第 40 卷 第 4 期
2016 年 7 月

江西师范大学学报(自然科学版)
Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)

Vol. 40 No. 4
Jul. 2016

文章编号:1000-5862(2016)04-0349-05

# 一类非线性项含有导数的 3 阶边值问题的正解

李凤艳[1],石金传[2]

(1. 辽宁行政学院商务贸易系,辽宁 沈阳 110161;2. 沈阳化工大学科亚学院,辽宁 沈阳 110167)

摘要:应用不动点指数的计算结果,证明了一类非线性项依赖于未知函数导数的 3 阶边值问题正解的存在性. 这类边值问题具有与已有文献中所讨论问题不同的阶数、边值条件和奇异性,最后给出 1 个例子作为对所获得结果的应用.

关键词:非线性项含有导数;3 阶边值;正解

中图分类号:O 177.91　　文献标志码:A　　DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2016.04.04

## 0 引言

非线性项含有未知函数导数的常微分方程边值正解问题的研究可以参见文献[1-9]. 已有文献采用的方法有上下解方法、不动点指数方法和叠合度方法,尤其是文献[1-6,10-11]研究了有关 3 阶方程问题,其它一些关于非线性微分方程正解问题的研究参见文献[12-13]. 本文讨论 3 阶边值方程

$$\begin{cases} x'''(t)+\varphi(t)f(t,x(t),x'(t))=0, t\in(0,1), \\ x(0)=x'(0)=0, \\ \alpha x'(1)+\beta x''(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性,其中 $\alpha\geqslant 0$,$\beta>0$,且允许 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 和 $t=1$ 处奇异.

方程(1)在文献[7]的基础上进行研究,但是方程的阶数和边值条件与文献[7]不同. 方程的形式与文献[6]一样,但是方程所允许的奇异性却不同. 本文应用不动点指数计算给出了 3 阶边值问题(1)正解的存在性结果.

令 $q(t)=\beta t^2/[2(\alpha+\beta)]$,$t\in[0,1]$ 和 $C_q^1[0,1]=\{x:[0,1]\to\boldsymbol{R}\mid x$ 在 $[0,1]$ 上连续,$x'$ 在 $(0,1)$ 上连续,且 $\sup\limits_{t\in(0,1)}q(t)|x'(t)|<+\infty\}$. 对于 $x\in C_q^1[0,1]$,定义 $C_q^1[0,1]$ 中的范数

$$\|x\|=\max\{\|x\|_1,\|x\|_2\},$$

其中 $\|x\|_1=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$,$\|x\|_2=\sup\limits_{t\in(0,1)}q(t)|x'(t)|$.

**引理 1** $C_q^1[0,1]$ 为 Banach 空间,且 $\forall x\in C_q^1[0,1]$,$|x'(t)|\leqslant\|x\|/q(t)$,$t\in(0,1)$.

边值问题(1)的格林函数[10]为

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\alpha t^2(1-s)}{2(\alpha+\beta)}+\dfrac{\beta t^2}{2(\alpha+\beta)}, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1, \\ \dfrac{\alpha t^2(1-s)}{2(\alpha+\beta)}+\dfrac{\beta t^2}{2(\alpha+\beta)}-\dfrac{(t-s)^2}{2}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

**引理 2** $G(t,s)\geqslant q(t)G(1,s)$,$0\leqslant t,s\leqslant 1$,$q(t)=\beta t^2/[2(\alpha+\beta)]$.

定义 $P=\{x\in C_q^1[0,1]:q(t)\|x\|_1\leqslant x(t),\|x\|_2\leqslant x(1),t\in[0,1]\}$. 易见 $P$ 为 $C_q^1[0,1]$ 中的锥.

**引理 3** 若 $x\in P$,则 $\|x\|=\|x\|_1$.

**引理 4** 设 $\varphi\in C((0,1),\boldsymbol{R}^+)$ 且 $\int_0^1\varphi(s)\mathrm{d}s<+\infty$,$F(t)=\int_0^1 G(t,s)\varphi(s)\mathrm{d}s$,则 $F\in P$.

引理 1 ~ 引理 4 可类似于文献[7]相应结论进行证明. 有关锥和不动点指数的概念和性质可以参见文献[14-15].

