文章编号:1000-5862(2018)03-0260-07

附有必选和可选服务的 M/G/1/1 反馈排队模型主算子的谱特征

阿力木·米吉提
(新疆广播电视大学,新疆 乌鲁木齐 830049)

摘要: 在一定条件下,通过研究附有必选和可选服务的 M/G/1/1 反馈排队模型主算子的谱特征,得到该反馈排队模型时间依赖解的渐近行为. 为此,首先证明 0 是此模型主算子的几何重数为 1 的特征值;其次求出此反馈排队模型主算子的共轭算子表达式,并证明 0 是此共轭算子的几何重数为 1 的特征值;然后在一定条件下推出虚轴上除了 0 外,其他的所有点都属于该反馈排队模型主算子的豫解集;最后在同样条件下,将上述结果结合在一起推出:该模型的时间依赖解强收敛于其稳态解.

关键词: M/G/1/1 反馈排队;必选和可选服务;特征值;几何重数;豫解集
中图分类号: O 177.7　　**文献标志码:** A　　**DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2018.03.08

0 引言

M/G/1/1 排队系统因其广泛的适用性而得到了众多研究[1-5]. 除了理论上的研究外,它还被应用于计算机建模和通信网络[2-3]. 最近许多学者对具有有限等待空间的系统进行了分析,其中不允许排队的系统引起了他们极大的兴趣[4-5].

1994 年,K. C. Madan 在文献[4]中研究了当第 1 种(必选)服务结束后,顾客既可以选择离开,也可以选择可选服务的 M/G/1/1 排队系统. 1963 年,L. Takacs 在文献[6]中考虑了当服务完成后顾客既可以离开,也可以以一种特殊的概率重新进入系统的 M/G/1/1 Bernoulli 反馈排队系统. 在文献[7]中 B. K. Kumar 等讨论了当必选服务结束后,顾客既可以选择离开系统,也可以选择重回到必选服务或选择特殊服务的 M/G/1/1 反馈排队系统. 首先运用补充变量方法[8],他们建立了描述此系统的数学模型,然后通过 Laplace 变换研究了该模型的稳态解. 在一定条件下,本文通过研究此反馈排队模型所对应的主算子的谱的特征,讨论此反馈排队模型时间依赖解的渐近行为. 为此,首先证明 0 是此反馈排队模型主算子与共轭算子的几何重数为 1 的特征值,接着证明虚轴上除了 0 外的其他所有的点都属于该反馈排队模型主算子的豫解集,最后将上述结果结合在一起得到该系统模型的时间依赖解强收敛于其稳态解.

由文献[7],附有必选和可选服务的 M/G/1/1 反馈排队模型用以下微积分方程组来描述:

$$\frac{\mathrm{d}P_0(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda P_0(t) + d\int_0^\infty P_1(x,t)\mu_1(x)\mathrm{d}x + \int_0^\infty P_2(x,t)\mu_2(x)\mathrm{d}x + \int_0^\infty P_3(x,t)\mu_3(x)\mathrm{d}x, \quad (1)$$

$$\frac{\partial P_i(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial P_i(x,t)}{\partial t} = -\mu_i(x)P_i(x,t),\ i=1,2,3, \quad (2)$$

$$P_1(0,t) = \lambda P_0(t) + r\int_0^\infty P_1(x,t)\mu_1(x)\mathrm{d}x, \quad (3)$$

$$P_2(0,t) = p\int_0^\infty P_1(x,t)\mu_1(x)\mathrm{d}x, \quad (4)$$

$$P_3(0,t) = q\int_0^\infty P_1(x,t)\mu_1(x)\mathrm{d}x, \quad (5)$$

$$P_0(0) = 1, P_i(x,0) = 0, i = 1,2,3. \quad (6)$$

其中 $(x,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$;$P_0(t)$ 表示在时刻 t 服务台空闲的概率;$P_i(x,t)\mathrm{d}x$ 表示在时刻 t 服务台处于状态 $i(i=1,2,3)$,该状态已经停留了 x 时间,在 $(x,x+\mathrm{d}x)$ 时间内离去此状态的概率. λ 表示顾客到达系统的到达率;d 表示接受完必选服务后顾客

收稿日期:2017-11-25
基金项目:新疆少数民族科技人才特殊培养计划科研(2016D0211)和国家自然科学基金(11601464)资助项目.
作者简介:阿力木·米吉提(1978-),男,新疆阿克陶人,副教授,主要从事排队模型的动态分析研究. E-mail:alimjanmijit@aliyun.com

离去系统的概率;r 表示顾客完成必选服务后反馈到必选服务的概率; $p(q)$ 表示顾客完成必选服务后选择可选服务 Ⅰ(Ⅱ) 的概率,其中 d,r,p,q 满足 $d+r+p+q=1$;$\mu_j(x)\mathrm{d}x(j=1,2,3)$ 表示$(x,x+\mathrm{d}x)$ 系统在状态 $j(i=1,2,3)$ 的服务率.

