文章编号:1000-5862(2016)03-0263-05

半零模在 2 一致模上的分配性

闵幼梅,覃 锋*

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要:鉴于 2 一致模是一致模和零模的公共推广,半零模是通过去掉零模的结合性和交换性而获得. 对于一些特殊情况,给出了带有连续基本算子的半零模在 2 一致模上分配的充要条件.

关键词:分配性方程;2 一致模;半零模;半三角模;半三角余模

中图分类号:O 14;O 17 文献标志码:A DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2016.03.09

0 引言

由于聚合算子的函数方程在模糊集理论和模糊逻辑中扮演着重要的角色[1-3],所以 P. Drygas 等[4]认为一致模与零模之间分配性方程与不等式的讨论是一个新的研究方向. 事实上,一致模是三角模与三角余模的一种特殊组合,它的单位元可以位于单位区间的任何位置.

本文主要致力于解决带有连续基本算子的半零模在 2 一致模上的分配性. 这主要是因为基于模糊逻辑连接词及其推广的分配性在伪分析、多属性决策和模糊控制中有广泛应用. 2 一致模是零模与一致模的推广,甚至可以推广到 n 一致模[5]. 所谓 2 一致模是一个具有递增性、结合律和交换性的 2 元函数,并且在单位区间内有 1 个吸收元把单位区间分成 2 个子区间,每个子区间有各自的单位元. 半零模是通过去掉零模的交换性与结合性而获得.

1 预备知识

定义 1[6] 设 $e \in [0,1]$,若 2 元函数 $U: [0,1]^2 \to [0,1]$ 满足结合律和交换性,关于每个变元单调递增,且 $\forall x \in [0,1]$ 都满足 $U(x,e) = x$,则称 U 为一致模,e 为 U 的单位元.

用 U_e 表示以 e 为单位元的一致模族. 特别地,当 $e = 0$ 时,U 是一个三角余模,当 $e = 1$ 时,U 是一个三角模. 当 $e \in (0,1)$ 时,记 $D_e = [0,e) \times (e,1] \cup (e,1] \times [0,e)$.

定理 A[7] 设 $e \in [0,1]$,$U \in U_e$ 当且仅当

$$U(x,y) = \begin{cases} eT_U(x/e,y/e), & x,y \in [0,e], \\ e + (1-e)S_U(\frac{x-e}{1-e},\frac{y-e}{1-e}), & x,y \in [e,1], \\ C(x,y), & x,y \in D_e, \end{cases}$$

其中 $T_U: [0,1]^2 \to [0,1]$ 与 $S_U: [0,1]^2 \to [0,1]$ 分别是三角模与三角余模,递增函数 $C: D_e \to [0,1]$ 且满足 $\min(x,y) \leqslant C(x,y) \leqslant \max(x,y)$. $\forall U \in U_e$,有 $U(0,1) \in \{0,1\}$.

定理 B 设 $e \in (0,1)$,$U \in U_e$,且 $U(x,1)$ 与 $U(x,0)$ 除了在 $x = e$ 处不连续外都连续,

(i) 若 $U(0,1) = 0$,则

$$U(x,y) = \begin{cases} eT(x/e,y/e), & x,y \in [0,e], \\ e + (1-e)S(\frac{x-e}{1-e},\frac{y-e}{1-e}), & x,y \in [e,1], \\ \min(x,y), & x,y \in D_e, \end{cases}$$

记这类一致模全体为 $U_e^{\min}$,其中 T,S 分别是三角模与三角余模;

(ii) 若 $U(0,1) = 1$,则

$$U(x,y) = \begin{cases} eT(x/e,y/e), & x,y \in [0,e], \\ e + (1-e)S(\frac{x-e}{1-e},\frac{y-e}{1-e}), & x,y \in [e,1], \\ \max(x,y) & x,y \in D_e, \end{cases}$$

记这类一致模全体为 $U_e^{\max}$,其中 T,S 分别是三角模与三角余模.

定义 2 令 $F: [0,1]^2 \to [0,1]$,$a \in [0,1]$,若 $F(a,a) = a$,则称 a 是函数 F 的幂等元. 若 $\forall x \in [0,1]$,$F(x,x) = x$,则称函数 F 是幂等的.

定理 C[8] 设 $e \in (0,1)$,

收稿日期:2016-02-15

基金项目:国家自然科学基金(61563020)和江西省自然科学基金(20151BAB201019)资助项目.