**引理 5**[15] 设 $\Omega$ 为 Banach 空间 $E$ 中的有界开集,$P$ 是 $E$ 中的锥,$E$ 中的零元素 $\theta\in\Omega$,$A:\overline{\Omega}\cap P\to P$ 是全连续算子. 若 $\lambda Ax\neq x$,$x\in\partial\Omega\cap P$,$\lambda\in[0,1]$,则不动点指数 $i(A,\Omega\cap P,P)=1$.

**引理 6** 设 $\Omega$ 为 Banach 空间 $E$ 中的有界开集,$P$ 是 $E$ 中的一个锥,$A:\overline{\Omega}\cap P\to P$ 是全连续算子. 若 $Ax\not\leqslant x$,$x\in\partial\Omega\cap P$,其中 $\not\leqslant$ 表示不小于等于,半序由锥导出,则不动点指数 $i(A,\Omega\cap P,P)=0$.

收稿日期:2016-01-15

基金项目:国家自然科学基金(61473065)资助项目.

作者简介:李凤艳(1964-),女,辽宁沈阳人,副教授,主要从事非线性泛函分析及管理数学教学研究.

## 1 主要结论

给出如下一些假设:

$(\mathrm{H}_1)$ $\varphi \in C(0,1) \cap L^1[0,1]$,且$\varphi(t) > 0$,$t \in (0,1)$,$f \in C([0,1] \times [0,+\infty) \times (-\infty,+\infty),[0,+\infty))$;

$(\mathrm{H}_2)$ $\exists g \in C([0,+\infty) \times [0,+\infty),[0,+\infty))$,使得$f(t,x,y) \leqslant g(x,|q(t)y|)$对所有的$(t,x,y) \in [0,1] \times [0,+\infty) \times (-\infty,+\infty)$都成立;

$(\mathrm{H}_3)$ $\sup\limits_{c \in (0,+\infty)} c / \left[\left(\int_0^1 \varphi(s)\,\mathrm{d}s\right) \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant c, 0 \leqslant z \leqslant c} g(x,z)\right] > 1$;

$(\mathrm{H}_4)$ $\exists g_1 \in C([0,+\infty) \times (-\infty,+\infty),[0,+\infty))$使得$f(t,x,y) \geqslant g_1(x,y)$对所有的$(t,x,y) \in [0,1] \times [0,+\infty) \times (-\infty,+\infty)$都成立,并且$\lim\limits_{x \to +\infty} g_1(x,y)/x = +\infty$关于$y$一致成立;

$(\mathrm{H}_5)$ $\exists g_2 \in C([0,+\infty) \times (-\infty,+\infty),[0,+\infty))$使得$f(t,x,y) \geqslant g_2(x,y)$对所有的$(t,x,y) \in [0,1] \times [0,+\infty) \times (-\infty,+\infty)$都成立,并且$\lim\limits_{x \to 0^+} g_2(x,y)/x = +\infty$关于$y$一致成立.

对于$x \in P$,定义算子$A$为$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\,\mathrm{d}s$,$t \in [0,1]$.

**命题1** 若$(\mathrm{H}_1)$和$(\mathrm{H}_2)$成立,则$A:P \to P$为全连续算子.

**证** 因为

$$|(Ax)(t)| = \left|\int_0^1 G(t,s)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\,\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_0^1 G(t,s)\varphi(s)g(x(s),|q(s)x'(s)|)\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^1 \varphi(s)\,\mathrm{d}s \max_{0 \leqslant c \leqslant \|x\|, 0 \leqslant c' \leqslant \|x\|} g(c,c') < +\infty,$$

$$|q(t)(Ax)'(t)| = q(t)\left|\int_0^1\left(\frac{\alpha t(1-s)}{\alpha+\beta} + \frac{\beta t}{\alpha+\beta}\right)\varphi(s) \cdot f(s,x(s),x'(s))\,\mathrm{d}s - \int_0^t (t-s)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\,\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_0^1\left(\frac{\alpha t(1-s)}{\alpha+\beta} + \frac{\beta t}{\alpha+\beta}\right)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^1 \varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\,\mathrm{d}s \leqslant$$

$$2\int_0^1 \varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\,\mathrm{d}s \leqslant 2\int_0^1 \varphi(s)\,\mathrm{d}s \max_{0 \leqslant c \leqslant \|x\|, 0 \leqslant c' \leqslant \|x\|} g(c,c') < +\infty,$$

并且$(Ax)(t) \geqslant 0$对$t \in [0,1]$都成立,所以类似于引理4,有$A(P) \subset P$.