1　模型的转换

首先通过选择适当的状态空间,算子及定义域将附有必选和可选服务的 M/G/1/1 反馈排队模型转化成 Banach 空间中的抽象 Cauchy 问题. 选取状态空间为

$$X=\left\{\boldsymbol{P}\in\mathbf{R}\times(L^1[0,\infty))^3\,\middle|\,\|\boldsymbol{P}\|=|P_0|+\sum_{i=1}^{3}\|P_i\|_{L^1[0,\infty)}\right\}.$$

显然 X 是一个 Banach 空间. 为简单起见,定义极大算子 $(\boldsymbol{A}_m,D(\boldsymbol{A}_m))$ 为[9]

$$\boldsymbol{A}_m\begin{pmatrix}P_0\\P_1(x)\\P_2(x)\\P_3(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda & d\chi_1 & \chi_2 & \chi_3\\0&\omega_1&0&0\\0&0&\omega_2&0\\0&0&0&\omega_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_0\\P_1(x)\\P_2(x)\\P_3(x)\end{pmatrix},$$

$$D(\boldsymbol{A}_m)=\{\boldsymbol{P}\in X\,|\,\mathrm{d}P_i(x)/\mathrm{d}x\in L^1[0,\infty),\ P_i(x)\text{ 是绝对连续函数},i=1,2,3\},$$

其中

$$\omega_i f(x)=-\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}-\mu_i(x)f(x),$$

$$\chi_i g(x)=\int_0^\infty g(x)\mu_i(x)\mathrm{d}x,i=1,2,3,$$

$$f\in W^{1,1}[0,\infty),g\in L^1[0,\infty),$$

选取 X 的边界空间 $\partial X:=C^3$,并且定义边界算子 $L:D(\boldsymbol{A}_m)\to\partial X,\Phi:D(\boldsymbol{A}_m)\to\partial X$ 如下:

$$L\begin{pmatrix}P_0\\P_1(x)\\P_2(x)\\P_3(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1(0)\\P_2(0)\\P_3(0)\end{pmatrix},$$

$$\Phi\begin{pmatrix}P_0\\P_1(x)\\P_2(x)\\P_3(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & r\chi_1 & 0 & 0\\0&p\chi_1&0&0\\0&q\chi_1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_0\\P_1(x)\\P_2(x)\\P_3(x)\end{pmatrix}.$$

如果定义算子$(A,D(A))$为 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{P},D(A)=\{\boldsymbol{P}\in D(\boldsymbol{A}_m)\,|\,L\boldsymbol{P}=\Phi\boldsymbol{P}\}$,则方程(1) ~ (6) 可描述为 X 上的抽象 Cauchy 问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{AP}(t),\forall t\in[0,\infty),\\ \boldsymbol{P}(0)=(1,0,0,0).\end{cases}\tag{7}$$

2　系统(7) 相应算子的谱特征

下面研究附有必选和可选服务的 M/G/1/1 反馈排队模型时间依赖解的渐近行为. 由文献[10] 中的定理 14 知,抽象 Cauchy 问题的时间依赖解的渐近行为是由它的谱特征来决定的,因此下面研究此模型相应主算子的谱特征. 1) 证明 0 是此反馈排队模型主算子的几何重数为 1 的特征值;2) 求出该反馈排队模型主算子的共轭算子表达式;3) 证明 0 是该共轭算子的几何重数为 1 的特征值;4) 通过利用文献[11] 中的思想和文献[12] 中的结论获得该模型主算子的豫解集,并推出虚轴上除了 0 外其它所有点都属于该模型主算子的豫解集,由此推出附有必选和可选服务的 M/G/1/1 反馈排队模型时间依赖解的渐近行为.

引理 1　0 是 A 的几何重数为 1 的特征值.

证　讨论方程 $\boldsymbol{AP}=0$,即

$$\lambda P_0=d\int_0^\infty P_1(x)\mu_1(x)\mathrm{d}x+\int_0^\infty P_2(x)\mu_2(x)\mathrm{d}x+\int_0^\infty P_3(x)\mu_3(x)\mathrm{d}x,\tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}P_i(x)}{\mathrm{d}x}=-\mu_i(x)P_i(x),i=1,2,3,\tag{9}$$

$$P_1(0)=\lambda P_0+r\int_0^\infty P_1(x)\mu_1(x)\mathrm{d}x,\tag{10}$$

$$P_2(0)=p\int_0^\infty P_1(x)\mu_1(x)\mathrm{d}x,\tag{11}$$

$$P_3(0)=q\int_0^\infty P_1(x)\mu_1(x)\mathrm{d}x.\tag{12}$$

解(9) 式得到

$$P_i(x)=a_i\mathrm{e}^{-\int_0^x\mu_i(\zeta)\mathrm{d}\zeta},i=1,2,3.\tag{13}$$

(13) 式结合(10) ~ (12) 式并利用

$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\int_0^x\mu_1(\tau)\mathrm{d}\tau}\mu_1(x)\mathrm{d}x=1$$

推出

$$a_1=P_1(0)=\lambda P_0+ra_1\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\int_0^x\mu_1(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\mu_1(x)\mathrm{d}x=\lambda P_0+ra_1\Rightarrow a_1=\lambda P_0/(1-r),\tag{14}$$

$$a_2=P_2(0)=pa_1\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\int_0^x\mu_1(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\mu_1(x)\mathrm{d}x=p\lambda P_0/(1-r),\tag{15}$$

$$a_3=P_3(0)=qa_1\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\int_0^x\mu_1(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\mu_1(x)\mathrm{d}x=$$

$$q\lambda P_0/(1-r). \tag{16}$$

由(8),(13)~(16)式得到

$$\|\boldsymbol{P}\| = |P_0| + \sum_{i=1}^{3}\|P_i\|_{L^1[0,\infty)} = |P_0| + \sum_{i=1}^{3}|a_i|\int_0^\infty e^{-\int_0^x\mu_i(\zeta)d\zeta}dx + |P_0| + \frac{\lambda}{1-r}|P_0|\cdot \left\{\int_0^\infty e^{-\int_0^x\mu_1(\zeta)d\zeta}dx + p\int_0^\infty e^{-\int_0^x\mu_2(\zeta)d\zeta}dx + q\int_0^\infty e^{-\int_0^x\mu_3(\zeta)d\zeta}dx\right\} \leqslant |P_0|\left(1+\frac{\lambda}{1-r}\sum_{i=1}^{3}\int_0^\infty e^{-\int_0^x\mu_i(\zeta)d\zeta}dx\right) < \infty.$$

此式说明:0 是 A 的特征值. 同时由(8)式,(13)~(16)式知道:对应于 0 的特征向量空间是 1 维的线性空间. 即 0 的几何重数为 1. 证毕.

