

文章编号: 1000-5862(2016)02-0209-05

# 复修正 KdV 方程的高阶保能量方法

闫静叶 孙建强\*

(海南大学信息科学技术学院数学系 海南 海口 570228)

摘要: 利用4阶平均向量场方法和拟谱方法构造了复修正 KdV 方程的高阶保能量平均向量场格式, 并利用构造的高阶保能量格式数值模拟了方程孤立波的演化行为. 数值结果表明: 构造的4阶格式具有好的稳定性, 可以很好地模拟孤立波的演化行为, 并且精确保持方程的能量守恒特性.

关键词: 平均向量场方法; 保能量方法; 复修正 KdV 方程; 孤立波

中图分类号: O 241.5 文献标志码: A DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2016.02.20

## 0 引言

KdV 方程是荷兰数学家 Korteweg-de Vries 为了描述表面原场特点而导出的1类重要的孤立波方程, 广泛存在于非谐晶体、泡沫液混合物、磁流体动力学、离子声波中. 复修正 KdV 方程被应用于分子链模型或者广义弹性固体中描述等离子波、横波的传播. 一般的复修正 KdV 方程<sup>[1]</sup>表示为

$$u_t + u_{xxx} + \alpha(|u|^2 u)_x = 0, \quad (1)$$

初始条件  $u(x, 0) = u_0(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ,  $t > 0$ ,  $\alpha > 0$  是常数. 方程(1)具有保持系统能量守恒特性

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(|u_x|^2) - \frac{\alpha}{4}(|u|^2)^2 dx = E_0,$$

其中  $E_0$  为常数. 现有的文献利用不同的数值方法求解了 KdV 方程, 包括多辛方法<sup>[2-3]</sup>、有限差分法<sup>[4-5]</sup>等. 但这些方法一般不能完全精确保持 KdV 方程的能量守恒特性.

1984年, 冯康院士及其研究小组提出了保持哈密顿系统辛结构的辛几何算法. 在辛几何算法的基础上, T. J. Bridges 等将辛几何算法发展为多辛几何算法. 理论和数值实验表明辛和多辛算法只能近似保持哈密顿系统能量守恒特性<sup>[4-8]</sup>. 近年来, G. R. W. Quispel 等提出了在时间方向上具有2阶精度的平均向量场(AVF)方法. 2阶平均向量场方法<sup>[9]</sup>已广泛地应用于求解具有能量守恒的偏微分方程<sup>[10-11]</sup>中, 取得了很好的数值结果<sup>[12]</sup>. 基于修正向量场的思想, G. R. W. Quispel 等<sup>[13]</sup>提出了在时间方向上具有3阶和4阶精度的高阶保能量格式. 本

文利用高阶保能量平均向量场方法研究求解复修正 KdV 方程.

本文先介绍了平均向量场方法的基本思想, 然后在时间方向上利用4阶平均向量场方法, 空间方向上用拟谱方法构造了复修正 KdV 方程(1)的4阶保能量守恒格式, 最后利用4阶保能量守恒格式求解复修正 KdV 方程, 验证格式的保能量守恒特性.

## 1 平均向量场方法

首先介绍平均向量场方法及其保哈密顿系统的能量守恒特性<sup>[13-15]</sup>. 给定常微分方程

$$dz/dt = f(z) = S \nabla H(z), \quad z(0) = z_0, \quad z \in \mathbf{R}^{2N}.$$

假设  $H: \mathbf{R}^{2N} \rightarrow \mathbf{R}$  是哈密顿系统的能量函数, 其中  $S$  是反对称矩阵, 且

$$\begin{aligned} dH(z(t))/dt &= \nabla H(z)^T dz/dt = \\ &= \nabla H(z)^T S \nabla H(z) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

这表明哈密顿系统(2)具有能量守恒特性. 为了让系统(2)在离散后依然保持能量守恒特性, 下面给出具有4阶精度的高阶平均向量场格式

$$\begin{aligned} \frac{z^{n+1} - z^n}{\tau} &= S \int_0^1 \nabla H((1-\xi)z^n + \xi z^{n+1}) d\xi - \frac{\tau^2}{12} \hat{S} \cdot \\ &\int_0^1 \nabla H((1-\xi)z^n + \xi z^{n+1}) d\xi, \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\hat{S}$  为反对称矩阵, 且  $\hat{S} = SHSHS$ ,  $H_{i,j} = \partial^2 H(z)/\partial z_i \partial z_j$ .

