

文章编号: 1000-5862(2017)05-0526-05

# Burgers 方程的跳点紧致格式

陈 萌, 孔令华\*, 王 兰

(江西师范大学数学与信息科学学院, 江西 南昌 330022)

**摘要:** Burgers 方程是流体力学中非常重要方程. 通过 Hopf-Cole 变换可以将 Burgers 方程转化为抛物型方程, 把为 Burgers 方程构造一种高精度的、高效率的数值格式的问题变成了为抛物型方程构造一种新格式的问题. 新格式以等价于 Du Fort-Frankel 格式的跳点格式为基础, 引入高阶紧致格式的思路以提高跳点格式的收敛阶. 称新格式为跳点紧致格式. 此格式既保持了跳点格式计算效率高、占用内存少、无条件稳定的优点, 又将空间方向收敛阶由 2 阶提高到了 4 阶. 最后, 数值算例验证了跳点紧致格式在空间方向收敛阶是 4 阶的.

**关键词:** Burgers 方程; 跳点格式; Du Fort-Frankel 格式; 高阶紧致格式

**中图分类号:** O 241.8 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2017.05.15

## 0 引言

Burgers 方程  $\partial\varphi/\partial t + \varphi\partial\varphi/\partial x = v\partial^2\varphi/\partial x^2$  是流体力学中一个非常重要的和基本的偏微分方程. 它不仅可以作为流体动力学 Navier-Stokes 方程的简单模型方程, 又可以作为浅水波问题的模型方程, 而且也是当代交通流动力学的模型方程. 它广泛地应用于空气动力学、湍流、热传导、弹性力学等领域. 因此讨论 Burgers 方程的数值解法具有极高的学术价值<sup>[1-2]</sup>. 早在 19 世纪 50 年代, E. Hopf 和 J. D. Cole 就分别独立地证明了 Burgers 方程能够转化为抛物型方程, 并且对于任意初始条件, 都可以得到方程的解析解<sup>[2-3]</sup>. 之后, 许多研究者对方程进行了研究并提出了一系列的数值方法, 如基础的有限差分法、有限元方法、谱方法、高阶紧致方法以及后来新发展的混合有限元方法、小波有限元方法、广义积分微分法、交替方向隐式差分方法和广义有限谱方法等<sup>[4-14]</sup>.

由于 Burgers 方程能够被转化为抛物型方程, 许多学者着眼于 Burgers 方程经过 Hopf-Cole 变换转化后的抛物型方程, 为其构造高效、高精度的数值格式. 他们的研究成果以及许多原本为抛物型方程构

造差分格式的成果都对本文起到了借鉴的作用<sup>[15-17]</sup>.

本文主要讨论 1 维 Burgers 方程的初边值问题

$$\begin{cases} \varphi_t + \varphi\varphi_x = v\varphi_{xx}, & a < x < b, \quad t > 0, \\ \varphi(x, 0) = f(x), & a < x < b, \\ \varphi(x, t) = \varphi(x + S, t), & S = b - a, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $v > 0$  为粘性系数,  $f(x)$  是已知函数,  $S$  是函数的周期. 该方程是抛物型微分方程, 但当  $v$  较小时, 粘性项的作用减弱, 逐渐具有双曲型方程的某些性质.

对 Burgers 方程作 Hopf-Cole 变换

$$\varphi(x, t) = -2vu_x/u, \quad (2)$$

其中  $u = u(x, t)$  是 3 阶可导函数, 可得到如下抛物型方程

$$\begin{cases} u_t = vu_{xx}, & a < x < b, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \exp\left\{-\frac{1}{2v}\int_0^x f(\xi)d\xi\right\}, & a < x < b, \\ u(x, t) = u(x + S, t). \end{cases} \quad (3)$$

这样 Burgers 方程(1)的数值求解就转化成抛物型方程(3)的数值求解.

## 1 跳点紧致格式

定义求解区域  $[a, b] \times [0, T]$  上的均匀剖分  $\Delta: a =$

收稿日期: 2017-01-10

基金项目: 国家自然科学基金(11301234, 11271171, 11501082)和江西省自然科学基金(20161ACB20006, 20142BCB23009, 20151BAB201012)资助项目.