由文献[13],不难求出 X 的共轭空间 X^* 为

$$X^* = \left\{\boldsymbol{\kappa}^* \in \mathbf{R}\times(L^\infty[0,\infty))^3 \mid \||\boldsymbol{\kappa}^*|\| = \sup\{|\kappa_0^*|, \sup_{i=1,2,3}\|\kappa_i^*\|_{L^\infty[0,\infty)}\}\right\}.$$

容易证明 X^* 是一个 Banach 空间[14].

引理 2 A 的共轭算子 A^* 为

$$A^*\boldsymbol{\kappa}^* = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ d\mu_1(x) & \frac{d}{dx}-\mu_1(x) & 0 & 0 \\ \mu_2(x) & 0 & \frac{d}{dx}-\mu_2(x) & 0 \\ \mu_3(x) & 0 & 0 & \frac{d}{dx}-\mu_3(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\kappa_0^* \\ \kappa_1^*(x) \\ \kappa_2^*(x) \\ \kappa_3^*(x)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & r\mu_1(x) & p\mu_1(x) & q\mu_1(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\kappa_0^* \\ \kappa_1^*(0) \\ \kappa_2^*(0) \\ \kappa_3^*(0)\end{pmatrix},$$

$D(A^*) = \{\boldsymbol{\kappa}^* \in X^* \mid d\kappa_i^*(x)/dx$ 存在且 $\kappa_i^*(\infty) = M, i = -1,2,3\}$,其中 M 是与 $i(i=1,2,3)$ 无关的常数.

证 $\forall \boldsymbol{P}\in D(A)$ 和 $\boldsymbol{\kappa}^* \in D(A^*)$,利用分部积分公式和边界条件推出

$$\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{P},\boldsymbol{\kappa}^*\rangle = \left\{-\lambda P_0 + d\int_0^\infty P_1(x)\mu_1(x)dx + \int_0^\infty P_2(x)\mu_2(x)dx + \int_0^\infty P_3(x)\mu_3(x)dx\right\}\kappa_0^* + \sum_{i=1}^{3}\int_0^\infty\left\{-\frac{dP_i(x)}{dx} - \mu_i(x)P_i(x)\right\}\kappa_i^*(x)dx = P_0(-\lambda\kappa_0^*) + \left(\int_0^\infty P_1(x)\mu_1(x)d\kappa_0^* dx + \sum_{i=2}^{3}\int_0^\infty P_i(x)\mu_i(x)\kappa_0^* dx + \sum_{i=1}^{3}P_i(0)\kappa_i^*(0) + \sum_{i=1}^{3}\int_0^\infty P_i(x)\left\{\frac{d}{dx}-\mu_i(x)\right\}\kappa_i^*(x)dx = P_0\{-\lambda\kappa_0^* + \lambda\kappa_1^*(0)\} + \int_0^\infty P_1(x)\{d\mu_1(x)\kappa_0^* + r\mu_1(x)\kappa_1^*(0) + p\mu_1(x)\kappa_2^*(0) + q\mu_1(x)\kappa_3^*(0) + [d/dx - \mu_1(x)]\kappa_1^*(x)\}dx + \sum_{i=2}^{3}\int_0^\infty P_i(x)\{\mu_i(x)\kappa_0^* + [d/dx - \mu_i(x)]\kappa_i^*(x)\}dx = \langle \boldsymbol{P},\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\kappa}^*\rangle.$$

由共轭算子的定义结合到上式知,引理 2 的结论成立. 证毕.

引理 3 0 是共轭算子 A^* 的几何重数为 1 的特征值.

证 考虑方程 $A^*\boldsymbol{\kappa}^* = 0$ 的非零解,此方程等价于

$$-\lambda\kappa_0^* + \lambda\kappa_1^*(0) = 0,$$

$$d\kappa_1^*(x)/dx = \mu_1(x)\kappa_1^*(x) - \mu_1(x)[d\kappa_0^* + r\kappa_1^*(0) + p\kappa_2^*(0) + q\kappa_3^*(0)], \tag{17}$$

$$d\kappa_i^*(x)/dx = \mu_i(x)\kappa_i^*(x) - \mu_i(x)\kappa_0^*, i = 2,3, \tag{18}$$

$$\kappa_i^*(\infty) = M, i = 1,2,3. \tag{19}$$

由(17)~(18)式有

$$\kappa_1^*(x) = b_1 e^{\int_0^x\mu_1(\zeta)d\zeta} - e^{\int_0^x\mu_1(\zeta)d\zeta}\int_0^x\mu_1(\tau)[d\kappa_0^* + r\kappa_1^*(0) + p\kappa_2^*(0) + q\kappa_3^*(0)]e^{-\int_0^\tau\mu_1(\zeta)d\zeta}d\tau, \tag{20}$$

$$\kappa_i^*(x) = b_i e^{\int_0^x\mu_i(\zeta)d\zeta} - e^{\int_0^x\mu_i(\zeta)d\zeta}\cdot\int_0^x\mu_i(\tau)\kappa_0^* e^{-\int_0^\tau\mu_i(\zeta)d\zeta}d\tau, i = 2,3. \tag{21}$$