通信作者:覃 锋(1976-),男,湖北鹤峰人,教授,博士,主要从事模糊逻辑与模糊控制研究.

$$U^{\min}(x,y)=\begin{cases}\max(x,y), & x,y\in[e,1],\\ \min(x,y), & \text{其他},\end{cases}$$

$$U^{\max}(x,y)=\begin{cases}\min(x,y), & x,y\in[0,e],\\ \max(x,y), & \text{其他},\end{cases}$$

它们分别是 $U_e^{\min}$ 和 $U_e^{\max}$ 中唯一的幂等一致模.

定义3[5] 设 $0\leqslant e\leqslant k\leqslant f\leqslant 1$,若2元函数 F: $[0,1]^2\rightarrow[0,1]$ 具有交换性和结合性,关于每个变元单调递增,且满足当 $x\leqslant k$ 时,$F(e,x)=x$,当 $x\geqslant k$ 时,$F(f,x)=x$,则称函数 F 为2一致模,记所有的2一致模为 $U_{k(e,f)}$.

注1 若 $F\in U_{k(e,f)}$,则 $\forall x\in[e,f]$ 有 $F(x,k)=k$;若 $F\in U_{k(e,f)}$,则 $F(0,1)\in\{0,k,1\}$.

注1中把 $U_{k(e,f)}$ 分为 $C^0_{k(e,f)}$,$C^1_{k(e,f)}$,$C^k_{k(e,f)}$ 或简记为 C^0,C^1,C^k,再根据 $F(1,k)$ 与 $F(0,k)$ 的值进一步分为 C^0_k,C^0_1,C^1_k,C^1_0,C^k.

定理D[5] 若 $F\in U_{k(e,f)}$,$0<e\leqslant k<f\leqslant 1$,且 $F(x,1)$ 仅在 $x=e$ 和 $x=f$ 处不连续,则 $F(1,k)=k$,$F\in C^0$ 当且仅当

$$F(x,y)=\begin{cases}kU^{c1}(x/k,y/k), & x,y\in[0,k],\\ k+(1-k)U^{c2}\left(\dfrac{x-k}{1-k},\dfrac{y-k}{1-k}\right), & x,y\in[k,1],\\ \min(x,y), & (x,y)\in(k,1]\times[0,e)\cup[0,e)\times(k,1],\\ k, & (x,y)\in[k,1]\times[e,k]\cup[e,k]\times[k,1],\end{cases}$$

其中 U^{c1}: $[0,1]^2\rightarrow[0,1]$ 和 U^{c2}: $[0,1]^2\rightarrow[0,1]$ 分别属于 $U_e^{\min}$ 和 $U_f^{\min}$,记这类2一致模全体为 C^0_k.

定理E 若 $F\in U_{k(e,f)}$,$0<e\leqslant k\leqslant f<1$,$F(x,1)$ 仅在 $x=e$ 处不连续,$F(x,e)$ 仅在 $x=f$ 处不连续,则 $F(1,k)=1$,$F\in C^0$ 当且仅当

$$F(x,y)=\begin{cases}kU^{c}(x/k,y/k), & x,y\in[0,k],\\ k+(1-k)U^{d}\left(\dfrac{x-k}{1-k},\dfrac{y-k}{1-k}\right), & x,y\in[k,1],\\ \min(x,y), & (x,y)\in(k,1]\times[0,e)\cup[0,e)\times(k,1],\\ \max(x,y), & (x,y)\in(f,1]\times[e,k)\cup[e,k)\times(f,1],\\ k, & (x,y)\in[k,f]\times[e,k]\cup[e,k]\times[k,f],\end{cases}$$

其中 U^c: $[0,1]^2\rightarrow[0,1]$ 和 U^d: $[0,1]^2\rightarrow[0,1]$ 分别属于 $U_e^{\min}$ 和 $U_f^{\max}$,记这类2一致模全体为 C^0_1.

定理F 若 $F\in U_{k(e,f)}$,$0\leqslant e<k\leqslant f<1$,$F(x,0)$ 仅在 $x=e$ 和 $x=f$ 处不连续,则 $F(0,k)=k$,$F\in C^1$ 当且仅当

$$F(x,y)=\begin{cases}kU^{d1}(x/k,y/k), & x,y\in[0,k],\\ k+(1-k)U^{d2}\left(\dfrac{x-k}{1-k},\dfrac{y-k}{1-k}\right), & x,y\in[k,1],\\ \max(x,y), & (x,y)\in(f,1]\times[0,k)\cup[0,k)\times(f,1],\\ k, & (x,y)\in[k,f]\times[0,k]\cup[0,k]\times[k,f],\end{cases}$$

其中 U^{d1}: $[0,1]^2\rightarrow[0,1]$ 和 U^{d2}: $[0,1]^2\rightarrow[0,1]$ 分别属于 $U_e^{\max}$ 和 $U_f^{\max}$,记这类2一致模类全体为 C^1_k.