通信作者: 孔令华(1977-), 男, 江西石城人, 教授, 博士, 主要从事偏微分方程数值解法的研究. E-mail: konglh@mail.ustc.edu.cn

$x_0 < x_1 < \cdots < x_{2N-1} < x_{2N} = b$   $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{M-1} < t_M = T$ , 其中  $x_j = a + jh$   $j = 0, 1, 2, \cdots, 2N$   $h = (b - a) / (2N)$ ,  $t_n = n\tau$   $n = 0, 1, 2, \cdots, M$   $\tau = T/M$ . 记函数  $u$  在节点  $(x_j, t_n)$  处的函数值  $u(x_j, t_n)$  的近似值为  $u_j^n$ . 定义范数符号(根号)如下:

$$\|u^n\|_2 = \sqrt{h \sum_j (u_j^n)^2}, \|u^n\|_\infty = \max_j |u_j^n|.$$

按格点上标、下标和  $j+n$  的奇偶性对剖分  $\Delta$  进行第 2 次划分: 记  $j+n$  为偶数的格点为偶数格点,  $j+n$  为奇数的格点为奇数格点. 针对抛物型方程  $u_t = vu_{xx}$  在奇数、偶数格点上分别使用显式、隐式格式作差分近似. 在任一时间步  $[t_n, t_{n+1}]$  的计算中, 首先在奇数格点上使用显式格式作差分近似, 即使用显式格式计算时间层  $t_{n+1}$  上的奇数格点的值

$$(u_j^{n+1} - u_j^n) / \tau - v(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) / h^2 = 0, \\ n+1+j = \text{奇数}, \quad (4)$$

然后在偶数格点上使用隐式格式作差分近似, 即使用隐式格式计算时间层  $t_{n+1}$  上的偶数格点的值

$$(u_j^{n+1} - u_j^n) / \tau - v(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) / h^2 = 0, \\ n+1+j = \text{偶数}. \quad (5)$$

由于时间层  $t_{n+1}$  上的奇数格点的值已通过 (4) 式算出, 所以 (5) 式中仅有 1 个未知数  $u_j^{n+1}$ , 可以直接计算. 在下一时间步  $[t_{n+1}, t_{n+2}]$  的计算中, 仍使用显式格式计算时间层  $t_{n+2}$  上的奇数格点的值

$$(u_j^{n+2} - u_j^{n+1}) / \tau - v(u_{j+1}^{n+2} - 2u_j^{n+2} + u_{j-1}^{n+2}) / h^2 = 0, \\ n+2+j = \text{奇数}, \quad (6)$$

由于  $n+2+j = \text{奇数}$  等价于  $n+1+j = \text{偶数}$ , 可以用 (6) 式减去 (5) 式得

$$u_j^{n+2} - 2u_j^{n+1} - u_j^n, \quad n+2+j = \text{奇数}. \quad (7)$$

此外, 将 (7) 式代入 (6) 式与 (5) 式相加的结果得

$$\frac{u_j^{n+2} - u_j^n}{2\tau} - v \frac{u_{j+1}^{n+1} - (u_j^{n+2} + u_j^n) + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} = 0, \\ n+2+j = \text{偶数}. \quad (8)$$

(8) 式与 Du Fort-Frankel 格式等价, 是无条件稳定的. 一般地, 取  $\tau = O(h^2)$ , 格式与方程 (3) 相容且在时间空间方向都是 2 阶收敛的.

由上述推导过程可以看出, 每一时间层需要计算的奇数、偶数格点可以分别通过 (7) 式与 (5) 式计算得到, 而 (7) 式的运算明显是极为简单的. 与一般的有限差分法相比, 跳点格式有以下优点: (i) 在奇数格点上的数值解只需要极少的计算量, 可节约计算成本; (ii) 每一时间层可以只保留偶数格点上的数值解以节约内存.

在跳点格式的基础之上, 考虑引进高阶紧致格

式<sup>[12-15]</sup>与跳点格式结合来构造一种新的格式, 称为跳点紧致格式. 期望跳点紧致格式在保持上述跳点格式优点的同时, 可通过高阶紧致格式的构造思路将空间方向收敛阶提高到 4 阶.