当$t \to 0^+$时,

$$|(Ax)'(t) - (Ax)'(0)| = \left|\int_0^1\left(\frac{\alpha t(1-s)}{\alpha+\beta} + \frac{\beta t}{\alpha+\beta}\right)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\,\mathrm{d}s - \int_0^t (t-s)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\,\mathrm{d}s\right| \leqslant$$

$$t\int_0^1\left(\frac{\alpha(1-s)}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t (t-s)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\,\mathrm{d}s \leqslant$$

$$t\left(\max_{0 \leqslant c \leqslant \|x\|, 0 \leqslant c' \leqslant \|x\|} g(c,c')\right)\int_0^1\left(\frac{\alpha(1-s)}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\varphi(s)\,\mathrm{d}s + \max_{0 \leqslant c \leqslant \|x\|, 0 \leqslant c' \leqslant \|x\|} g(c,c')\int_0^t (t-s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s \to 0.$$

当$t \to 1^-$时,

$$|(Ax)'(t) - (Ax)'(1)| = \left|\int_0^1\left(\frac{\alpha t(1-s)}{\alpha+\beta} + \frac{\beta t}{\alpha+\beta}\right)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\,\mathrm{d}s - \int_0^t (t-s)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\,\mathrm{d}s - \int_0^1\left(\frac{\alpha(1-s)}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} - 1 + s\right)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\,\mathrm{d}s\right| =$$

$$\left|\int_0^1\left(\frac{\alpha t(1-s)}{\alpha+\beta} + \frac{\beta t}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha(1-s)}{\alpha+\beta} - \frac{\beta}{\alpha+\beta} + 1 - s\right) \cdot \varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\,\mathrm{d}s - \int_0^t (t-s)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\,\mathrm{d}s\right| =$$

$$\left|\int_0^1\left(t - s + \frac{\alpha s(1-t)}{\alpha+\beta}\right)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\,\mathrm{d}s - \int_0^t (t-s)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\,\mathrm{d}s\right| =$$

$$\left|\int_0^t\left(t - s + \frac{\alpha s(1-t)}{\alpha+\beta}\right)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\,\mathrm{d}s - \int_0^t (t-s)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\,\mathrm{d}s + \int_t^1\left(t - s + \frac{\alpha s(1-t)}{\alpha+\beta}\right)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\,\mathrm{d}s\right| \leqslant$$

$$(1-t)\int_0^1 \frac{\alpha s}{\alpha+\beta}\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\,\mathrm{d}s + \int_t^1\left|t - s + \frac{\alpha s(1-t)}{\alpha+\beta}\right|\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\,\mathrm{d}s \to 0.$$

因此$Ax \in C^1[0,1]$.

假设$\{x_n\} \subseteq P$,$x_0 \in P$,$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$,则$\exists M > 0$,使得$\|x_n\| < M$对所有的$n \in \{1,2,3,\cdots\}$成立.并且有$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n(t) = x_0(t)\ (t \in [0,1])$,$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n'(t) = x_0'(t)\ (t \in (0,1))$,$|f(t,x_n(t),x_n'(t))| \leqslant g(x_n(t),|q(t)x_n'(t)|) \leqslant \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant M, 0 \leqslant y \leqslant M} g(x,y)$.

当 $n\to+\infty$ 时，由控制收敛定理得

$\|Ax_n-Ax_0\|_1=\max\limits_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1 G(t,s)\varphi(s)(f(s,x_n(s),x_n'(s))-f(s,x_0(s),x_0'(s)))\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_0^1\varphi(s)\left|f(s,x_n(s),x_n'(s))-f(s,x_0(s),x_0'(s))\right|\mathrm{d}s\to 0$，$\|Ax_n-Ax_0\|_2=\sup\limits_{t\in(0,1)}q(t)\cdot\left|\int_0^t\left(\frac{\alpha t(1-s)+\beta t}{\alpha+\beta}-(t-s)\right)\varphi(s)(f(s,x_m,x_n')-f(s,x_0,x_0'))\mathrm{d}s+\int_t^1\left(\frac{\alpha t(1-s)+\beta t}{\alpha+\beta}\right)\varphi(s)(f(s,x_n,x_n')-f(s,x_0,x_0'))\mathrm{d}s\right|\leqslant\sup\limits_{t\in(0,1)}q(t)\left[\int_0^t\left(s-\frac{\alpha ts}{\alpha+\beta}\right)\varphi(s)\cdot|f(s,x_n,x_n')-f(s,x_0,x_0')|\mathrm{d}s+\int_t^1\left(t-\frac{\alpha ts}{\alpha+\beta}\right)\varphi(s)\cdot|f(s,x_n,x_n')-f(s,x_0,x_0')|\mathrm{d}s\right]\to 0$，

即 $A:P\to P$ 连续.