定理G 若 $F\in U_{k(e,f)}$,$0<e\leqslant k\leqslant f<1$,$F(x,f)$ 仅在 $x=e$ 处不连续,$F(x,0)$ 仅在 $x=f$ 处不连续,则 $F(0,k)=0$,$F\in C^1$ 当且仅当

$$F(x,y)=\begin{cases}kU^{c}(x/k,y/k), & x,y\in[0,k],\\ k+(1-k)U^{d}\left(\dfrac{x-k}{1-k},\dfrac{y-k}{1-k}\right), & x,y\in[k,1],\\ \min(x,y), & (x,y)\in(k,f]\times[0,e)\cup[0,e)\times(k,f],\\ \max(x,y), & (x,y)\in(f,1]\times[0,k)\cup[0,k)\times(f,1],\\ k, & (x,y)\in[k,f]\times[e,k]\cup[e,k]\times[k,f],\end{cases}$$

其中 U^c: $[0,1]^2\rightarrow[0,1]$ 和 U^d: $[0,1]^2\rightarrow[0,1]$ 分别属于 $U_e^{\min}$ 和 $U_f^{\max}$. 记这类2一致模全体为 C^1_0.

定理H 若 $F\in U_{k(e,f)}$,$0\leqslant e\leqslant k\leqslant f\leqslant 1$,$F(x,0)$ 和 $F(x,1)$ 分别仅在 e 与 f 处不连续,则 $F\in C^k$ 当且仅当

$$F(x,y)=\begin{cases}kU^{d}(x/k,y/k), & x,y\in[0,k],\\ k+(1-k)U^{c}\left(\dfrac{x-k}{1-k},\dfrac{y-k}{1-k}\right), & x,y\in[k,1],\\ k, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 U^c: $[0,1]^2\rightarrow[0,1]$ 和 U^d: $[0,1]^2\rightarrow[0,1]$ 是分别属于 $U_e^{\max}$ 和 $U_f^{\min}$.

定义4[9] 若 F,G: $[0,1]^2\rightarrow[0,1]$ 满足(1)式时,则称 F 在 G 上是左分配的;若 F,G 满足(2)式时,则称 F 在 G 上是右分配的,若 F,G 同时满足(1)式与(2)式,则称 F 在 G 上是分配的.

$$F(x,G(y,z))=G(F(x,y),F(x,z)),\quad(1)$$

$$F(G(y,z),x)=G(F(y,x),F(z,x)).\quad(2)$$

引理1[10] 任何单调函数 $F(x,y)$: $[0,1]^2\rightarrow[0,1]$ 关于 $G(x,y)=\max(x,y)$,$x,y\in[0,1]$ 或者 $G(x,y)=\min(x,y)$,$x,y\in[0,1]$ 都满足分配性.

定义5[11] 若2元函数 T: $[0,1]^2\rightarrow[0,1]$ 具有

单调递增性和结合律,且有单位元 1,则称其为半三角模; 若 2 元函数 S: $[0,1]^2 \to [0,1]$ 具有单调递增性和结合律,且有单位元 0,则称其为半三角余模.

定义 6[12] 若 2 元函数 $V(x,y)$: $[0,1]^2 \to [0,1]$ 具有结合律和递增性,有零元 z,当 $x \leqslant z$ 时,有 $V(x,0) = V(0,x) = x$,当 $x \geqslant z$ 时,$V(x,1) = V(1,x) = x$,则称 2 元函数 V 为半零模,记所有以 z 为零元的半零模为 V_z.

定理 I[12] $V \in V_z$ 当且仅当

$$V_z(x,y) = \begin{cases} zS_V(x/z, y/z), & x,y \in [0,z], \\ z + (1-z)\,T_V\left(\dfrac{x-z}{1-z}, \dfrac{y-z}{1-z}\right), & x,y \in [z,1], \\ z, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 S_V 是半三角余模,T_V 是半三角模.

2　半零模在 2 一致模上的分配性

根据 2 一致模的分类分情况讨论半零模 F 在 $G \in \{C^k, C_k^0, C_1^0, C_0^1, C_k^1\}$ 的分配性. 但在本文中只讨论 $z = k$ 的情况,其他情况将在未来的工作中讨论.