在求解区域  $[a, b] \times [0, T]$  上定义与前面相同的均匀剖分  $\Delta$ , 并同样将格点分为奇数、偶数格点. 记每一时间步运算中的偏导算子  $\partial^2 u / \partial x^2$  的差分近似为

$$\frac{1}{h^2} \delta_x^2 u_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j + \frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_j + O(h^4), \quad (9)$$

可写作

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = \left( I + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j + O(h^4), \quad (10)$$

其中  $I$  是恒等映射. 将近似格式 (9) 代入 (10) 式得

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j = \left( I + \frac{1}{12} \delta_x^2 \right) \delta_x^2 u_j + O(h^4).$$

可进一步得到抛物型微分方程的紧致显-隐式格式

$$\frac{(u_{j+1}^{n+1} + 10u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) - (u_{j+1}^n + 10u_j^n + u_{j-1}^n)}{12\tau} - v \frac{1}{h^2} \delta_x^2 u_j^n = 0, \quad (11)$$

$$\frac{(u_{j+1}^{n+1} + 10u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) - (u_{j+1}^n + 10u_j^n + u_{j-1}^n)}{12\tau} - v \frac{1}{h^2} \delta_x^2 u_j^{n+1} = 0. \quad (12)$$

然而, 考虑到跳点格式的每一步需要计算的格点及邻点为  $\cdots, u_{j-2}, u_j, u_{j+2}, \cdots$ , 需要将近似格式 (9) 修正为

$$\frac{(u_{j+2}^{n+1} + 46u_j^{n+1} + u_{j-2}^{n+1}) - (u_{j+2}^n + 46u_j^n + u_{j-2}^n)}{48\tau} - v \frac{1}{h^2} \delta_x^2 u_j^n = 0, \quad (13)$$

$$\frac{(u_{j+2}^{n+1} + 46u_j^{n+1} + u_{j-2}^{n+1}) - (u_{j+2}^n + 46u_j^n + u_{j-2}^n)}{48\tau} - v \frac{1}{h^2} \delta_x^2 u_j^{n+1} = 0. \quad (14)$$

记算子  $A = I + \delta_x^2 / 48$ , 依据跳点格式的计算思路: 首先使用显式格式 (13) 计算时间层  $t_{n+1}$  上的奇数格点的值

$$A(u_j^{n+1} - u_j^n) / \tau - v(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) / h^2 = 0, \\ n+1+j = \text{奇数},$$

然后使用隐式格式 (14) 计算时间层  $t_{n+1}$  上的偶数格点的值

$$A(u_j^{n+1} - u_j^n) / \tau - v(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) / h^2 =$$

0.  $n+1+j$  = 偶数 ,

类似于跳点格式的思路,可推得

$$u_j^{n+2} = 2u_j^{n+1} - u_j^n, \quad n+2+j = \text{奇数},$$

$$A(u_j^{n+2} - u_j^n) / (2\tau) - v(u_{j+1}^{n+1} - (u_j^{n+2} + u_j^n) + u_{j-1}^{n+1}) / h^2 = 0, \quad n+2+j = \text{偶数}. \quad (15)$$

根据(9)~(14)式可简单看出跳点紧致格式在空间方向是4阶收敛的.

由上述推导过程可看出,跳点紧致格式和跳点格式一样,奇数格点上的数值解只需要极少的计算量,可节约计算成本;每一时间层也只需要保存仅占所有格点的1/2的偶数格点,极大地节约内存.综上,跳点紧致格式将空间方向收敛阶提高到4阶,并保持了跳点格式的优点.值得注意的是:相比一般的有限差分方法的 $2N$ 阶矩阵,跳点紧致格式的数值运算中使用的相关矩阵只是 $N$ 阶的,可以进一步节约内存.

## 2 稳定性分析

引理1<sup>[17]</sup> 实系数2次方程 $x^2 - bx - c = 0$ 的2根按模不大于1且其中至少有一根按模严格小于1的充要条件是 $|b| \leq 1 - c, |c| < 1$ .

定理1 跳点紧致格式(15)是无条件稳定的.