将(20)与(21)式两边同时乘 $e^{-\int_0^x\mu_1(\zeta)d\zeta}$,$e^{-\int_0^x\mu_i(\zeta)d\zeta}(i=2,3)$,并由(19)式推出

$$b_1 = \int_0^\infty\mu_1(\tau)[d\kappa_0^* + r\kappa_1^*(0) + p\kappa_2^*(0) + q\kappa_3^*(0)]e^{-\int_0^\tau\mu_1(\zeta)d\zeta}d\tau, \tag{22}$$

$$b_i = \int_0^\infty\mu_i(\tau)\kappa_0^* e^{-\int_0^\tau\mu_i(\zeta)d\zeta}d\tau, i = 2,3. \tag{23}$$

将(22),(23)式代入(20),(21)式可得

$$\kappa_1^*(x) = e^{\int_0^x\mu_1(\zeta)d\zeta}\int_x^\infty\mu_1(\tau)[d\kappa_0^* + r\kappa_1^*(0) + p\kappa_2^*(0) + q\kappa_3^*(0)]e^{-\int_0^\tau\mu_1(\zeta)d\zeta}d\tau, \tag{24}$$

$$\kappa_i^*(x) = e^{\int_0^x\mu_i(\zeta)d\zeta}\int_x^\infty\mu_i(\tau)\kappa_0^* e^{-\int_0^\tau\mu_i(\zeta)d\zeta}d\tau = -\kappa_0^* e^{\int_0^x\mu_i(\zeta)d\zeta}\int_x^\infty e^{-\int_0^\tau\mu_i(\zeta)d\zeta}d\left(-\int_0^\tau\mu_i(\zeta)d\zeta\right) = -\kappa_0^* e^{\int_0^x\mu_i(\zeta)d\zeta}\left[e^{-\int_0^\tau\mu_i(\zeta)d\zeta}\Big|_{\tau=x}^{\tau=\infty}\right] = \kappa_0^*, i = 2,3. \tag{25}$$

将(25)式代入(24)式,同时用关系式 $d + r +$

$p+q=1$ 得到

$$\kappa_1^*(x)=\mathrm{e}^{\int_0^x\mu_1(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\int_x^\infty\mu_1(\tau)\left[d\kappa_0^*+r\kappa_0^*+p\kappa_0^*+q\kappa_0^*\right]\mathrm{e}^{-\int_0^\tau\mu_1(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\tau=\kappa_0^*.\tag{26}$$

(25)式与(26)式说明

$$\||\boldsymbol{\kappa}^*|\|=\sup\left\{|\kappa_0^*|,\sup_{i=1,2,3}\|\kappa_i^*\|_{L^\infty[0,\infty)}\right\}=|\kappa_0^*|<\infty.\tag{27}$$

(27)式表明 0 是 A^* 的特征值. 此外,(25)~(27)式表明对应于 0 的特征向量构成 1 维的线性空间. 这表明 0 的几何重数为 1. 证毕.

下面研究附有必选和可选服务的 M/G/1/1 反馈排队模型相应主算子的豫解集. 1)定义算子 A_0 和该算子的定义域并且研究它的豫解集;2)通过考虑式子 $\gamma\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_m$ 的核来定义 Dirichlet 算子 D_γ,并且结合到所定义的边界算子的定义推出 ΦD_γ 的表达式;3)运用文献[11]中的结果得到 A 的豫解集.

定义算子$(A_0,D(A_0))$为 $A_0\boldsymbol{P}=A_m\boldsymbol{P}$,$D(A_0)=\{\boldsymbol{P}\in D(\boldsymbol{A}_m)\mid\boldsymbol{LP}=0\}$,则 $\forall z\in X$,考虑方程

$$(\gamma\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_0)\boldsymbol{P}=z,$$

这等价于

$$(\gamma+\lambda)P_0=z_0+d\int_0^\infty P_1(x)\mu_1(x)\mathrm{d}x+\int_0^\infty P_2(x)\mu_2(x)\mathrm{d}x+\int_0^\infty P_3(x)\mu_3(x)\mathrm{d}x,\tag{28}$$

$$\mathrm{d}P_i(x)/\mathrm{d}x=-[\gamma+\mu_i(x)]P_i(x)+z_i(x),i=1,2,3,\tag{29}$$

$$P_i(0)=0,i=1,2,3.\tag{30}$$

解(28)~(30)式得到

$$P_0=\frac{z_0}{\gamma+\lambda}+\frac{d}{\gamma+\lambda}\int_0^\infty\mu_1(x)\mathrm{e}^{-\gamma x-\int_0^x\mu_1(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\cdot\int_0^x z_1(\tau)\mathrm{e}^{\gamma\tau+\int_0^\tau\mu_1(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x+\frac{1}{\gamma+\lambda}\cdot\sum_{i=2}^3\int_0^\infty\mu_i(x)\mathrm{e}^{-\gamma x-\int_0^x\mu_i(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\int_0^x z_i(\tau)\mathrm{e}^{\gamma\tau+\int_0^\tau\mu_i(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x,\tag{31}$$

$$P_i(x)=\mathrm{e}^{-\gamma x-\int_0^x\mu_i(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\int_0^x z_i(\tau)\mathrm{e}^{\gamma\tau+\int_0^\tau\mu_i(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\tau,i=1,2,3.\tag{32}$$

$\forall f\in L^1[0,\infty)$,若记

$$V_if(x)=\mathrm{e}^{-\gamma x-\int_0^x\mu_i(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\int_0^x f(\tau)\mathrm{e}^{\gamma\tau+\int_0^\tau\mu_i(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\tau,i=1,2,3,$$

则(31)~(32)式变为

$$(\gamma\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_0)^{-1}z=\begin{pmatrix}\frac{1}{\gamma+\lambda}&\frac{d}{\gamma+\lambda}\chi_1V_1&\frac{1}{\gamma+\lambda}\chi_2V_2&\frac{1}{\gamma+\lambda}\chi_3V_3\\0&V_1&0&0\\0&0&V_2&0\\0&0&0&V_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_0\\z_1(x)\\z_2(x)\\z_3(x)\end{pmatrix}.$$

由上述表达式和豫解集的定义可得以下结论.