引理 2　$F \in V_s$ 是带有连续基本算子 S_V 和 T_V 的半零模,$G \in U_{k(e,f)}$,$0 \leqslant e \leqslant k \leqslant f \leqslant 1$,若 F 关于 G 满足分配性,则函数 G 是幂等的.

证　仅证明左分配的情况,右分配的情况类似证明. 当 $x \leqslant s$ 时,取 $y = z = 0$,根据左分配性方程知 $x = F(x,0) = F(x,G(0,0)) = G(F(x,0),F(x,0)) = G(x,x)$. 当 $x \geqslant s$ 时,取 $y = z = 1$,根据左分配性方程知 $x = F(x,1) = F(x,G(1,1)) = G(F(x,1),F(x,1)) = G(x,x)$. 所以 $\forall x \in [0,1]$ 有 $G(x,x) = x$. 故函数 G 是幂等的. 并且注意到这里的半零模 $F \in V_s$,其中 s 可以不等于 k.

定理 1　设 $G \in U_{k(e,f)}$,$G \in C_k^0$,$0 < e \leqslant k < f \leqslant 1$,$F \in V_k$ 是带有连续基本算子 S_V 和 T_V 的半零模,则 F 在 2 一致模 G 上满足分配性当且仅当

$$G(x,y) = \begin{cases} U^{\min}(x,y), & x,y \in [e,1], \\ \min(x,y), & \text{其他}, \end{cases} \tag{3}$$

$$F(x,y) = \begin{cases} kS_F(x/k, y/k), & x,y \in [0,k], \\ \min(x,y), & (x,y) \in [k,f] \times [f,1] \cup [f,1] \times [k,f], \\ k + (f-k)\,T_{F1}\left(\dfrac{x-k}{f-k}, \dfrac{y-k}{f-k}\right), & x,y \in (k,f], \\ f + (1-f)\,T_{F2}\left(\dfrac{x-f}{1-f}, \dfrac{y-f}{1-f}\right), & x,y \in [f,1], \\ k, & \text{其他}, \end{cases} \tag{4}$$

其中 T_{F1}, T_{F2}: $[0,1]^2 \to [0,1]$ 都是半三角模.

证　根据引理 2 与定理 D,若 F 在 2 一致模 $G \in U_{k(e,f)}$ 上满足分配性,则假设 $x = e, y = 0, z = k$ 代入左分配性方程中 $e = F(e,0) = F(e,G(0,k)) = G(F(e,0),F(e,k)) = G(e,k) = k$,故 $e = k$. 则 $G(x,y)$ 有(3)式的结构.

下面证明 $F(f,f) = f$. 假设 $F(f,f) < f$,根据 F 的连续性知,存在 $f < t < 1$,使得 $F(f,f) < F(f,t) < F(f,1) = f$,再根据左分配方程知

$f = F(f,1) = F(f,G(t,1)) = G(F(f,t),F(f,1)) = G(F(f,t),f) = \min(F(f,t),f) = F(f,t)$,这与 $F(f,f) < F(f,t) < F(f,1) = f$ 矛盾,故假设不成立,则 $F(f,f) = f$.

再证当 $x \geqslant k$ 时,$F(x,f) = \min(x,f)$,当 $f \leqslant x$ 时,$f = F(f,f) \leqslant F(x,f) \leqslant F(1,f) = f$,故 $F(x,f) = \min(x,f) = f$. 当 $k \leqslant x \leqslant f$ 时,根据 F 的连续性及结合律,$\exists z$ 使得 $F(z,f) = x$,$F(x,f) = F(F(z,f),f) = F(z,F(f,f)) = F(z,f) = x = \min(x,f)$,故当 $x \geqslant k$ 时,$F(x,f) = \min(x,f)$. 同理可得当 $x \geqslant k$ 时,$F(f,x) = \min(f,x)$. 故连续半零模 $F(x,y)$ 的结构(4)式成立.

反过来,由于 G 是幂等的,故当 $y = z$ 时,F 显然在 G 上满足分配性. 下面讨论 $y < z$ 的情况,其他情况类似讨论,右分配方程的情况也类似讨论.

