - \beta C_{S1} C_{\rho} \Gamma(\alpha + \eta + 1) t^{2\alpha+\eta} / [\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\eta + 1) \Gamma(2\alpha + \eta + 1)]$, $I_3(t) = (\beta a - \mu - \lambda) C_{\rho 21} t^{3\eta} / \Gamma(3\eta + 1) + \beta b C_{S21} t^{2\alpha+\eta} / \Gamma(2\alpha + \eta + 1) + ((\beta a - \mu - \lambda) C_{\rho 22} + \beta b C_{S22}) t^{\alpha+2\eta} / \Gamma(\alpha + 2\eta + 1) + \beta \Gamma(\alpha + \eta + 1) C_{S1} C_{\rho} t^{\alpha+2\eta} / [\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\eta + 1) \Gamma(\alpha + 2\eta + 1)]$, 这里 $2C_{S1} = (\mu + \delta)(1 - a) - \delta b - \beta ab$, $C_{\rho} = \beta ab - b(\mu + \lambda)$, $C_{S21} = -(\mu + \lambda + \beta b) C_{S21}$, $C_{S22} = -(\beta a + \delta) C_{\rho}$, $C_{\rho 21} = (\beta a - \mu - \lambda) C_{\rho}$, $C_{\rho 22} = \beta b C_{S1}$.

2.3 SIS 模型

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha S(t) = \mu - \mu S(t) - \beta S(t) I(t) + \varepsilon I(t), \\ {}^c D_t^\eta I(t) = \beta S(t) I(t) - (\mu + \varepsilon) I(t), \end{cases} \quad (12)$$

其中 $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \eta \leq 1$. 初始条件为 $S(0) = a$, $I(0) = b$.

利用相同的方法可得(12)式的近似解析解为

$$\begin{cases} S(t) \approx S_0 + S_1(t) + S_2(t) + S_3(t), \\ I(t) \approx I_0 + I_1(t) + I_2(t) + I_3(t), \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} S_0(t) &= a, I_0(t) = b, S_1(t) = C_{S1} t^\alpha / \Gamma(\alpha + 1), \\ I_1(t) &= C_{\rho} t^\eta / \Gamma(\eta + 1), S_2(t) = C_{S21} t^{2\alpha} / \Gamma(2\alpha + 1) + C_{S22} t^{\alpha+\eta} / \Gamma(\alpha + \eta + 1), \\ I_2(t) &= C_{\rho 21} t^{2\eta} / \Gamma(2\eta + 1) + C_{\rho 22} t^{\alpha+\eta} / \Gamma(\alpha + \eta + 1), \\ S_3(t) &= -(\mu + \beta b) C_{S21} t^{3\alpha} / \Gamma(3\alpha + 1) + (\varepsilon - \beta a) C_{\rho 21} t^{\alpha+2\eta} / \Gamma(\alpha + 2\eta + 1) - ((\mu + \beta b) C_{S22} + (\beta a - \varepsilon) C_{\rho 22}) t^{2\alpha+\eta} / \Gamma(2\alpha + \eta + 1) - \beta C_{S1} C_{\rho} \Gamma(\alpha + \eta + 1) t^{2\alpha+\eta} / [\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\eta + 1) \Gamma(2\alpha + \eta + 1)], \\ I_3(t) &= (\beta a - \mu - \varepsilon) C_{\rho 21} t^{3\eta} / \Gamma(3\eta + 1) + \beta b C_{S21} t^{2\alpha+\eta} / \Gamma(2\alpha + \eta + 1) + ((\beta a - \mu - \varepsilon) C_{\rho 22} + \beta b C_{S22}) t^{\alpha+2\eta} / \Gamma(\alpha + 2\eta + 1) + \beta \Gamma(\alpha + \eta + 1) C_{S1} C_{\rho} t^{\alpha+2\eta} / [\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\eta + 1) \Gamma(\alpha + 2\eta + 1)], \end{aligned}$$

这里 $2C_{S1} = \mu - \mu a + \varepsilon b - \beta ab$, $C_{\rho} = \beta ab - b(\mu + \varepsilon)$, $C_{S21} = -(\mu + \beta b) C_{S21}$, $C_{S22} = (\varepsilon - \beta a) C_{\rho}$, $C_{\rho 21} = (\beta a - \mu - \varepsilon) C_{\rho}$, $C_{\rho 22} = \beta b C_{S1}$.