引理4　设$0<\underline{\mu_i}=\inf\limits_{x\in[0,\infty)}\mu_i(x)\leqslant\sup\limits_{x\in[0,\infty)}\mu_i(x)=\overline{\mu_i}<\infty\ (i=1,2,3)$,则

$$\{\gamma\in C\mid\operatorname{Re}\gamma+\underline{\mu_i}>0(i=1,2,3),\operatorname{Re}\gamma+\lambda>0\}\subset\rho(A_0).$$

证　$\forall f\in L^1[0,\infty)$,用 $V_i(i=1,2,3)$ 的定义和分部积分法估计出

$$\begin{aligned}&\|V_if\|_{L^1[0,\infty)}=\int_0^\infty|V_if(x)|\mathrm{d}x=\\&\int_0^\infty\left|\mathrm{e}^{-\gamma x-\int_0^x\mu_i(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\int_0^x f(\tau)\mathrm{e}^{\gamma\tau+\int_0^\tau\mu_i(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\tau\right|\mathrm{d}x\leqslant\\&\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\operatorname{Re}\gamma x-\int_0^x\mu_i(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\int_0^x\mathrm{e}^{\operatorname{Re}\gamma\tau+\int_0^\tau\mu_i(\zeta)\mathrm{d}\zeta}|f(\tau)|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x=\\&\int_0^\infty\frac{-1}{\operatorname{Re}\gamma+\mu_i(x)}\left(\int_0^x\mathrm{e}^{\operatorname{Re}\gamma\tau+\int_0^\tau\mu_i(\zeta)\mathrm{d}\zeta}|f(\tau)|\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\operatorname{Re}\gamma x-\int_0^x\mu_i(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\leqslant\\&\frac{-1}{\operatorname{Re}\gamma+\underline{\mu_i}}\left\{\mathrm{e}^{-\operatorname{Re}\gamma x-\int_0^x\mu_i(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\left(\int_0^x\mathrm{e}^{\operatorname{Re}\gamma\tau+\int_0^\tau\mu_i(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\cdot|f(\tau)|\mathrm{d}\tau\right)\Big|_{x=0}^{x=\infty}-\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\operatorname{Re}\gamma x-\int_0^x\mu_i(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\mathrm{e}^{\operatorname{Re}\gamma x+\int_0^x\mu_i(\zeta)\mathrm{d}\zeta}|f(x)|\mathrm{d}x\right\}=\\&\frac{1}{\operatorname{Re}\gamma+\underline{\mu_i}}\|f\|_{L^1[0,\infty)}\Rightarrow\|V_i\|\leqslant\frac{1}{\operatorname{Re}\gamma+\underline{\mu_i}},i=1,2,3.\end{aligned}\tag{33}$$

$\forall z\in X$,由 $\|\chi_i\|\leqslant\overline{\mu_i}(i=1,2,3)$和(33)式,$(\gamma\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_0)^{-1}$ 的表达式及引理 4 的条件推出

$$\begin{aligned}&\|(\gamma\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_0)^{-1}z\|=\\&\left|\frac{1}{\gamma+\lambda}z_0+\frac{d}{\gamma+\lambda}\chi_1V_1z_1+\frac{1}{\gamma+\lambda}\chi_2V_2z_2+\frac{1}{\gamma+\lambda}\chi_3V_3z_3\right|+\sum_{i=1}^3\|V_iz_i\|_{L^1[0,\infty)}\leqslant\frac{1}{|\gamma+\lambda|}|z_0|+\\&\frac{d}{|\gamma+\lambda|}|\chi_1V_1z_1|+\frac{1}{|\gamma+\lambda|}\sum_{i=2}^3|\chi_iV_iz_i|+\sum_{i=1}^3\|V_iz_i\|_{L^1[0,\infty)}\leqslant\frac{1}{|\gamma+\lambda|}|z_0|+\\&\frac{1}{|\gamma+\lambda|}\sum_{i=1}^3\|\chi_i\|\|V_i\|\|z_i\|_{L^1[0,\infty)}+\sum_{i=1}^3\|V_i\|\|z_i\|_{L^1[0,\infty)}\leqslant\frac{1}{|\gamma+\lambda|}|z_0|+\\&\sum_{i=1}^3\left(\frac{1}{|\gamma+\lambda|}\frac{\overline{\mu_i}}{\operatorname{Re}\gamma+\underline{\mu_i}}+\frac{1}{\operatorname{Re}\gamma+\underline{\mu_i}}\right)\|z_i\|_{L^1[0,\infty)}\leqslant\\&\sup\left\{\frac{1}{|\gamma+\lambda|},\sup_{i=1,2,3}\left\{\frac{1}{|\gamma+\lambda|}\frac{\overline{\mu_i}}{\operatorname{Re}\gamma+\underline{\mu_i}}+\frac{1}{\operatorname{Re}\gamma+\underline{\mu_i}}\right\}\right\}\cdot\|z\|<\infty.\end{aligned}$$

此式说明引理 4 的结论成立. 证毕.