(i) $y \leqslant k$,$G(y,z) = y$,$G(F(x,y),F(x,z)) = \min(F(x,y),F(x,z)) = F(x,y) = F(x,G(y,z))$;

(ii) $k \leqslant y < f$,$x \leqslant k$,$k \leqslant G(y,z)$,$F(x,G(y,z)) = k = G(k,k) = G(F(x,y),F(x,z))$;

(iii) $k \leqslant y < f$,$x > k$,$k \leqslant F(x,G(y,z)) = F(x,y) \leqslant f$,$k \leqslant F(x,z)$,$G(F(x,y),F(x,z)) = \min(F(x,z),F(x,y)) = F(x,y) = F(x,F(y,z))$;

(iv) $f \leqslant y$,$k < x < f$,由(4)式知 $F(x,G(y,z)) = F(x,z) = x = G(x,x) = G(F(x,y),F(x,z))$;

(v) $f \leqslant y$,$x \geqslant f$,$f \leqslant \min(F(x,y),F(x,z))$,$F(x,G(y,z)) = F(x,z) = \max(F(x,y),F(x,z)) = G(F(x,y),F(x,z))$;

(vi) $f \leqslant y$,$x \leqslant k$,$F(x,G(y,z)) = F(x,z) = k$,$G(F(x,y),F(x,z)) = G(k,k) = k$.

故 F 在 G 上的满足分配性方程.

定理 2　设 $G \in U_{k(e,f)}$,$0 < e \leqslant k \leqslant f < 1$,$G \in C_1^0$,$F \in V_k$ 是带有连续基本算子 S_V 和 T_V 的半零模,若 F 在 2 一致模 G 满足分配性,则 $G = U^{\min}$.

证　根据引理 2 与定理 E,当 F 在 2 一致模 $G \in U_{k(e,f)}$ 满足分配性时,分别取 $x = e, y = 0, z = k$ 与 $x = f, y = 1, z = k$ 代入左分配性方程中 $e = F(e,0) = F(e,G(0,k)) = G(F(e,0),F(e,k)) = G(e,k) = k$,$f = F(f,1) = F(f,G(1,k)) = G(F(f,1),F(f,k)) = G(f,k) = k$. 故 $e = k = f$,进而有 $G = U^{\min}$.

定理 2 的逆命题不成立. 如当 $y < k < z, x > k$ 时,有 $F(x, G(y, z)) = F(x, y) = k, k \leqslant F(x, z)$,故 $G(F(x, y), F(x, z)) = G(k, F(x, z)) = F(x, z)$,但反之则不成立.

定理 3 设 $G \in U_{k(e,f)}, G \in C_0^1, 0 < e \leqslant k \leqslant f < 1, F \in V_k$ 是带有连续基本算子 S_V 和 T_V 的半零模,F 在 2 一致模 G 满足分配性,则 $G = U^{\max}$.

证 根据引理 2 与定理 F,若 F 在 2 一致模 $G \in U_{k(e,f)}$ 满足分配性,则 $e = k = f$. 证明过程类似于定理 2.

定理 3 的逆命题不成立. 如当 $y < k < z, x > k$ 时,$G(y, z) = z, F(x, G(y, z)) = F(x, z)$,又因为 $F(x, y) \leqslant k$,由此可知 $G(F(x, y), F(x, z)) = G(F(x, y), k) = F(x, y)$,因此反之不成立.

定理 4 设 $G \in U_{k(e,f)}, G \in C_k^1, 0 \leqslant e < k \leqslant f < 1, F \in V_k$ 是带有连续基本算子 S_V 和 T_V 的半零模,则 F 在 2 一致模 G 上满足分配性当且仅当

$$G(x, y) = \begin{cases} U^{\max}(x, y), & x, y \in [0, k], \\ \max(x, y), & \text{其他}, \end{cases} \tag{5}$$

$$F(x, y) = \begin{cases} eS_{F1}\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right), & x, y \in [0, e], \\ \max(x, y), & (x, y) \in [0, e] \times [e, k] \cup [e, k] \times [0, e], \\ e + (k - e) S_{F2}\left(\frac{x-e}{k-e}, \frac{y-e}{k-e}\right), & x, y \in [e, k], \\ k + (1 - k) T_F\left(\frac{x-k}{1-k}, \frac{y-k}{1-k}\right), & x, y \in [k, 1], \\ k, & \text{其他}, \end{cases} \tag{6}$$

其中 T_F 是半三角模,S_{F1}, S_{F2} 都是半三角余模.

证 根据引理 2 与定理 G,取 $x = f, y = 1, z = k$ 代入左分配方程中得

$f = F(f, 1) = F(f, G(1, k)) = G(F(f, 1), F(f, k)) = G(f, k) = k$,

故 $G(x, y)$ 的结构(5)式成立.