(6)式等价的积分形式为

$$\begin{cases} S(t) = S(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} p [\mu - \mu S(s) - \beta S(s) I(s)] ds, \\ I(t) = I(0) + \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_0^t (t-s)^{\eta-1} p [\beta S(s) I(s) - (\mu + \lambda) I(s)] ds. \end{cases}$$

研究(7)式解的收敛性,等价与上式积分方程解的收敛性.考虑一般形式的积分方程

$$u(t) - \lambda \int_a^b K(t, s) u(s) ds = f(t),$$

其中 $t \in [a, b]$, 函数 $K \in \mathcal{C}([a, b] \times [a, b])$ 和 $f \in [a, b]$. 令

$$H(v, p) = v(x) - u_0(t) - p \left(u_0(t) - \lambda \int_a^b K(t, s) v(s) ds - f(t) \right), \quad (13)$$

根据同伦方法,方程 $H(v, p) = 0$ 有下列形式的解

$$v(t) = \sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j(t). \quad (14)$$

把(14)式代入到(13)式中,得到

$$\sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j(t) = u_0(t) + p(f(x) - u_0(t)) + \sum_{j=1}^{\infty} p^j \lambda \int_a^b K(t, s) v_{j-1}(s) ds,$$

比较参数 p 的相同幂数,得到

$$v_0(t) = u_0(t),$$

$$v_1(t) = f(t) - u_0(t) + \lambda \int_a^b K(t,s) v_0(s) ds,$$

$$v_j(t) = \lambda \int_a^b K(t,s) v_{j-1}(s) ds, j \geq 2.$$

现在考虑级数的收敛性.

定理 1 在区域 $\Omega_1 = [a, b] \times [a, b]$ 和区域 $\Omega = [a, b]$ 上, 函数 $K(t, s)$ 和 $f(t)$ 是连续有界的, 即存在正数 M 和 N_1 使得 $(|K(t, s)| \leq M) \wedge (|f(t)| \leq N_1), \forall t \in [a, b]$, 并且满足不等式 $|\lambda| < 1/[M(b-a)]$, 当初值近似解 $u_0 \in C[a, b]$ 时, 则对于 $p \in [0, 1]$ (14) 式在区间 Ω 上一致收敛.

证 令 $u_0 \in C[a, b]$. 因此存在 1 个正数 N_0 使得 $|u_0(t)| \leq N_0, \forall t \in [a, b]$ 则

$$|v_0(t)| = |u_0(t)| \leq N_0,$$

$$|v_1(t)| = \left| f(t) - u_0(t) + \lambda \int_a^b K(t,s) v_0(s) ds \right| \leq$$

$$|f(t)| + |u_0(t)| + |\lambda| \int_a^b |K(t,s)| |v_0(s)| ds \leq$$

$$N_1 + N_0 + |\lambda| \int_a^b M N_0 ds = N_0 + N_1 +$$

$$|\lambda| M N_0 (b-a) = B$$

$$|v_2(t)| = \lambda \int_a^b K(t,s) v_1(s) ds \leq$$

$$|\lambda| \int_a^b |K(t,s)| |v_1(s)| ds \leq B |\lambda| M (b-a),$$

其中 $B = N_0 + N_1 + |\lambda| M N_0 (b-a)$ 则有

$$|v_j(t)| \leq B |\lambda|^{j-1} M^{j-1} (b-a)^{j-1}, t \in [a, b], j \geq 1.$$

用同样方法, 对于 $p \in [0, 1]$ 和 (14) 式, 可得

$$\sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j(t) \leq \sum_{j=0}^{\infty} |v_j(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} B |\lambda|^{j-1} M^{j-1} (b-a)^{j-1}.$$

如果 $|\lambda| M (b-a) < 1$, 上式是收敛的. 因此 (14) 式在区间 $[a, b]$ 上一致收敛.

3 数值实验

本节分别展示了整数阶和分数阶 *SIR*、*SIRS*、*SIS* 模型的数值结果 (见图 1). 对于 *SIR* 模型, 参数被设定为 $\mu = 0.2, \beta = 0.5, \lambda = 0.1$; 初始值为 $(S_0, I_0, R_0) = (0.9, 0.1, 0)$. 在 *SIRS* 模型中, 令 $\mu = 0.2, \beta = 0.5, \lambda = 0.1, \delta = 0.1$; 初始条件为 $(S_0, I_0, R_0) = (0.9, 0.1, 0)$. 在 *SIS* 模型中, 令 $\mu = 0.2, \beta = 0.5, \varepsilon = 0.1$, 初始条件设为 $(S_0, I_0) = (0.9, 0.1)$. 3 个模型关于时间的导数分别为 0.8, 0.9, 1.0 阶.