由于

$$(H(z^{n+1}) - H(z^n))/\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^1 \frac{d}{d\xi} H((1-\xi)z^n +$$

收稿日期: 2015-12-28

基金项目: 国家自然科学基金(11561018, 11161017)和海南省自然科学基金(114003)资助项目.

通信作者: 孙建强(1971-), 男, 湖南双峰县人, 教授, 博士, 主要从事微分方程数值解法的研究.

$$\begin{aligned} \xi z^{n+1}) d\xi &= \left( \int_0^1 \nabla H((1-\xi)z^n + \xi z^{n+1}) d\xi \right)^T \cdot \\ S \int_0^1 \nabla H((1-\xi)z^n + \xi z^{n+1}) d\xi &= \left( \int_0^1 \nabla H((1-\xi)z^n + \xi z^{n+1}) d\xi \right)^T \frac{z^{n+1} - z^n}{\tau} - \frac{\tau^2}{12} \left( \int_0^1 \nabla H((1-\xi)z^n + \xi z^{n+1}) d\xi \right)^T \wedge \int_0^1 \nabla H((1-\xi)z^n + \xi z^{n+1}) d\xi = 0, \quad (4) \end{aligned}$$

据(4)式可知4阶平均向量场格式(3)在每个时间层上保持哈密顿系统离散能量守恒.

## 2 复修正 KdV 方程的高阶保能量格式

设  $u(x, t) = p(x, t) + q(x, t)i$ , 复修正 KdV 方程(1)等价于

$$\begin{aligned} p_t + p_{xxx} + \alpha((p^2 + q^2)p)_x &= 0, \\ q_t + q_{xxx} + \alpha((p^2 + q^2)q)_x &= 0. \end{aligned}$$

复修正 KdV 方程(1)转化为无穷维哈密顿系统

$$\frac{dz}{dt} = J \frac{\delta H(z)}{\delta u} J = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x \end{pmatrix}, \quad (5)$$

其中  $z = (p, q)^T$ ,  $\partial_x$  是1阶偏导数, 哈密顿函数为

$$H(z) = \int ((p_x)^2 + (q_x)^2)/2 - \alpha(p^2 + q^2)^2/4 dx.$$

利用拟谱方法离散复修正 KdV 方程的无穷维哈密顿系统(5). 设空间积分区间  $\Omega = [a, b]$ ,  $L = b - a$ . 将  $\Omega$  分为  $N$  等份  $h = L/N$  为空间步长,  $N$  是正偶数.  $x_j = a + hj$  ( $j = 0, 1, \dots, N-1$ ) 为空间配置点. 令  $p_j$  和  $q_j$  分别是  $p(x, t)$  和  $q(x, t)$  在配置点  $x_j$  处的近似. 定义

$$S_N = \{g_j(x) : -N/2 \leq j \leq N/2 - 1\}$$

为插值空间, 其中  $g_j(x)$  是满足  $g_j(x_i) = \delta_j^i$  的  $N$  次正交三角多项式, 并且  $g_j(x)$  可以表示为

$$g_j(x) = \frac{1}{N} \sum_{l=-N/2}^{N/2} \frac{1}{c_l} e^{i\mu_l(x-x_j)},$$

其中  $c_l = 1$  ( $l \neq N/2$ ),  $c_{-N/2} = c_{N/2} = 2$ ,  $\mu = 2\pi/L$ .

对函数  $p(x, t) \in C^0(\Omega)$  定义插值逼近算子  $I_N$  为

$$I_N p(x, t) = \sum_{l=0}^{N-1} p_l g_l(x),$$

插值算子  $I_N$  在配置点  $x_j$  满足

$$I_N p(x_j, t) = \sum_{l=0}^{N-1} p_l g_l(x_j) = p(x_j, t),$$

$j = 0, 1, \dots, N-1$ . 假设  $P = (p_0, p_1, \dots, p_{N-1})^T$ , 定义  $(D_k)_{ij} = d^k g_j(x_i) / dx^k$ , 称  $D_k$  为  $k$  阶微分矩阵. 通过计算可以得到

$$\frac{d}{dx} I_N p(x, t) \big|_{x=x_j} = \sum_{l=0}^{N-1} p_l \frac{dg_l(x_j)}{dx} = (D_1 P)_j,$$

$$\frac{d^2}{dx^2} I_N p(x, t) \big|_{x=x_j} = \sum_{l=0}^{N-1} p_l \frac{d^2 g_l(x_j)}{dx^2} = (D_2 P)_j.$$