下证 $F(e, e) = e$. 假设 $F(e, e) > e$,根据 F 的连续性知,存在 $0 < t < e$ 使得 $e = F(e, 0) < F(e, t) < F(e, e)$,根据左分配方程知 $e = F(e, 0) = F(e, G(t, 0)) = G(F(e, t), F(e, 0)) = G(F(e, t), e) = \max(F(e, t), e) = F(e, t)$,与 $F(e, e) > F(e, t) > F(e, 0) = e$ 矛盾,故假设不成立,则 $F(e, e) = e$.

再证当 $x \leqslant k$ 时,$F(x, e) = \max(x, e)$. 当 $e \leqslant x \leqslant k$ 时,根据 F 的连续性与结合律知,存在 $e < z < k$ 使得 $F(z, e) = x, F(x, e) = F(F(z, e), e) = F(z, F(e, e)) = F(z, e) = x$. 当 $x < e$ 时,$e = F(0, e) \leqslant F(e, x) \leqslant F(e, e) = e$,故当 $x \leqslant k$ 时,$F(x, e) = \max(x, e)$. 同理可证得当 $x \leqslant k$ 时,$F(e, x) = \max(e, x)$. 故 $F(x, y)$ 的结构(6)式成立.

反过来,与前面类似,下面只讨论当 $y < z$ 时 F 在 G 上的左分配方程的情况,其他情况类似讨论,包括右分配也类似讨论.

(i) $k \leqslant z, k = F(0, k) \leqslant F(x, z), F(x, G(y, z)) = F(x, z) = \max(F(x, y), F(x, z)) = G(F(x, y), F(x, z))$;

(ii) $e \leqslant z \leqslant k, e \leqslant F(x, z) \leqslant k, F(x, G(y, z)) = F(x, z) = \max(F(x, y), F(x, z)) = G(F(x, y), F(x, z))$;

(iii) $y < z \leqslant e, x \geqslant k, F(x, G(y, z)) = F(x, y) = k = G(k, k) = G(F(x, y), F(x, z))$;

(iv) $y < z \leqslant e, e \leqslant x \leqslant k$,由(6)式知 $F(x, G(y, z)) = F(x, y) = x = F(x, z) = \max(F(x, y), F(x, z)) = G(F(x, y), F(x, z))$;

(v) $y < z \leqslant e, x \leqslant e, F(x, G(y, z)) = F(x, y) = \min(F(x, y), F(x, z)) = G(F(x, y), F(x, z))$.

故 F 在 G 上满足分配性方程.

定理 5 设 $G \in U_{k(e,f)}, G \in C_k, 0 \leqslant e < k < f \leqslant 1, F \in V_s$ 是带有连续基本算子 S_V 和 T_V 的半零模,则 F 在 2 一致模 G 上满足分配性当且仅当

$$F(x, y) = \begin{cases} \min(x, y), & (x, y) \in [k, f] \times [f, 1] \cup [f, 1] \times [k, f], \\ \max(x, y), & (x, y) \in [0, e] \times [e, k] \cup [e, k] \times [0, e], \\ eS_{F1}(x/e, y/e), & x, y \in [0, e], \\ e + (k - e) S_{F2}\left(\frac{x-e}{k-e}, \frac{y-e}{k-e}\right), & x, y \in [e, k], \\ k + (f - k) T_{F1}\left(\frac{x-k}{f-k}, \frac{y-k}{f-k}\right), & x, y \in (k, f], \\ f + (1 - f) T_{F2}\left(\frac{x-f}{1-f}, \frac{y-f}{1-f}\right), & x, y \in [f, 1], \\ k, & \text{其他}, \end{cases} \tag{7}$$

其中 T_{F1}, T_{F2} 是半三角模,S_{F1}, S_{F2} 是半三角余模.

证 假设 $F(e, e) > e$,根据 F 的连续性知,存在 $0 < t < e$ 使得 $e = F(e, 0) < F(e, t) < F(e, e)$,再根据左分配方程知 $e = F(e, 0) = F(e, G(0, t)) = G(F(e, 0), F(e, t)) = G(e, F(e, t)) = \max(F(e, t), e) = F(e, t)$,这与 $F(e, e) > F(e, t) > F(e, 0) = e$ 矛盾. 故假设不成立,则 $F(e, e) = e$.

再证明 $F(f, f) = f$. 假设 $F(f, f) < f$,根据 F 的连续

性知,存在 $f < t < 1$,使 $F(f,f) < F(f,t) < F(f,1) = f$,再根据左分配方程知 $f = F(f,1) = F(f,G(t,1)) = G(F(f,t),F(f,1)) = G(F(f,t),f) = \min(F(f,t),f) = F(f,t)$,这与 $F(f,f) < F(f,t) < F(f,1) = f$ 矛盾,故假设不成立,则 $F(f,f) = f$.