引理5　设$0<\underline{\mu_i}=\inf\limits_{x\in[0,\infty)}\mu_i(x)\leqslant\sup\limits_{x\in[0,\infty)}\mu_i(x)=\overline{\mu_i}<\infty\ (i=1,2,3)$,若 $\gamma\in\rho(A_0)$,则

$$\boldsymbol{P}\in\ker(\gamma\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_m)\Leftrightarrow P_0=$$

$$\frac{c_1 d}{\gamma+\lambda}\int_0^\infty e^{-\gamma x-\int_0^x \mu_1(\zeta)d\zeta}\mu_1(x)dx+$$
$$\frac{1}{\gamma+\lambda}\sum_{i=2}^3 c_i\int_0^\infty e^{-\gamma x-\int_0^x \mu_i(\zeta)d\zeta}\mu_i(x)dx, \tag{34}$$
$$P_i(x)=c_i e^{-\gamma x-\int_0^x \mu_i(\zeta)d\zeta}, |c_i|<\infty, i=1,2,3. \tag{35}$$

证 如果$\boldsymbol{P}\in\ker(\gamma\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_m)$,则$(\gamma\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_m)\boldsymbol{P}=0$,这等价于

$$(\gamma+\lambda)P_0=d\int_0^\infty P_1(x)\mu_1(x)dx+$$
$$\int_0^\infty P_2(x)\mu_2(x)dx+\int_0^\infty P_3(x)\mu_3(x)dx, \tag{36}$$
$$\frac{dP_i(x)}{dx}=-[\gamma+\mu_i(x)]P_i(x), i=1,2,3. \tag{37}$$

解(37)式推出

$$P_i(x)=c_i e^{-\gamma x-\int_0^x \mu_i(\zeta)d\zeta}, i=1,2,3. \tag{38}$$

将(38)式代入(36)式得到

$$P_0=\frac{c_1 d}{\gamma+\lambda}\int_0^\infty e^{-\gamma x-\int_0^x \mu_1(\zeta)d\zeta}\mu_1(x)dx+$$
$$\frac{1}{\gamma+\lambda}\sum_{i=2}^3\int_0^\infty c_i e^{-\gamma x-\int_0^x \mu_i(\zeta)d\zeta}\mu_i(x)dx. \tag{39}$$

由于$\boldsymbol{P}\in\ker(\gamma\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_m)$,$\boldsymbol{P}\in D(\boldsymbol{A}_m)$,所以用嵌入定理[15]得到

$$|c_i|\leqslant\sum_{i=1}^3|c_i|=\sum_{i=1}^3|P_i(0)|\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^3\|P_i\|_{L^\infty[0,\infty)}\leqslant\sum_{i=1}^3\|P_i\|_{L^1[0,\infty)}+$$
$$\sum_{i=1}^3\left\|\frac{dP_i}{dx}\right\|_{L^1[0,\infty)}<\infty, i=1,2,3.$$

上式结合到(38)与(39)式,得到(34)~(35)式成立.

反之,如果(34)~(35)式成立,则有

$$\|P_i\|_{L^1[0,\infty)}\leqslant|c_i|\int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}\,\gamma x-\underline{\mu_i}x}dx=$$
$$|c_i|/(\mathrm{Re}\,\gamma+\underline{\mu_i}), i=1,2,3.$$

由$|c_i|<\infty(i=1,2,3)$和$\int_0^\infty v(x)e^{-\int_0^x v(\zeta)d\zeta}dx=1$,推出

$$\|\boldsymbol{P}\|=|P_0|+\sum_{i=1}^3\|P_i\|_{L^1[0,\infty)}\leqslant$$
$$\frac{|c_1|d}{|\gamma+\lambda|}\int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}\,\gamma x-\int_0^x \mu_1(\zeta)d\zeta}\mu_1(x)dx+\frac{1}{|\gamma+\lambda|}\cdot$$
$$\sum_{i=2}^3\int_0^\infty|c_i|e^{-\mathrm{Re}\,\gamma x-\int_0^x \mu_i(\zeta)d\zeta}\mu_i(x)dx+\sum_{i=1}^3\|P_i\|_{L^1[0,\infty)}\leqslant$$
$$\frac{|c_1|d}{|\gamma+\lambda|}\int_0^\infty e^{-\int_0^x \mu_1(\zeta)d\zeta}\mu_1(x)dx+\frac{1}{|\gamma+\lambda|}\cdot$$
$$\sum_{i=2}^3|c_i|\int_0^\infty e^{-\int_0^x \mu_i(\zeta)d\zeta}\mu_i(x)dx+\sum_{i=1}^3\frac{|c_i|}{\mathrm{Re}\,\gamma+\underline{\mu_i}}\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^3\left(\frac{1}{|\gamma+\lambda|}+\frac{1}{\mathrm{Re}\,\gamma+\underline{\mu_i}}\right)|c_i|<\infty. \tag{40}$$

由(35)式知

$$\frac{dP_i(x)}{dx}=-c_i(\gamma+\mu_i(x))e^{-\gamma x-\int_0^x \mu_i(\zeta)d\zeta}=$$
$$-(\gamma+\mu_i(x))P_i(x), i=1,2,3. \tag{41}$$

由(41)和(40)式得到

$$\sum_{i=1}^3\|dP_i/dx\|_{L^1[0,\infty)}=$$
$$\sum_{i=1}^3\int_0^\infty|(\gamma+\mu_i(x))P_i(x)|dx\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^3(|\gamma|+\bar{\mu_i})\|P_i\|_{L^1[0,\infty)}\leqslant$$
$$(|\gamma|+\sum_{i=1}^3\bar{\mu_i})\sum_{i=1}^3\|P_i\|_{L^1[0,\infty)}\leqslant$$
$$(|\gamma|+\sum_{i=1}^3\bar{\mu_i})\|\boldsymbol{P}\|<\infty. \tag{42}$$

(40)与(42)式表示

$$\boldsymbol{P}\in\ker(\gamma\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_m).$$

证毕.