同理可得

$$\frac{d}{dx} I_N q(x, t) \big|_{x=x_j} = \sum_{l=0}^{N-1} q_l \frac{dg_l(x_j)}{dx} = (D_1 Q)_j,$$

$$\frac{d^2}{dx^2} I_N q(x, t) \big|_{x=x_j} = \sum_{l=0}^{N-1} q_l \frac{d^2 g_l(x_j)}{dx^2} = (D_2 Q)_j,$$

其中  $Q = (q_0, q_1, \dots, q_{N-1})^T$ ,  $D_1$  和  $D_2$  分别是1阶和2阶谱矩阵

$$(D_1)_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu (-1)^{i+j} \cot(\mu \frac{x_i - x_j}{2}) & i \neq j, \\ 0 & i = j, \end{cases}$$

$$(D_2)_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu^2 (-1)^{i+j+1} \frac{1}{\sin^2(\mu \frac{x_i - x_j}{2})} & i \neq j, \\ -\mu^2 (N^2 + 2)/12 & i = j. \end{cases}$$

利用1阶微分矩阵  $D_1$  近似哈密顿微分算子  $\partial_x$ , 可以得到复修正 KdV 方程半离散拟谱格式

$$\begin{aligned} dp_i/dt &= -\alpha \sum_{j=0}^{N-1} d_{ij} (p_j^2 + q_j^2) p_j - (AP)_i, \\ dq_i/dt &= -\alpha \sum_{j=0}^{N-1} d_{ij} (p_j^2 + q_j^2) q_j - (AQ)_i, \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $A = D_1 D_2$ ,  $d_{ij}$  是矩阵  $D_1$  第  $i$  行第  $j$  列元素.

(6)式可以表示为有限维哈密顿系统

$$dZ/dt = f(Z) = J \nabla H(Z), \quad (7)$$

其中  $Z = [P^T, Q^T]^T$ ,  $J = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$ . 相应的离散哈密顿函数为

$$H(Z) = -\frac{\alpha}{4} \sum_{i=0}^{N-1} (p_i^2 + q_i^2)^2 - \frac{1}{2} (P^T D_2 P + Q^T D_2 Q).$$

在时间方向上用高阶平均向量场方法离散有限维哈密顿系统(7), 构造了复修正 KdV 方程的高阶保能量平均向量场格式.

$$\frac{Z^{n+1} - Z^n}{\tau} = \int_0^1 f((1-\xi)Z^n + \xi Z^{n+1}) d\xi -$$

$$\frac{1}{12} \tau^2 J^2 \int_0^1 f((1-\xi)Z^n + \xi Z^{n+1}) d\xi, \quad (8)$$

其中

$$\hat{J}^T J \hat{H} = \begin{pmatrix} C-A & D \\ D & B-A \end{pmatrix} \hat{H}_{ij} = \frac{\partial^2 H}{\partial Z_i \partial Z_j} \left( \frac{Z^{n+1} + Z^n}{2} \right),$$

$$B_{ii} = \left( -\alpha \sum_{j=0}^{N-1} D_1 \left( \left( \frac{p_j^n + p_j^{n+1}}{2} \right)^2 + 3 \left( \frac{q_j^n + q_j^{n+1}}{2} \right)^2 \right) \right)_i,$$

$$C_{ii} = \left( -\alpha \sum_{j=0}^{N-1} D_1 \left( 3 \left( \frac{p_j^n + p_j^{n+1}}{2} \right)^2 + \left( \frac{q_j^n + q_j^{n+1}}{2} \right)^2 \right) \right)_i,$$

$$D_{ii} = \left( -2\alpha \sum_{j=0}^{N-1} D_1 \left( \left( \frac{q_j^n + q_j^{n+1}}{2} \right)^2 + \left( \frac{p_j^n + p_j^{n+1}}{2} \right)^2 \right) \right)_i,$$