$D$ 为任一有界集，$\exists M>0$，使得当 $x\in D$ 时，$\|x\|\leqslant M$，

$$\|Ax\|_1=\max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1 G(t,s)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_0^1\varphi(s)\mathrm{d}s\max_{0\leqslant x\leqslant M,0\leqslant y\leqslant M}g(x,y),$$

$$\|Ax\|_2\leqslant 2\int_0^1\varphi(s)\mathrm{d}s\max_{0\leqslant x\leqslant M,0\leqslant y\leqslant M}g(x,y),$$

则 $A(D)$ 为 $C_q^1[0,1]$ 和 $C^1[0,1]$ 中的有界集.

$\forall t_1,t_2\in[0,1]$，$t_1<t_2$，$x\in D$，有

$$|(Ax)(t_1)-(Ax)(t_2)|\leqslant\left(\int_0^1|G(t_1,s)-G(t_2,s)|\varphi(s)\mathrm{d}s\right)\max_{0\leqslant x\leqslant M,0\leqslant y\leqslant M}g(x,y),$$

$|(Ax)'(t_1)-(Ax)'(t_2)|=$
$\left|\int_0^1\left(\frac{\alpha t_1(1-s)}{\alpha+\beta}+\frac{\beta t_1}{\alpha+\beta}\right)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s-\int_0^{t_1}(t_1-s)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s-\int_0^1\left(\frac{\alpha t_2(1-s)}{\alpha+\beta}+\frac{\beta t_2}{\alpha+\beta}\right)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s+\int_0^{t_2}(t_2-s)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s\right|=$
$\left|\int_0^1(t_1-t_2)\left(1-\frac{\alpha s}{\alpha+\beta}\right)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s+\int_0^{t_1}(t_2-s)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s-\int_0^{t_1}(t_1-s)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s\right|=$
$\left|\int_0^1(t_1-t_2)\left(1-\frac{\alpha s}{\alpha+\beta}\right)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s+\int_0^{t_1}(t_2-t_1)\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)\cdot\varphi(s)f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant\left(2(t_2-t_1)\int_0^1\varphi(s)\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t_2}\varphi(s)\mathrm{d}s\right)\max\limits_{0\leqslant x\leqslant M,0\leqslant y\leqslant M}g(x,y)$，

因此，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $|t_2-t_1|<\delta$ 时，$|(Ax)(t_1)-(Ax)(t_2)|<\varepsilon$，$|(Ax)'(t_1)-(Ax)'(t_2)|<\varepsilon$. 这说明 $\{(Ax)(t):x\in D\}$ 与 $\{(Ax)'(t):x\in D\}$ 为等度连续.

通过 Arzela-Ascoli 定理，$A(D)$ 为 $C^1[0,1]$ 中致密集，并且

$$\|Ax\|\leqslant\|Ax\|_0=\max\left\{\max_{t\in[0,1]}|(Ax)(t)|,\max_{t\in[0,1]}|(Ax)'(t)|\right\},$$

从而得到 $A:P\to P$ 全连续.

**定理 1**　若假设($H_1$) ~ ($H_4$) 成立，则边值问题(1) 至少存在 2 个正解.

**证**　由假设($H_3$) 知，选择 $R_1>0$，使得

$$R_1/\left(\int_0^1\varphi(s)\mathrm{d}s\max_{0\leqslant x\leqslant R_1,0\leqslant y\leqslant R_1}g(x,y)\right)>1.\tag{2}$$

对于 $C_q^1[0,1]$ 中的有界开集 $\Omega_1=\{x\in C_q^1[0,1]:\|x\|<R_1\}$，有 $\mu Ax\neq x$，$\mu\in(0,1]$，$x\in P\cap\partial\Omega_1$. 否则，$\exists\mu_0\in(0,1]$，$x_0\in P\cap\partial\Omega_1$，使得