由于L是满射,所以$L|_{\ker(\gamma\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_m)}:\ker(\gamma\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_m)\to\partial X$可逆. 若$\gamma\in\rho(\boldsymbol{A}_0)$,则定义 Direchlet 算子为

$$D_\gamma:=(L|_{\ker(\gamma\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_m)})^{-1}:\partial X\to\ker(\gamma\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_m).$$

对$\gamma\in\rho(\boldsymbol{A}_0)$,由引理4知算子$D_\gamma$的具体表达式为

$$D_\gamma\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d\psi_1&\psi_2&\psi_3\\\varepsilon_1&0&0\\0&\varepsilon_2&0\\0&0&\varepsilon_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix},$$

其中

$$\psi_i=\frac{1}{\gamma+\lambda}\int_0^\infty\varepsilon_i\mu_i(x)dx, i=1,2,3,$$
$$\varepsilon_i=e^{-\gamma x-\int_0^x \mu_i(\zeta)d\zeta}, i=1,2,3.$$

由$\varPhi$的定义和D_γ的表达式得到$\varPhi D_\gamma$的具体表达式:

$$\varPhi D_\gamma\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}\lambda&r\chi_1&0&0\\0&p\chi_1&0&0\\0&q\chi_1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\psi_1&\psi_2&\psi_3\\\varepsilon_1&0&0\\0&\varepsilon_2&0\\0&0&\varepsilon_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}\lambda d\psi_1+r\chi_1\varepsilon_1&\lambda\psi_2&\lambda\psi_3\\p\chi_1\varepsilon_1&0&0\\q\chi_1\varepsilon_1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}. \tag{43}$$

在文献[11]中 A. Haji 等得到如下结论.

引理 6　设 $\gamma\in\rho(A_0)$ 且 $\exists\gamma_0\in C$ 使得 $1\notin\sigma(\Phi D_{\gamma_0})$，则 $\gamma\in\sigma(A)\Leftrightarrow 1\in\sigma(\Phi D_\gamma)$.

在一定条件下，结合引理 6 与文献[11]得到如下结论.

引理 7　设 $0<\underline{\mu_i}=\inf\limits_{x\in[0,\infty)}\mu_i(x)\leqslant\sup\limits_{x\in[0,\infty)}\mu_i(x)=\overline{\mu_i}<\infty\ (i=1,2,3)$，且 A 生成一个正压缩 C_0-半群 $T(t)$，则在虚轴上除了 0 外其他所有点都属于 A 的豫解集.

证　设 $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$，$|c_j|<\infty\ (j=1,2,3)$，并且 $\gamma=\mathrm{i}h,h\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$. 由 Riemann-Lebesgue 引理

$$\lim_{h\to\infty}\int_0^\infty g(x)\cos(hx)\,\mathrm{d}x=0,$$
$$\lim_{h\to\infty}\int_0^\infty g(x)\sin(hx)\,\mathrm{d}x=0,$$
$$g\in L^1[0,\infty),\ g(x)\geqslant 0,$$

知存在非负常数 $K>0$ 使得对一切 $|h|>K$ 有

$$\left|\int_0^\infty g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}hx}\mathrm{d}x\right|^2=\left|\int_0^\infty g(x)(\cos(hx)-\mathrm{i}\sin(hx))\mathrm{d}x\right|^2=\left(\int_0^\infty g(x)\sin(hx)\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_0^\infty g(x)\cos(hx)\,\mathrm{d}x\right)^2<\left(\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\Rightarrow\left|\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}hx}\mathrm{d}x\right|<\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x.\quad(44)$$

从而对 $|h|>K$，由(43)，(44)式，关系式 $d+r+p+q=1$，与 $\int_0^\infty v(x)\,\mathrm{e}^{-\int_0^x v(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x=1$ 推出

$$\begin{aligned}\|\Phi D_\gamma\vec{c}\|&=|\lambda d\psi_1c_1+\lambda\psi_2c_2+\lambda\psi_3c_3+r\chi_1\varepsilon_1c_1|+\\&\quad|p\chi_1\varepsilon_1c_1|+|q\chi_1\varepsilon_1c_1|\leqslant\\&\quad\frac{\lambda d}{\sqrt{h^2+\lambda^2}}|c_1|\left|\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\mathrm{i}hx-\int_0^x\mu_1(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\mu_1(x)\mathrm{d}x\right|+\\&\quad\frac{\lambda}{\sqrt{h^2+\lambda^2}}|c_2|\left|\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\mathrm{i}hx-\int_0^x\mu_2(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\mu_2(x)\mathrm{d}x\right|+\\&\quad\frac{\lambda}{\sqrt{h^2+\lambda^2}}|c_3|\left|\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\mathrm{i}hx-\int_0^x\mu_3(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\mu_3(x)\mathrm{d}x\right|+\\&\quad r|c_1|\left|\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\mathrm{i}hx-\int_0^x\mu_1(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\mu_1(x)\,\mathrm{d}x\right|+\\&\quad p|c_1|\left|\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\mathrm{i}hx-\int_0^x\mu_1(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\mu_1(x)\,\mathrm{d}x\right|+\\&\quad q|c_1|\left|\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\mathrm{i}hx-\int_0^x\mu_1(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\mu_1(x)\,\mathrm{d}x\right|<\\&\quad|c_1|(p+q+d+r)\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\int_0^x\mu_1(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\mu_1(x)\,\mathrm{d}x+\\&\quad|c_2|\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\int_0^x\mu_2(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\mu_2(x)\,\mathrm{d}x+\\&\quad|c_3|\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\int_0^x\mu_3(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\mu_3(x)\,\mathrm{d}x=\\&\quad(|c_1|+|c_2|+|c_3|)=\|\vec{c}\|\Rightarrow\end{aligned}$$