$B, C, D$  为  $N \times N$  阶对角矩阵,

$$\hat{J}^2 = \begin{pmatrix} C - A & D \\ D & B - A \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \hat{B} & \hat{C} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}$$

(8) 式可以表示为矩阵向量形式

$$\begin{pmatrix} \frac{P^{n+1} - P^n}{\tau} \\ \frac{Q^{n+1} - Q^n}{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \end{pmatrix} - \frac{\tau^2}{12} \begin{pmatrix} \hat{B} & \hat{C} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

其中  $F^1 = (F_1^1, F_2^1, \dots, F_N^1)^T$ ,  $F^2 = (F_1^2, F_2^2, \dots, F_N^2)^T$ ,

$$F_i^1 = - \int_0^1 \alpha \left( \sum_{j=0}^{N-1} d_{ij} \{ [((1-\xi)p_j^n + \xi p_j^{n+1})^2 + ((1-\xi)q_j^n + \xi q_j^{n+1})^2] [(1-\xi)p_j^n + \xi p_j^{n+1}] \} - (A((1-\xi)P^n + \xi P^{n+1}))_i \right) d\xi, \quad (10)$$

$$F_i^2 = - \int_0^1 \alpha \left( \sum_{j=0}^{N-1} d_{ij} \{ [((1-\xi)p_j^n + \xi p_j^{n+1})^2 + ((1-\xi)q_j^n + \xi q_j^{n+1})^2] [(1-\xi)q_j^n + \xi q_j^{n+1}] \} - (A((1-\xi)Q^n + \xi Q^{n+1}))_i \right) d\xi. \quad (11)$$

(10) 式和 (11) 式等价于

$$F_i^1 = - \alpha \sum_{j=0}^{N-1} d_{ij} \left( \frac{p_j^n}{3} ((p_j^n)^2 + (p_j^{n+1})^2 + p_j^n p_j^{n+1} + (q_j^n)^2 + (q_j^{n+1})^2 + q_j^n q_j^{n+1}) + (p_j^{n+1} - p_j^n) ((p_j^n)^2/2 + 2p_j^n(p_j^{n+1} - p_j^n)/3 + (p_j^{n+1} - p_j^n)^2/4) + (p_j^{n+1} - p_j^n) ((q_j^n)^2/2 + 2q_j^n(q_j^{n+1} - q_j^n)/3 + (q_j^{n+1} - q_j^n)^2/4) \right) - \sum_{j=0}^{N-1} a_{ij} (p_j^{n+1} + p_j^n)/2,$$

$$F_i^2 = - \alpha \sum_{j=0}^{N-1} d_{ij} \left( \frac{q_j^n}{3} ((p_j^n)^2 + (p_j^{n+1})^2 + p_j^n p_j^{n+1} + (q_j^n)^2 + (q_j^{n+1})^2 + q_j^n q_j^{n+1}) + (q_j^{n+1} - q_j^n) ((p_j^n)^2/2 + 2p_j^n(p_j^{n+1} - p_j^n)/3 + (p_j^{n+1} - p_j^n)^2/4) + (q_j^{n+1} - q_j^n) ((q_j^n)^2/2 + 2q_j^n(q_j^{n+1} - q_j^n)/3 + (q_j^{n+1} - q_j^n)^2/4) \right) - \sum_{j=0}^{N-1} a_{ij} (q_j^{n+1} + q_j^n)/2,$$

(9) 式可以改写为

$$(p_i^{n+1} - p_i^n)/\tau = F_i^1 - \frac{\tau^2}{12} \sum_{j=0}^{N-1} (\hat{b}_{ij} F_j^1 + \hat{c}_{ij} F_j^2),$$

$$(q_i^{n+1} - q_i^n)/\tau = F_i^2 - \frac{\tau^2}{12} \sum_{j=0}^{N-1} (\hat{c}_{ij} F_j^1 + \hat{d}_{ij} F_j^2), \quad (12)$$

其中  $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ,  $\hat{b}_{ij}, \hat{c}_{ij}, \hat{d}_{ij}, a_{ij}, d_{ij}$  分别表示矩阵  $\hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, A, D_1$  第  $i$  行第  $j$  列元素.