$\mu_0Ax_0=x_0$，$x_0(t)\leqslant(Ax_0)(t)=\int_0^1 G(t,s)\varphi(s)f(s,x_0(s),x_0'(s))\mathrm{d}s\leqslant\int_0^1 G(t,s)\varphi(s)\mathrm{d}s\max\limits_{0\leqslant x\leqslant R_1,0\leqslant y\leqslant R_1}g(x,y)\leqslant\int_0^1\varphi(s)\mathrm{d}s\max\limits_{0\leqslant x\leqslant R_1,0\leqslant y\leqslant R_1}g(x,y)$，$|q(t)x_0'(t)|=u_0|q(t)\cdot(Ax_0)'(t)|\leqslant\int_0^1\varphi(s)\mathrm{d}s\max\limits_{0\leqslant x\leqslant R_1,0\leqslant y\leqslant R_1}g(x,y)$，

因此 $R_1=\max\{\|x_0\|_1,\|x_0\|_2\}\leqslant\int_0^1\varphi(s)\mathrm{d}s\cdot\max\limits_{0\leqslant x\leqslant R_1,0\leqslant y\leqslant R_1}g(x,y)$，从而

$$R_1/\left(\int_0^1\varphi(s)\mathrm{d}s\max_{0\leqslant x\leqslant R_1,0\leqslant y\leqslant R_1}g(x,y)\right)\leqslant 1,$$

与(2) 式矛盾.

由引理 5 知，不动点指数

$$i(A,\Omega_1\cap P,P)=1.\tag{3}$$

取 $0<a^*<b^*<1$，令

$$N^*=\left(\frac{\beta a^{*2}}{2(\alpha+\beta)}\min_{t\in[a^*,b^*]}\int_{a^*}^{b^*}G(t,s)\varphi(s)\mathrm{d}s\right)^{-1}+1,$$

由假设($H_4$) 知，$\exists R_2'>R_1$，使得 $g_1(x,y)\geqslant N^*x$，

$\forall x \geqslant R_2',y \in (-\infty,+\infty)$. 记 $R_2 = 2(\alpha+\beta)R_2'/(\beta a^{*2})$. 显然 $R_2 > R_1$,对于 $C_q^1[0,1]$ 中的有界开集 $\Omega_2 = \{x \in C_q^1[0,1]: \|x\| < R_2\}$,则 $Ax \nleq x$, $x \in P \cap \partial\Omega_2$. 否则,假设 $\exists x_0 \in P \cap \partial\Omega_2, x_0 \geqslant Ax_0$. $\forall t \in [a^*,b^*]$,有

$$x_0(t) \geqslant q(t)\|x_0\|_1 \geqslant \beta a^{*2}\|x_0\|/[2(\alpha+\beta)] = \frac{\beta a^{*2}}{2(\alpha+\beta)}\frac{2(\alpha+\beta)}{\beta a^{*2}}R_2' = R_2',$$

$$x_0(t) \geqslant (Ax_0)(t) = \int_0^1 G(t,s)\varphi(s)f(s,x_0(s),x_0'(s))\,\mathrm{d}s \geqslant \int_{a^*}^{b^*} G(t,s)\varphi(s)g_1(x_0(s),x_0'(s))\,\mathrm{d}s \geqslant$$

$$\int_{a^*}^{b^*} G(t,s)\varphi(s)N^* x_0(s)\,\mathrm{d}s \geqslant N^* R_2'\int_{a^*}^{b^*} G(t,s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s \geqslant N^* R_2' \min_{t\in[a^*,b^*]}\int_{a^*}^{b^*} G(t,s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s =$$

$$N^* R_2'\frac{\beta a^{*2}}{2(\alpha+\beta)}\left(\min_{t\in[a^*,b^*]}\int_{a^*}^{b^*} G(t,s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s\right)\cdot\frac{2(\alpha+\beta)}{\beta a^{*2}} > \frac{2(\alpha+\beta)}{\beta a^{*2}}R_2',$$

所以 $\|x_0\| \geqslant \|x_0\|_1 > 2(\alpha+\beta)R_2'/(\beta a^{*2}) = R_2$. 与 $\|x_0\| < R_2$ 矛盾.