$$\|\Phi D_\gamma\|<1.\tag{45}$$

(45)式表明当 $|h|>K$ 时，谱半径 $r(\Phi D_\gamma)\leqslant\|\Phi D_\gamma\|<1$. 这说明当 $|h|>K$ 时，$1\notin\sigma(\Phi D_\gamma)$. 此结果结合引理 6 知，当 $|h|>K$ 时，有 $\gamma=\mathrm{i}h\notin\sigma(A)$，即

$$\begin{cases}\{\mathrm{i}h\,|\,|h|>K\}\subset\rho(A),\\\{\mathrm{i}h\,|\,|h|\leqslant K\}\subset\sigma(A)\cap\mathrm{i}R.\end{cases}\tag{46}$$

另外，由此引理条件和引理 1 知，$T(t)$ 是一个谱界为 0 的正压缩 C_0-半群，从而由文献[12]知，$\sigma(A)\cap\mathrm{i}R$ 是虚加法循环，即

$$\mathrm{i}h\in\sigma(A)\cap\mathrm{i}R\Rightarrow\mathrm{i}hk\in\sigma(A)\cap\mathrm{i}R,k\in\mathbf{N}.$$

上式结合(46)式和引理 1 推出 $\sigma(A)\cap\mathrm{i}R=\{0\}$. 证毕.

当 A 生成一个正压缩 C_0-半群 $T(t)$ 时，引理 1，引理 3，引理 7 正好满足文献[10]中的定理 14 的各个条件，因此这些结论结合到文献[10]中的定理 14 得到本文的主要结论.

定理 1　设 $0<\underline{\mu_i}=\inf\limits_{x\in[0,\infty)}\mu_i(x)\leqslant\sup\limits_{x\in[0,\infty)}\mu_i(x)=\overline{\mu_i}<\infty\ (i=1,2,3)$，并且 A 生成一个正压缩 C_0-半群 $T(t)$，则排队系统(7)的时间依赖解强收敛于该排队系统的稳态解，即

$$\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{P}(\cdot,t)-c\boldsymbol{P}(\cdot)\|=0,$$

其中 $P(x)$ 是引理 1 中得到的特征向量.

3　参考文献

[1]　阿力木·米吉提. 带负顾客的非空竭服务休假排队模型非负解的存在唯一性[J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2014，38(6)：574-577.

[2]　Kleinrock L. Queueing systems I[M]. New York：John Wiley and Sons，1975.

[3]　Takagi H. Queueing analysis：a foundation of performance evaluation，Volume 1：Vacation and Priority Systems，Part 1[M]. Amsterdam：Elsevier Science Publislers B V，1991.

[4]　Madan K C. An M/G/1 queueing system with additional optional service and no waiting capacities[J]. Microelectron Reliab，1994，34(3)：521-527.

[5]　Gross D，Harris C M. The fundamentals of queueing theory[M]. 3 rd Edition. New York：John Wiley and Sons，1998.

[6]　Takacs L. A single server queue with feedback[J]. Bell Syst Tech J，1963，42(2)：505-519.

[7]　Kumar B K，Arivudainambi D. An M/G/1/1 feedback

queue with regular and optional services [J]. Int J Inf Manage Sci,2002,13(2):35-50.

[8] Keilson J,Kooharian A. On time dependent queueing processes [J]. Ann Math Statist,1960,31(1):104-112.

[9] Greiner G. Perturbing the boundary conditions of a generator [J]. Houston J Math,1987,13(2):213-229.

[10] Geni Gupur,Li Xuezhi,Zhu Guangtian. Functional analysis method in queueing theory [M]. Hertfordshire:Research Information Ltd,2001.

[11] Haji A,Radl A. A semigroup approach to queueing systems [J]. Semigroup Forum,2007,75(3):609-623.

[12] Nagel R. One-parameter semigroups of positive operators [M]. Berlin:Springer-Verlag,1987.

[13] 定光桂. 巴拿赫空间引论 [M]. 2 版. 北京:科学出版社,2008.

[14] 阿力木·米吉提,蔡玲霞. 第 2 种服务可选的 M/M/1 排队模型状态空间及对偶空间的完备性 [J]. 新疆师范大学学报:自然科学版,2012,31(2):72-76.

[15] Adams R A. Sobolev space [M]. New York:Academic Press,1975.

The Spectral Properties of the Operator Corresponding to the M/G/1/1 Feedback Queue with Regular and Optional Services

ALIM Mijit

(Xinjiang Radio and TV University,Urumqi Xinjiang 830049,China)

Abstract:Under a certain condition,by studying the spectral properties of the underlying operator which corresponding to the M/G/1/1 feedback queue with regular and optional service,the asymptotic behavior of the time dependent solution of this queueing model has been obtained. First,it is proved that zero is an eigenvalue of the underlying operator with geometric multiplicity one. Next,by studying the expression of the adjoint operator of the underlying operator,it is proved that zero is an eigenvalue of the adjoint operator with geometric multiplicity one. Then,under a certain condition,it has been deduced that all points on the imaginary axis except zero belong to the resolvent set of the underlying operator corresponding to the system model. Thus,under the same condition,by combining the above results,it is obtained that the time-dependent solution of the system model converges strongly to its steady state solution.

Key words:M/G/1/1 feedback queue;regular and optional service;eigenvalue;geometric multiplicity;resolvent set

(责任编辑:王金莲)