证 将3层跳点紧致格式(15)转化为等价的2层差分方程组

$$\begin{cases} (A + rI) u_j^{n+1} = (A - rI) w_j^n + r(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n), \\ w_j^{n+1} = u_j^n, \end{cases}$$

其中 $r = v2\tau/h^2$ ,  $I$ 表示单位变换.令 $z = [u \quad w]^T$ ,则上面的方程组可以写成

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{48} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z_{j+2}^{n+1} + \begin{bmatrix} \frac{46}{48} + r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z_j^{n+1} + \begin{bmatrix} \frac{1}{48} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z_{j-2}^{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{48} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z_{j+2}^n + \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z_{j+1}^n + \begin{bmatrix} 0 & \frac{46}{48} - r \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z_j^n + \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z_{j-1}^n + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{48} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z_{j-2}^n,$$

令 $z = \rho^n e^{i\sigma}$ ,代入上面方程组得

$$z_j^{n+1} = \begin{bmatrix} \frac{46}{48} + r + 2\cos(2\sigma) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2r\cos(\sigma) & \frac{46}{48} - r + 2\cos(2\sigma) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z_j^n,$$

可以看出跳点紧致格式(15)的增长矩阵为

$$G = \begin{bmatrix} \frac{96r\cos(\sigma)}{46 + 48r + 96\cos(2\sigma)} & \frac{46 - 48r + 96\cos(2\sigma)}{46 + 48r + 96\cos(2\sigma)} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

增长矩阵 $G$ 的特征方程为

$$\lambda^2 - \frac{96r\cos(\sigma)}{46 + 48r + 96\cos(2\sigma)}\lambda - \frac{46 - 48r + 96\cos(2\sigma)}{46 + 48r + 96\cos(2\sigma)} = 0,$$

由引理1可知,特征方程的2个根按模不大于1且其中至少有一根按模严格小于1,满足 von Neuman 条件,故格式(15)是无条件稳定的,从而跳点紧致也是无条件稳定的.

## 3 数值实验

为数值验证本文的理论结果,下面进行一些数值实验.

Burgers 方程的解析解可以表达为如下形式

$$\varphi(x, t) = \frac{2v\pi\exp(\pi^2 vt) \sin(\pi x)}{\sigma + \exp(\pi^2 vt) \cos(\pi x)}, \quad (16)$$

其中取粘性系数 $v = 0.001$ ,常系数 $\sigma = 1$ ,边界 $a = 0, b = 2$ , (16)式可看作是区间 $[0, 2]$ 上的周期函数.依据解析解(16),可得到初边值问题(1)的初边值条件

$$\begin{cases} f(x) = \varphi(x, 0) = \frac{2v\pi\sin(\pi x)}{1 + \cos(\pi x)}, & 0 < x < 2, \\ \varphi(x+2) = \varphi(x). \end{cases} \quad (17)$$

首先,应用 Hopf-Cole 变换及(17)式将初边值问题(1)转化为抛物型方程,可得到

$$\begin{cases} u_t = vu_{xx}, & 0 < x < 2, t > 0, \\ u(x, 0) = 1 + \cos(\pi x), & 0 < x < 2, \\ u(x+2) = u(x), \end{cases} \quad (18)$$

由(16)式知其解析解为 $u(x, t) = 1 + \exp(\pi^2 vt) \cdot \cos(\pi x)$ .

然后使用跳点紧致格式计算问题(18)的数值解 $u_j^n$ ,并根据变换(2)式将其还原为问题(1)的数值解 $\varphi_j^n \approx \varphi(x_j, t_n)$ .  $\varphi_j^n = 2v\delta_x^{(6)} u_j^n / u_j^n$ ,  $\delta_x u_j^n = (-u_{j-6}^n + 9u_{j-4}^n - 45u_{j-2}^n + 45u_{j+2}^n - 9u_{j+4}^n + u_{j+6}^n) / 120 = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n + O(h^6)$ .

最后根据计算结果和公式 $O_r \approx [\ln(\|e_r(h_2)\|_\alpha / \|e_r(h_1)\|_\alpha)] / \ln(h_2/h_1)$ 计算跳点紧致格式的收敛阶,其中 $e_r(h_k) = \varphi(jh_k, t_n) - \varphi_j^k$ 表示在取步长为 $h_k$ 时产生的误差.

取足够小的时间步长 $\tau = 5 \times 10^{-6}$ 以确保误差主要来源于空间方向的离散,取时间上限 $T = 20$  s,

在不同的空间步长下分别计算问题(18)的数值解. 同时用跳点格式和跳点紧致格式计算此问题. 2 种格式在不同空间步长下计算得到的误差、收敛阶列

举于表 1 中. 由表 1 可看出,跳点紧致格式在空间方向是 4 阶收敛的.