然后证当 $x \leqslant k$ 时,$F(x,e) = \max(x,e)$. 当 $e \leqslant x \leqslant k$ 时,根据 F 的连续性与结合律知,存在 $e < z < k$ 使得 $F(z,e) = x$,$F(x,e) = F(F(z,e),e) = F(z,F(e,e)) = F(z,e) = x$. 当 $x < e$ 时,$e = F(0,e) \leqslant F(x,e) \leqslant F(e,e) = e$. 故 $F(x,e) = \max(x,e)$. 同理可得当 $x \leqslant k$ 时,$F(e,x) = \max(e,x)$,当 $f \leqslant x$ 时,$f = F(f,f) \leqslant F(x,f) \leqslant F(1,f) = f$,故 $F(x,f) = \min(x,f)$. 当 $k \leqslant x \leqslant f$ 时,根据 F 的连续性及结合律,$\exists z$ 使得 $F(z,f) = x$,$F(x,f) = F(F(z,f),f) = F(z,F(f,f)) = F(z,f) = x$,故当 $x \geqslant k$ 时,$F(x,f) = \min(x,f)$. 同理可得 $x \geqslant k$,$F(f,x) = \min(f,x)$. 故 $F(x,y)$ 的结构(7) 式成立.

反过来,与前面类似,这里只讨论 $y < z$ 的左分配情况. 包括右分配等其他情况类似证明.

(i) $y < z \leqslant k$,$x \geqslant k$,$G(y,z) \leqslant k$,$F(x,G(y,z)) = k = G(k,k) = G(F(x,y),F(x,z))$;

(ii) $y < z \leqslant k$,$x < k$,这里分 4 种情况:

(a) $e \leqslant y \leqslant k$,$F(x,G(y,z)) = F(x,z) = \max(F(x,y),F(x,z)) = G(F(x,y),F(x,z))$;

(b) $y \leqslant e < z \leqslant k$,$F(x,G(y,z)) = F(x,z) = \max(F(x,y),F(x,z)) = G(F(x,y),F(x,z))$;

(c) $y < z \leqslant e$,$x < e$,$F(x,G(y,z)) = F(x,y) = G(F(x,y),F(x,z))$;

(d) $y < z \leqslant e$,$e \leqslant x \leqslant k$,$F(x,G(y,z)) = F(x,y) = x = F(x,z) = G(F(x,y),F(x,z))$;

(iii) $k \leqslant y < z$,$x \leqslant k$,$F(x,G(y,z)) = k = G(k,k) = G(F(x,y),F(x,z))$;

(iv) $k \leqslant y < z$,$k \leqslant x$,这里分 3 种情况:

(a) $k \leqslant y \leqslant f$,$F(x,G(y,z)) = F(x,y) = \min(F(x,y),F(x,z)) = G(F(x,y),F(x,z))$;

(b) $k \leqslant x < f$,$f < y$,$F(x,G(y,z)) = F(x,z) = x = F(x,y) = G(F(x,y),F(x,z))$;

(c) $f < y$,$f \leqslant x$,$F(x,G(y,z)) = F(x,z) = \max(F(x,y),F(x,z)) = G(F(x,y),F(x,z))$;

(v) $y \leqslant k < z$,$x \geqslant k$,$F(x,G(y,z)) = F(x,k) = k = \min(k,F(x,z)) = G(F(x,y),F(x,z))$;

(vi) $y \leqslant k < z$,$x \leqslant k$,$F(x,G(y,z)) = F(x,k) = k = \max(F(x,y),k) = G(F(x,y),F(x,z))$.

故 F 在 G 满足上分配性方程.

3　结束语

一致模是特殊的聚合函数,在许多领域中有着广泛应用,如模糊逻辑、专家系统、神经网络、效用理论和模糊系统建模等[13-18]. 本文讨论了连续半零模 $F \in V_k$ 在 2 一致模 $G \in U_{k(e,f)}$ 的分配性,并且给出了相应结果,这些结果也是连续零模 F_k 在 2 一致模 $G \in U_{k(e,f)}$ 上分配性的推广. 在未来的工作中,将关注当 $s \neq k$ 时,半零模 $F \in V_s$ 与 2 一致模 $G \in U_{k(e,f)}$ 之间的分配性及 2 一致模与其他 2 元函数之间的分配性.