由引理 6 知,不动点指数

$$i(A,\Omega_2 \cap P,P) = 0. \tag{4}$$

易见边值问题(1) 存在正解当且仅当全连续算子 $A: P \to P$ 存在不动点. 由(3) 式知 $A$ 在 $\Omega_1 \cap P$ 中存在不动点,又根据不动点指数的可加性得

$$i(A,(\Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1) \cap P,P) = i(A,\Omega_2 \cap P,P) - i(A,\Omega_1 \cap P,P) = -1 \neq 0, \tag{5}$$

于是 $A$ 在$(\Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1) \cap P$ 中存在不动点. 故边值问题(1) 至少存在 2 个正解.

**定理 2** 若假设$(\mathrm{H}_1) \sim (\mathrm{H}_5)$ 成立,则边值问题(1) 至少存在 2 个正解.

**证** 由定理 1 的证明过程知,存在 $0 < R_1 < R_2$,对于 $C_q^1[0,1]$ 中的有界开集

$$\Omega_1 = \{x \in C_q^1[0,1]: \|x\| < R_1\},$$
$$\Omega_2 = \{x \in C_q^1[0,1]: \|x\| < R_2\},$$

不动点指数(3) 式和(4) 式成立,从而(5) 式也成立,于是 $A$ 在$(\Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1) \cap P$ 中存在不动点.

取 $0 < a^{**} < b^{**} < 1$,令 $N^{**} = \left(\frac{\beta a^{**2}}{2(\alpha+\beta)}\min_{t\in[a^{**},b^{**}]}\int_{a^{**}}^{b^{**}} G(t,s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s\right)^{-1}+1$,由假设条件$(\mathrm{H}_5)$ 知,$\exists R_3 < R_1$,使得 $g_2(x,y) \geqslant N^{**}x, \forall x \leqslant R_3, y \in (-\infty,+\infty)$. 对于 $C_q^1[0,1]$ 中的有界开集 $\Omega_3 = \{x \in C_q^1[0,1]: \|x\| < R_3\}$,则

$$Ax \nleq x, x \in P \cap \partial\Omega_3.$$

否则,假设 $\exists x_0 \in P \cap \partial\Omega_3, x_0 \geqslant Ax_0$. $\forall t \in [a^{**},b^{**}]$,有

$$x_0(t) \geqslant q(t)\|x_0\|_1 \geqslant \beta a^{**2}\|x_0\|/[2(\alpha+\beta)] = \beta a^{**2}R_3/[2(\alpha+\beta)],$$

$$x_0(t) \geqslant (Ax_0)(t) = \int_0^1 G(t,s)\varphi(s)f(s,x_0(s),x_0'(s))\,\mathrm{d}s \geqslant \int_{a^{**}}^{b^{**}} G(t,s)\varphi(s)g_2(x_0(s),x_0'(s))\,\mathrm{d}s \geqslant$$

$$\int_{a^{**}}^{b^{**}} G(t,s)\varphi(s)N^{**}x_0(s)\,\mathrm{d}s \geqslant$$

$$N^{**}\frac{\beta a^{**2}}{2(\alpha+\beta)}R_3\int_{a^{**}}^{b^{**}} G(t,s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s \geqslant$$

$$N^{**}\frac{\beta a^{**2}}{2(\alpha+\beta)}R_3\min_{t\in[a^*,b^*]}\int_{a^{**}}^{b^{**}} G(t,s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s > R_3,$$

所以 $\|x_0\| \geqslant \|x_0\|_1 > R_3$,矛盾.

由引理 6 知,不动点指数

$$i(A,\Omega_3 \cap P,P) = 0. \tag{6}$$

由(3) 式,(6) 式以及不动点指数的可加性得

$$i(A,(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega}_3) \cap P,P) = i(A,\Omega_1 \cap P,P) - i(A,\Omega_3 \cap P,P) = 1 \neq 0,$$

于是 $A$ 在$(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega}_3) \cap P$ 中存在不动点. 因此边值问题(1) 至少存在 2 个正解.

## 2 算例的应用

考虑边值问题

$$\begin{cases} x''' + \dfrac{\mu}{\sqrt{t(1-t)}}\left(1+\left|\dfrac{1}{4}t^2x'\right|^a\right)\cdot \\ (1+x^b) = 0, t \in (0,1), \\ x(0) = x'(0) = 0, \\ \alpha x'(1) + \beta x''(1) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

其中 $\beta > \alpha \geqslant 0, a > 0, b > 1, \mu > 0$. 若

$$\mu < \sup_{c\in(0,+\infty)} c/[\pi(1+c^a)(1+c^b)], \tag{8}$$

则边值问题(7) 存在 2 个正解.