### 3 数值模拟

为了验证复修正 KdV 方程的高阶精度格式 (12) 的保能量守恒特性, 利用格式 (12) 数值模拟

复修正 KdV 方程的孤立波演化行为和方程的相对能量误差变化, 其中离散能量函数为

$$H(Z^n) = - \frac{\alpha}{4} \sum_{i=0}^{N-1} ((p_i^n)^2 + (q_i^n)^2) -$$

$$((P^n)^T D_2 P^n + (Q^n)^T D_2 Q^n)/2,$$

定义相对离散能量误差为

$$R_E(t) = |H(Z^n) - H(Z^0)|.$$

例 1 取复修正 KdV 方程 (1) 的初始条件为

$$u(x, 0) = \sqrt{2c/\alpha} \operatorname{sech}[\sqrt{c}(x - x_0)] e^{i\theta},$$

边界条件  $u(0, t) = u(80, t)$ , 其中  $(x, t) \in [0, 80] \times [0, 60]$ . 取  $L = 80$ , 空间配置点  $N = 230$ , 时间步长  $\tau = 0.002$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $\theta = \pi/2$ ,  $x_0 = 15$ .

图 1 表示单孤立波在  $t \in [0, 60]$  时的单孤立波数值解的演化行为. 单孤立波以一定的速度向前传播, 孤立波的波形和振幅可以很好地保持. 图 2 表示高阶保能量格式的相对能量误差在  $t \in [0, 60]$  时的变化情况, 离散能量误差可忽略不计. 从图 1 和图 2 可以看出, 高阶保能量格式可以很好地数值模拟单孤立波的演化行为, 且精确地保持复修正 KdV 方程离散的能量守恒.

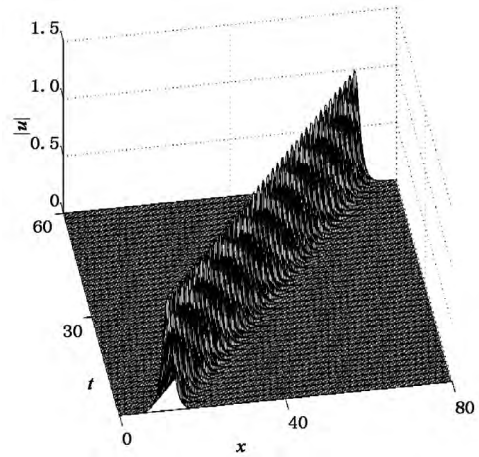


图 1 单孤立波演化行为

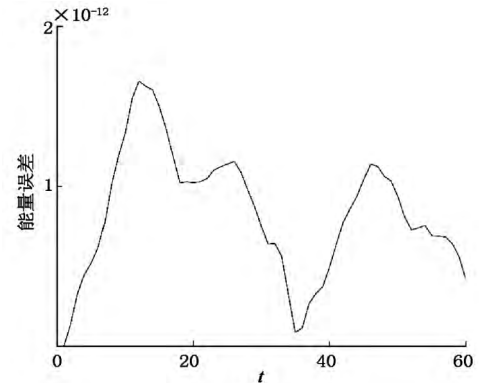


图 2 高阶保能量格式的相对能量误差在  $t \in [0, 60]$  时的变化

例2 取复修正 KdV 方程(1) 的初始条件为

$$u(x, 0) = \sum_{j=1}^2 \sqrt{2c_j/\alpha} \operatorname{sech}[\sqrt{c_j}(x-x_j)] e^{i\theta_j},$$

边界条件  $u(0, t) = u(100, t)$ , 其中  $(x, t) \in [0, 100] \times [0, 40]$ . 取  $c_1 = 2$ ,  $c_2 = 0.5$ ,  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = 0$ ,  $x_1 = 15$ ,  $x_2 = 40$ ,  $\alpha = 2$ ,  $L = 100$ , 空间配置点  $N = 290$ , 时间步长  $\tau = 0.001$ .

图3 表示双孤立波在振幅  $c_1 = 2$ ,  $c_2 = 0.5$  时间  $0 \leq t \leq 40$  时的相互作用. 可以看到双孤立波分别从初始位置  $x_1 = 15$ ,  $x_2 = 40$  相向运动, 相互碰撞, 然后离开. 在碰撞过程中, 两孤立波的振幅发生了变化, 但当碰撞结束后, 孤立波的振幅和波形没有发生变化. 数值结果表明孤立波的碰撞不改变孤立波的波形. 图4 给出了其相应的相对能量误差变化情况. 复修正 KdV 方程的离散能量可以精确地保持.