4　参考文献

[1] Calvo T, De Baets B. On the generalization of the absorption equation [J]. Fuzzy Math, 2000, 8(1): 141-149.

[2] Calvo T, De Baets B, Fodor J C. The functional equations of Frank and Alsina for uninorms and nullnorms [J]. Fuzzy Sets Syst, 2001, 120(3): 385-394.

[3] Drewniak J, Drygas P, Rak E. Distributivity equations for uninorms and nullnorms [J]. Fuzzy Sets Syst, 2008, 159(13): 1646-1657.

[4] Drygas P, Rak E. Distributivity equation in the class of 2-uninorms [J]. Fuzzy Sets Syst, 2016, 291(1): 82-97.

[5] Akella P. Structure of n-uninorms [J]. Fuzzy Sets Syst, 2007, 158(15): 1631-1651.

[6] Yager R R, Rybalow A. Uninorm aggreation operators [J]. Fuzzy Sets Syst, 1996, 80(1): 111-120.

[7] Fodor J C, Yager R R, Rybalov A. Structure of uninorms [J]. Int J Uncertain, Fuzziness Knowl-Based Syst, 1997, 5(4): 411-427.

[8] Sander W. Associative aggregation operators [C] // Calvo T, Mayor G, Mesiar R. Aggreation operators. Heidelberg: Physica-Verlag, 2002: 124-158.

[9] Aczel J. Lectures on functional equations and their applications [M]. New York: Acad Press, 1966.

[10] Rak E. Distributivity equation for nullnorms [J]. J Electr Eng, 2005, 56(12): 53-55.

[11] Klement E P, Mesiar R, Pap E. Triangular norms [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

[12] Drygas P. Distributivity between semit-operators and semi-nullnorms [J]. Fuzzy Sets Syst, 2015, 264(1): 100-109.

[13] Gabbay D, Metcalfe G. Fuzzy logics based on [0,1)-continuous uninorms [J]. Arch Math Log, 2007, 46(5): 425-449.

[14] Dubois D, Prade H. Fundamentals of fuzzy sets [M]. Boston: Kluwer Acad Publ, 2000.

(下转第 275 页)

[14] 陈宗煊. 二阶亚纯系数微分方程亚纯解的零点[J]. 数学物理学报，1996，16(3)：276-283.

[15] 仪洪勋，杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京：科学出版社，1995.

On the Growth of Meromorphic Solutions of Higher Order Linear Differential Equations

ZENG Juanjuan，LIU Huifang*

(College of Mathematics and Informatics，Jiangxi Normal University，Nanchang Jiangxi 330022，China)

Abstract: The growth of solutions of higher order linear differential equations $f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_0(z)f=0$ is investigated by using the value distributions theory of meromorphic functions，where $A_j(z)$ $(0\leqslant j\leqslant k-1)$ are meromorphic functions. It is shown that every nonzero meromorphic solution of such equations has infinite order，provided that $A_0(z)$ has a deficient value ∞ and $A_j(z)$ $(1\leqslant j\leqslant k-1)$ satisfying certain conditions. The lower bound of hyper order of meromorphic solutions of such equations is also estimated.

Key words: differential equation; meromorphic functions; deficient value; order; hyper order

(责任编辑：王金莲)

(上接第 267 页)

[15] Mas M，Mayor G，Torrens J. The distributivity condition for uninorms and t-operators[J]. Fuzzy Sets Syst，2002，126(2)：207-218.

[16] Czogala E，Drewniak J. Associative monotonic operations in fuzzy set theory[J]. Fuzzy Sets Syst，1984，12(3)：249-269.

[17] Calvo T. On some solutions of the distributivity equation[J]. Fuzzy Sets Syst，1999，104(1)：85-96.

[18] Drygas P. Discussion of the structure of uninorms[J]. Kybernetika，2005，41(2)：213-226.

The Distributivity for Semi-Nullnorms over 2-Uninorms

MIN Youmei，QIN Feng*

(College of Mathematics and Informatics，Jiangxi Normal University，Nanchang Jiangxi 330022，China)

Abstract: Considering a 2-uninorm covering both a uninorm and a nullnorm and a semi-uninorm being generalization of uninorms by omitting commutativity and as sociativity. For special cases，distributivity for semi-nullnorms over 2-uninorms is investigated and the sufficient and necessary conditions of this equation are given out when the semi-nullnorm has the continuously underlying operator.

Key words: distributivity equations; 2-uninorms; semi-nullnorms; semi-t-norms; semi-t-conorms

(责任编辑：曾剑锋)