表 1 跳点紧致格式和跳点格式的误差及收敛阶

	$h$	$\ e_r\ _2$	$O_r$	$\ e_r\ _\infty$	$O_r$
跳点紧致格式	1/8	$9.488\,7\times10^{-6}$	—	$9.159\,9\times10^{-6}$	—
	1/16	$5.581\,6\times10^{-7}$	4.08	$5.388\,1\times10^{-7}$	4.08
	1/32	$3.104\,7\times10^{-8}$	4.24	$3.054\,5\times10^{-8}$	4.20
	1/64	$1.829\,1\times10^{-9}$	4.12	$1.691\,1\times10^{-9}$	4.25
跳点格式	1/32	$2.976\,1\times10^{-6}$	—	$4.801\,3\times10^{-6}$	—
	1/64	$7.980\,1\times10^{-7}$	1.90	$1.295\,0\times10^{-6}$	1.89
	1/128	$1.956\,9\times10^{-7}$	2.03	$3.172\,8\times10^{-7}$	2.03
	1/256	$4.141\,9\times10^{-8}$	2.24	$6.706\,5\times10^{-8}$	2.24

为了直观地表现跳点紧致格式的近似结果,列举跳点紧致格式在  $\tau=0.05$ 、 $h=1/32$  时的数值解的 3 维图像与解析解的 3 维图像作比较(见图 1).

可以看出 2 幅图形的细节特征没有明显差别,跳点紧致格式很好地模拟出了 Burgers 方程所描述的波.

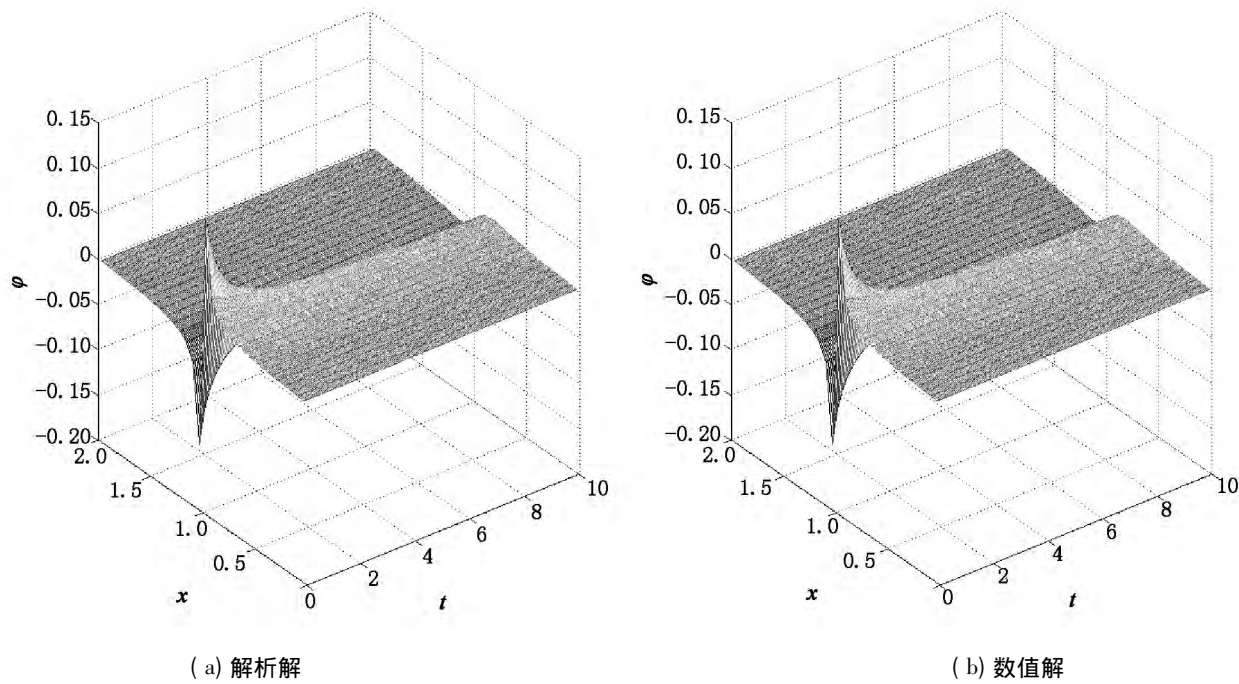


图 1 数值解与解析解的 3 维图像比较

4 结论

本文通过结合跳点格式和高阶紧致格式的思路,构造出一个新的差分格式,既保持了跳点格式计算效率高、占用内存少、无条件稳定的优点,又将空间方向收敛阶由 2 阶提高到 4 阶. 紧致格式对跳点格式没有负向作用,新格式构造也是建立在紧致格式应用的高自由度的基础上. 本文为 Burgers 方程的差分格式的研究提供了新的可能性,同时为其它偏微分方程差分近似应用紧致格式以提高收敛阶提供

了更多的实践依据.