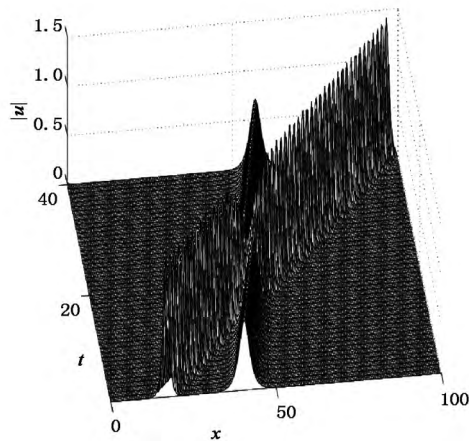


图3 双孤立波的相互作用

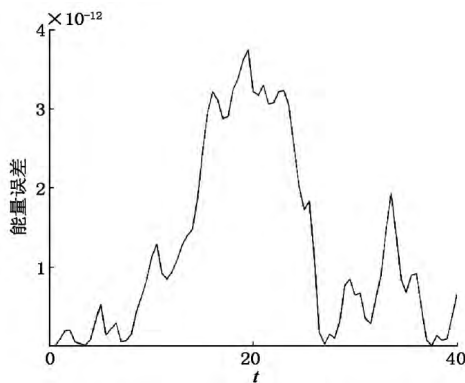


图4 高阶保能量格式的相对能量

误差在  $t \in [0, 40]$  时的变化

例3 取复修正 KdV 方程(1) 的初始条件为

$$u(x, 0) = \sum_{j=1}^2 \sqrt{2c_j/\alpha} \operatorname{sech}[\sqrt{c_j}(x-x_j)] e^{i\theta_j},$$

边界条件  $u(0, t) = u(100, t)$ , 其中  $(x, t) \in [0, 100] \times [0, 30]$ . 取  $c_1 = 2$ ,  $c_2 = 0.5$ ,  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \pi/2$ ,  $x_1 = 15$ ,  $x_2 = 40$ ,  $\alpha = 2$ ,  $L = 100$ , 空间配置点

$N = 320$ , 时间步长  $\tau = 0.003$ .

图5 表示双孤立波在振幅  $c_1 = 2$ ,  $c_2 = 0.5$  时间  $0 \leq t \leq 30$  时的相互作用. 可以看到双孤立波分别从初始位置  $x_1 = 15$ ,  $x_2 = 40$  相向运动, 相互碰撞, 然后离开. 在碰撞过程中, 两孤立波的振幅发生了变化, 但当碰撞结束后, 孤立波的振幅和波形没有发生变化. 数值结果表明孤立波的碰撞不改变孤立波的波形. 图6 给出了其相应的相对能量误差变化情况. 复修正 KdV 方程的离散能量同样可以精确地保持.

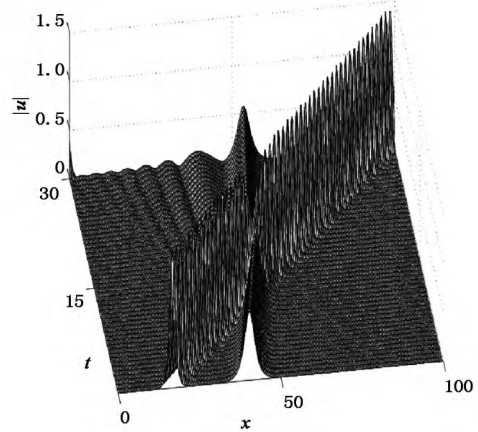


图5 双孤立波的相互作用

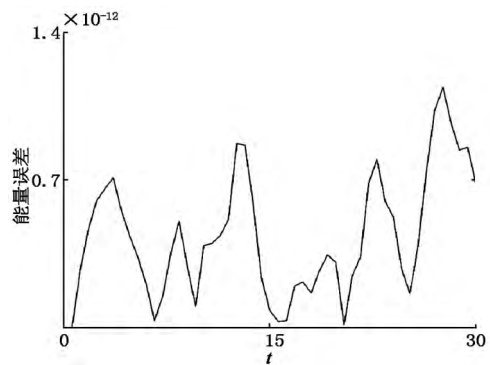


图6 高阶保能量格式的相对能量  
误差在  $t \in [0, 30]$  时的变化

## 4 结论

本文利用4阶平均向量场方法和拟谱方法, 在理论上构造了复修正 KdV 方程的高阶保能量格式. 利用高阶保能量格式数值模拟孤立波的演化并分析格式的相对能量误差变化. 数值结果表明复修正 KdV 方程高阶保能量格式可以很好地模拟孤立波的演化行为, 并且可以精确地保持方程的离散能量. 显然, 高阶平均向量场方法为计算能量守恒偏微分方程提供了新的选择.