**证** 由(7) 式知,$\varphi(t) = \mu/\sqrt{t(1-t)}$,$f(t,x,y) = (1+|t^2y/4|^a)(1+x^b)$,于是$(\mathrm{H}_1)$ 成立. 令 $g(x,z) = (1+|z|^a)(1+x^b)$,显然有 $f(t,x,y) \leqslant g(x,|q(t)y|)$,因此$(\mathrm{H}_2)$ 成立.

因为

$$\sup_{c\in(0,+\infty)} c/\left(\int_0^1\varphi(s)\,\mathrm{d}s\max_{0\leqslant x\leqslant c,0\leqslant y\leqslant c} g(x,y)\right)=$$
$$\sup_{c\in(0,+\infty)} c/\left[\mu\pi\max_{0\leqslant x\leqslant c,0\leqslant y\leqslant c}(1+|y|^a)(1+x^b)\right]=$$
$$\sup_{c\in(0,+\infty)} c/\left[\mu\pi(1+c^a)(1+c^b)\right],$$

所以由(8)式可得

$$\sup_{c\in(0,+\infty)} c/\left(\int_0^1\varphi(s)\,\mathrm{d}s\max_{0\leqslant x\leqslant c,0\leqslant y\leqslant c} g(x,y)\right)>1,$$

即($H_3$)成立.

令 $g_1(x,y)=g_2(x,y)=1+x^b$，从而 $f(t,x,y)\geqslant g_1(x,y)=g_2(x,y)$，并且

$$\lim_{x\to+\infty} g_1(x,y)/x=\lim_{x\to+\infty}(1+x^b)/x=+\infty,$$
$$\lim_{x\to 0^+} g_2(x,y)/x=\lim_{x\to 0^+}(1+x^b)/x=+\infty$$

关于 $y\in(-\infty,+\infty)$ 一致成立，从而($H_4$)和($H_5$)也成立.

由定理 2 得边值问题(7)存在 2 个非平凡的正解.

**注 1**　方程(7)不存在平凡解，所以由定理 1 可知存在 2 个非平凡的正解.

## 3　小结

根据方程中非线性项的不同情况，非线性边值问题的解通常不是唯一的，存在多个正解. 本文给出了 3 阶边值问题(1)多个正解存在性的充分条件. 定理 1 说明当($H_1$)～($H_4$)成立时，边值问题(1)在锥中 2 个不同的位置分别存在正解，这里正解的不同位置表明它们具有不同的性质. 一个解 $x_1$ 在 $\Omega_1\cap P$ 中意味着 $\max_{t\in[0,1]}|x_1(t)|\leqslant R_1$ 和 $\sup_{t\in(0,1)} q(t)\cdot|x_1'(t)|\leqslant R_1$，但它也可能是平凡解，即零解；另一个解 $x_2$ 在 $(\Omega_2\setminus\overline{\Omega}_1)\cap P$ 中意味着 $R_1\leqslant\max_{t\in[0,1]}|x_2(t)|\leqslant R_2$，$R_1\leqslant\sup_{t\in(0,1)} q(t)|x_2'(t)|\leqslant R_2$，它一定是非平凡解.

定理 2 说明了当假设($H_1$)～($H_5$)成立时，边值问题(1)在锥中 2 个不同的位置分别存在正解. 一个解 $x_1$ 在 $(\Omega_1\setminus\overline{\Omega}_3)\cap P$ 中意味着 $R_3\leqslant\max_{t\in[0,1]}|x_1(t)|\leqslant R_1$ 和 $R_3\leqslant\sup_{t\in(0,1)} q(t)|x_1'(t)|\leqslant R_1$；另一个解 $x_2$ 在 $(\Omega_2\setminus\overline{\Omega}_1)\cap P$ 中性质与前面相同，值得指出的是它们都是非平凡解.

## 4　参考文献


[1] Cheng Ming. Nagumo theorems of third-order singular nonlinear boundary value problems [J]. Boundary Value Problems, 2015(1): 1-11.

[2] Kelevedjiev P, Popivanov N, Bekesheva L. Existence of solutions for a class of third-order nonlinear boundary value problem [C] // AIP Conference Proceedings, doi: 10.1063/1.4936723.

[3] Wei Zhongli. Some necessary and sufficient conditions for existence of positive solutions for third order singular super-linear multi-point boundary value problems [J]. J Appl Math Comput, 2014, 46(1): 407-422.