5 参考文献

[1] Bateman H. Some recent researches on the motion of fluids [J]. Monthly Weather Re, 1915, 43: 163-170.

[2] Cole J D. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics [J]. Quartely of Appl Math, 1951, 9(3): 225-236.

[3] Hopf E. The partial differential equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$  [J]. Commun Pure and Appl Math, 1950, 3(3): 201-230.

- [4] Kutluay S ,Bahadir A R ,Özdes A. Numerical solution of one-dimensional Burgers' equation: explicit and exact-ex-plicit finite difference methods [J]. J Comput Appl Math , 1999 ,103( 2) : 251-261.
- [5] 万德成 ,韦国伟. 用拟小波方法数值求解 Burgers 方程 [J]. 应用数学和力学 2000 21( 10) : 991-1001.
- [6] 唐晨 ,刘铭 ,闰海青. Burgers 方程的高精度多步显式格式 [J]. 天津大学学报 2004 37( 10) : 929-933.
- [7] 王文治. Burgers 方程的一类交替分组方法 [J]. 应用数学和力学 2004 25( 2) : 213-220.
- [8] 詹杰民 ,李毓湘. 一维 Burgers 方程和 Kdv 方程的广义有限谱方法 [J]. 应用数学和力学 2006 27( 2) : 1431-1438.
- [9] Tabatabaei A H A E ,Shakour E ,Dehghan M. Some im-plicit methods for the numerical solution of Burgers' equa-tion [J]. Appl Math Comput 2007 ,191( 2) : 560-570.
- [10] 王廷春 ,张鲁明. 解 Burgers 方程的一种交替分段隐式算法 [J]. 计算物理 2005 22( 2) : 137-142.
- [11] Hon Yiuchung ,Mao Xianzhong. An efficient numerical scheme for Burgers' equation [J]. Appl Math Comput , 1998 95( 1) : 37-50.
- [12] 赵飞 ,蔡志权 ,葛永斌. 1 维非定常对流扩散方程的有理型高阶紧致差分格式 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版 2014 38( 4) : 413-418.
- [13] 王兰. 杆振动方程的高阶紧致差分格式 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版 2015 39( 4) : 351-354.
- [14] 童慧 ,孔令华 ,王兰. Dirac 方程的紧致分裂多辛格式 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版 2014 38( 5) : 521-525.
- [15] 李广兴. 解 Schrödinger 方程和 Burgers 方程的紧差分格式 [D]. 青岛: 中国海洋大学 2007.
- [16] Kong Linghua ,Hong Jialin ,Ji Lihai. Compact and efficient conservative schemes for coupled nonlinear Schrödinger e-quations [J]. Numer Meth for Partial Diff Eq ,2015 ,31( 6) : 1814-1843.
- [17] 陆金甫 ,关治. 偏微分方程数值解法 [M]. 北京: 清华大学出版社 2004: 82-89.

## The Jumping and Compact Method for Burgers Equation

CHEN Meng ,KONG Linghua\* ,WANG Lan

( College of Mathematics and Informatics ,Jiangxi Normal University ,Nanchang Jiangxi 330022 ,China)

**Abstract:** The Burgers equation is a very important model in fluid mechanics. It can be transformed into a general parabolic equation by a Hopf-Cole transformation. Then the problem about constructing a high accuracy and efficient method for Burgers equation has become a new problem for the parabolic equation. The new scheme is based on the jumping method which is equivalent to Du Fort-Frankel method. The high order compact methods are used to accelerate the convergent rate and it is called jumping and compact method. It maintains the advantages of highly computational efficiency ,little memory and unconditional stability. Moreover ,it also increases the convergent order in space from second to fourth. Lastly ,a simple numerical example is introduced to verify that the convergent rate of the jumping and compact method in the space is of fourth order.

**Key words:** Burgers equation; jumping method; Du Fort-Frankel method; high order compact methods

( 责任编辑: 曾剑锋)