## 5 参考文献

- [1] Aydin A ,Karasözen B. Multisymplectic box schemes for the complex modified Korteweg-de equation. [J]. J Math Phys 2010 51( 8) : 60-63.
- [2] Ascher U M ,McLachlan R I. On symplectic and mutisymplectic schemes for the KdV equation [J]. J Sci Comput , 2005 25( 1) : 83-104.
- [3] Wang Yushun ,Wang Bing ,Chen Xin. Multi-symplectic Euler-box scheme for the KdV equation [J]. Chin Phys Lett 2007 24( 2) : 312-314.
- [4] 秦孟兆,王雨顺. 偏微分方程的保结构算法 [M]. 杭州: 浙江科学技术出版社 2011.
- [5] Hong Jialin ,Liu Ying. Multisymplecticity of the centred box scheme for a class of Hamiltonian PDEs and an application to quasi-periodically solitary waves [J]. Math Comput Model 2004 39( 9/10) : 1035-1047.
- [6] Feng Kang ,Qin Mengzhao. Symplectic geometric algorithms for Hamilton systems [M]. Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Publishing House 2010.
- [7] 冯康 秦孟兆. 哈密尔顿系统的辛几何法 [M]. 杭州: 浙江科学技术出版社 2003.
- [8] 王雨顺,王斌,秦孟兆. 偏微分方程的局部保结构算法 [J]. 中国科学 2008 38( 4) : 377-397.
- [9] Gong Yuezheng ,Cai Jiaxiang ,Wang Yushun. Some new structure-preserving algorithms general multi-symplectic formulations of Hamiltonian PDEs [J]. J Comput Phys , 2014 279( 1) : 80-102.
- [10] 蒋朝龙,黄荣芳,孙建强. 耦合非线性薛定谔方程的平均离散梯度法 [J]. 工程数学学报 2014 31( 5) : 707-718.
- [11] 李昊晨,孙建强,骆思宇. 非线性薛定谔方程的平均向量场方法 [J]. 计算数学 2013 35( 1) : 59-66.
- [12] Celledoni E ,Grimm V ,McLachlan R I ,et al. Preserving energy resp. dissipation in numerical PDEs using the “average vector field” method [J]. J Comput Phys 2012 231( 20) : 6770-6789.
- [13] Quispel G R W ,McLaren D I. A new class of energy-preserving numerical integration methods [J]. J Phys A: Math Theor 2008 41( 4) : 1-7.
- [14] Celledoni E ,McLachlan R I ,Owren B ,et al. On conjugate B-series and their geometric structure [J]. Journal of Numerical Analysis ,Industrial and Applied Mathematics , 2010 5( 1/2) : 85-94.
- [15] McLachlan R I ,Quispel G R W ,Robidoux N. Geometric integration using discrete gradients [J]. Phil Trans R Soc A ,1999 357( 1754) : 1021-1045.

## The High Order Energy Preserving Method for the Complex Modified KdV Equation

YAN Jingye ,SUN Jianqiang \*

( College of Information Science and Technology ,Hainan University ,Haikou Hainan 570228 ,China)

**Abstract:** The fourth order energy preserving scheme for the complex modified KdV equation is obtained by applying the fourth order average vector field method( AVF) and the Fourier pseudospectral method. The new fourth order energy preserving scheme is applied to simulate the behaviors of solitary waves of the KdV equation. Numerical results show that the fourth order scheme has a nice stability and can well simulate the solitary wave evolution behaviors of the complex modified KdV equation in long time ,moreover preserve the discrete energy conservation of the system.

**Key words:** average vector field method; energy-preserving method; the complex modified KdV equation; the solitary wave

( 责任编辑: 曾剑锋)