[4] Wei Zhongli. Some necessary and sufficient conditions for existence of positive solutions for third order singular sublinear multi-point boundary value problems [J]. Acta Math Sci, 2014, 34(6): 1795-1810.

[5] Zhang Haie, Sun Jianping. Existence and iteration of monotone positive solutions for third-order nonlocal BVPs involving integral conditions [J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2012, 41(18): 1-9.

[6] 李凤艳，石金传. 一类非线性项带导数的奇异 3 阶边值问题的多重正解 [J]. 辽宁大学学报：自然科学版，2015, 42(1): 24-32.

[7] Agarwal Ravi P, O'Regan Donal, Yan Baoqiang. Multiple positive solutions of singular Dirichlet second-order boundary-value problems with derivative dependence [J]. Journal of Dynamical and Control Systems, 2009, 15(1): 1-26.

[8] Li Yongxiang, Shang Yaya. An existence result of positive solutions for fully second-order boundary value problems [J]. Journal of Function Spaces, doi: 10.1155/2015/287253.

[9] Zhang Guowei. Positive solutions of two-point boundary value problems for second-order differential equations with the nonlinearity dependent on the derivative [J]. Nonlinear Anal, 2008, 69(1): 222-229.

[10] Moustafa El-Shahed. Positive solutions for nonlinear singular third order boundary value problem [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, 14(2): 424-429.

[11] 刘忻柏，李玉花. 一类 3 阶半正边值问题的正解 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2010, 34(3): 277-279.

[12] 葛渭高. 非线性常微分方程边值问题 [M]. 北京：科学出版社，2007.

[13] 马如云. 非线性常微分方程非局部问题 [M]. 北京：科学出版社，2004.

[14] Deimling K. Nonlinear functional analysis [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1985.

[15] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 3 版. 北京：高等教育出版社，2015.


（下转第 368 页）

[5] Chang Hua-Hua,Qian Jiahe,Ying Zhiliang. Alpha-stratified multistage computerized adaptive testing [J]. Applied Psychological Measurement,1999,23(23):211-222.
[6] 李萍,甘登文,丁树良,等. 自动控制区分度作用的选题策略研究 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2013,37(1):101-105.
[7] 戴勰,甘登文,丁树良. 结合影子题库的选题策略 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2013,37(6):657-660.
[8] 陈平,丁树良,林海菁,等. 等级反应模型下计算机化自适应测验选题策略 [J]. 心理学报,2006,38(3):461-467.
[9] 李佳,丁树良,方剑英. 基于平均数形式的选题策略比较 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2015,39(1):69-72.
[10] 胡姗,丁树良,程艳,等. CAT 分层终止规则探究 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2014,38(5):445-448.
[11] 程起航. 浅谈黄金分割在数学与生活中的应用 [J]. 数理化学习,2008(5):27-29.
[12] 罗芬,丁树良,王晓庆. 多级评分计算机自适应测验动态综合选题策略 [J]. 心理学报,2012,44(3):400-412.

## The Item Selection Strategy of Raising Item Pool Security

HE Xiang,LUO Fen,GAN Dengwen*,DING Shuliang,WANG Wenyi
(College of Computer Information and Engineering,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

**Abstract:** The safety of item pool is the key point to the implementation of computerized adaptive test,inspired by the original dynamic $a$-stratified method and mean inequality,constructing another item selection strategy of the dynamic $a$-stratified. The simulation experimental results showed that the new item selection strategy to keep the test precision of the original dynamic $a$-stratified method,and further improves the security of the test.
**Key words:** item information; discrimination; item selection strategy

(责任编辑:冉小晓)

(上接第 353 页)

## The Positive Solutions of a Class of Third-Order Boundary-Value Problems with Derivative Dependence

LI Fengyan[1],SHI Jinchuan[2]
(1. Department of Business and Trade,College of Liaoning Administration,Shenyang Liaoning 110161,China;
2. Keya College,Shenyang University of Chemical Technology,Shenyang Liaoning 110167,China)

**Abstract:** By means of the methods of fixed point index computation,the existence of positive solutions of a class of third-order boundary-value problems with derivative dependence is proved. The boundary-value problems considered possess different order,boundary conditions and singularity from those in previous works. An example is given to apply the results obtained.
**Key words:** derivative dependence; third-order boundary-value; positive solution

(责任编辑:曾剑锋)