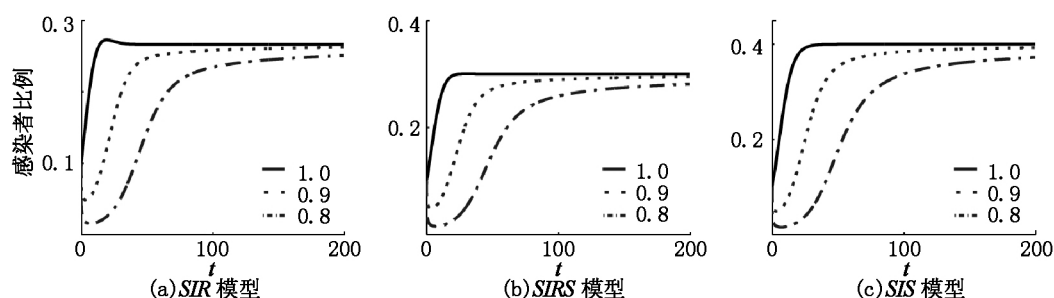


图 1 易感者关于时间变化的曲线

从图 1 可以看出感染者比例从初始值到达平衡点的时间随分数阶的增加而递减, 并且在 1 阶整数导数模型中, 用时最少. 根据 Riemann-Liouville 分数积分定义, 不难看出较小的分数阶导数意味着具有较强的记忆性.

4 讨论

SIR、*SIRS*、*SIS* 流行病模型已被许多学者所研究, 然而人们行为具有记忆特征, 为了描述这一特征, 本文首先用关于时间的分数阶微分方程描述这 3 个经典模型, 并利用同伦摄动方法, 分别计算得到 *SIR*、*SIRS*、*SIS* 模型的近似解析解, 这一方法弥补了小参数的限制. 数值试验展示了分数阶流行病模型

的记忆特征. 通过以上讨论, 分数阶非线性系统对理解流行病传播机理提供了一种有意义的新模式.

5 参考文献

- [1] Kermack W O, McKendrick A G. Contributions to the mathematical theory of epidemics-I [J]. Bulletin of Mathematical Biology, 1991, 53(1/2): 33-55.
- [2] Bailey N T J. The mathematical theory of infectious diseases [M]. New York: Hafner, 1975.
- [3] El-Doma M. Analysis of an age-dependent SIS epidemic model with vertical transmission and proportionate mixing assumption [J]. Mathematical and Computer Modelling, 1999, 29(7): 31-43.
- [4] Zhang Zhonghua, Peng Jigen. A SIRS epidemic model with

- infection-age dependence [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications 2007 ,331(2) : 1396-1414.
- [5] Ma Wanbiao ,Song Mei ,Takeuchi Y. Global stability of an SIR epidemic model with time delay [J]. Applied Mathematics Letters 2004 ,17(10) : 1141-1145.
- [6] McCluskey M C. Complete global stability for an SIR epidemic model with delay: distributed or discrete [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications ,2010 ,11(1) : 55-59.
- [7] Huang Wenzhang ,Han Maoan ,Liu Kaiyu. Dynamics of an SIR reaction-diffusion epidemic model for disease transmission [J]. Mathematical Biosciences and Engineering , 2010 ,7(1) : 51-66.
- [8] Peng Rui ,Liu Shengqiang. Global stability of the steady states of an SIS epidemic reaction-diffusion model [J]. Nonlinear Analysis: Theory , Methods & Applications , 2009 ,71(1/2) : 239-247.
- [9] Diethelm K. The analysis of fractional differential equations [M]. Berlin: Springer 2010.
- [10] Pooseh S ,Rodrigues H S ,Torres D F M. Fractional derivatives in dengue epidemics [EB/OL]. <http://arxiv.org/abs/1108.1683>.
- [11] He Jihuan. Homotopy perturbation technique [J]. Computer methods in applied mechanics and engineering ,1999 , 178(3/4) : 257-262.
- [12] He Jihuan. A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems [J]. International Journal of Nonlinear Mechanics ,2000 ,35(1) : 37-43.
- [13] Mohyud-Din S T ,Yildirim A ,Hosseini M M. Homotopy perturbation method for fractional differential equations [J]. World Applied Sciences Journal ,2011 ,12: 2180-2183.
- [14] Das S ,Gupta P K ,Rajeev. A fractional predator-prey model and its solution [J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation ,2009 ,10(1) : 873-876.
- [15] Das S ,Gupta P K. A mathematical model on fractional Lotka-Volterra equations [J]. Journal of Theoretical Biology , 2011 ,277(1) : 1-6.

The Analytical Approximation of Solutions for Fractional Epidemic Models

XIAO Shuiming¹ ,YANG Lanhui² ,ZHOU Jiaxing¹

(1. Department of Mathematics ,Nanchang University ,Nanchang Jiangxi 330031 ,China;

2. School of Software ,Nanchang University ,Nanchang Jiangxi 330047 ,China)

Abstract: By the homotopy perturbation method (HPM) ,the approximate analytic solutions of fractional-order time derivatives are presented for the classical *SIR* ,*SIRS* and *SIS* epidemic models with initial values. Besides ,the numerical simulation results illustrate the memory character of FDEs ,which improves and expands current results for epidemic dynamic. It will inspire further research on the fractional epidemic systems.

Key words: fractional differential equations; epidemic model; homotopy perturbation method; approximate analytic solution

(责任编辑: 曾剑锋)