

文章编号: 1000-5862(2019)04-0343-05

多辛 sine-Gordon 方程高阶保能量格式

郭钰卓 孙建强* 孔嘉萌

(海南大学理学院 海南 海口 570228)

摘要: 1 维 sine-Gordon 方程通过适当的变换转化成相应多辛 Hamilton 偏微分方程, 其中与时间变量偏导数有关的矩阵是可逆的, 利用 Hamilton 系统的 4 阶平均向量场方法和 Boole 离散线积分方法得到了多辛 sine-Gordon 方程的一个新的 4 阶整体保能量格式. 利用新格式数值模拟 sine-Gordon 方程. 数值结果表明: 新格式能较好地模拟 sine-Gordon 方程在不同初值条件下孤立波的运动, 且保持了孤立波的能量守恒特性.

关键词: 多辛高阶保能量方法; 平均向量场方法; Boole 离散线积分法; sine-Gordon 方程

中图分类号: O 241.5 文献标志码: A DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2019.04.03

0 引言

构造能量守恒格式在数值求解能量守恒微分方程中具有重要的作用. 近年来, O. Gonzalez 等^[1]提出了保 Hamilton 系统能量守恒的离散梯度方法. 文献[2-4]在离散梯度方法的基础上构造了 Hamilton 系统的保能量守恒的平均向量场方法. 文献[5-6]利用离散梯度法和平均向量场方法构造了多辛 Hamilton 偏微分方程的 2 阶和高阶保能量方法. 对于多辛 Hamilton 偏微分方程高阶保能量格式, 由于格式复杂, 通常难以计算. 在多辛 Hamilton 偏微分方程中, 与时间变量偏导数有关的矩阵是可逆的, 相应多辛 Hamilton 偏微分方程实际上可转化成 Hamilton 系统, 利用 Hamilton 系统的 4 阶平均向量场方法, 可得到多辛 Hamilton 偏微分方程的高阶保能量格式. 已应用新的保能量格式于非线性薛定谔方程的计算^[7]. 1 维 sine-Gordon 方程在适当的变换下同样可以转化成多辛 Hamilton 偏微分方程, 其中与时间变量偏导数有关的矩阵是可逆的. 本文利用多辛 Hamilton 偏微分方程的 4 阶整体保能量格式和 Boole 离散线积分方法构造 1 维 sine-Gordon 方程的高阶保能量格式.

本文首先把 sine-Gordon 方程转化成多辛 Hamilton 偏微分方程, 利用多辛 4 阶整体保能量守恒格

式和 Boole 离散线积分法构造 1 维 sine-Gordon 方程的高阶保能量格式, 并证明新格式的精度和保能量守恒特性; 再利用构造的新格式对 sine-Gordon 方程在不同初值条件下进行数值模拟, 分析孤立波的数值行为, 验证格式的保能量守恒特性; 最后得出相应的结论.

1 多辛 sine-Gordon 方程的高阶保能量格式

1 维 sine-Gordon 方程是一类重要的数学物理方程, 具有多个孤立子解和能量守恒特性. sine-Gordon 孤立波方程用来描述流体力学、气象学、场论等领域的物理现象. 考虑如下的 1 维 sine-Gordon 方程

$$u_{tt} - u_{xx} = -\sin u, \quad (1)$$

初始条件为 $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \mathbf{R}$, $t > 0$.

许多学者利用数值方法求解 sine-Gordon 方程. L. Vu-Quoc 等^[8]研究了波动方程能量动量守恒的有限差分格式. R. I. McLachlan 等^[9]利用辛几何算法模拟了波动方程的演化行为. 陈景波等^[10]用多辛拟谱方法构造了 Klein-Gordon 方程的多辛格式. Li Haochen 等^[11]构造了 sine-Gordon 方程的一种新的显式多辛格式.

1 维 sine-Gordon 方程可通过适当的变换转化成多辛 Hamilton 偏微分方程, 其中与时间变量偏导数有关的矩阵是可逆的. 令 $v(x, t) = u_t(x, t)$, $w(x, t) =$

收稿日期: 2019-03-28

基金项目: 国家自然科学基金(11561018)资助项目.

通信作者: 孙建强(1971-), 男, 湖南双峰县人, 教授, 博士, 主要从事微分方程的数值解法的研究. E-mail: sunjq123@qq.com

$$u_x(x, t) - \varphi(x, t) = 0.$$

将方程(1)转化为

$$\begin{cases} -v_t + w_x = \sin u, \\ u_t - \varphi_x = v, \\ \varphi_t - u_x = -w, \\ -w_t + v_x = 0. \end{cases} \quad (2)$$

方程(2)可写成如下的多辛结构形式

$$M_1 Z_{1t} + K_1 Z_{1x} = \overline{\omega}_{Z_1} S_1(Z_1), \quad (3)$$

其中 $Z_1 = (u, v, w, \varphi)^T \in \mathbf{R}^4$, $S_1(Z_1) = v^2/2 - w^2/2 - \cos u$, 矩阵 M_1, K_1 分别为

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 M_1 是可逆矩阵.

用傅里叶谱方法对多辛 sine-Gordon 方程(3)进行空间离散^[10,12], 可转化成为如下方程

$$M_Z \dot{Z} + K D Z = \overline{\omega}_Z S(Z), \quad (4)$$

其中 $Z = (u_1, \mu_2, \dots, \mu_{N_1}, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{N_1}, w_1, w_2, \dots, w_{N_1}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_1})^T$, 矩阵 D 为

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & O & O & O \\ O & D_1 & O & O \\ O & O & D_1 & O \\ O & O & O & D_1 \end{pmatrix},$$

D_1 为相应的 1 阶谱微分矩阵, 其中该矩阵的元素为

$$(D_1)_{k,h} = \begin{cases} \frac{\mu(-1)^{k+h} \cot(\mu(x_k - x_h)/2)}{2}, & k \neq h, \\ 0, & k = h, \end{cases}$$

其中 $\mu = 2\pi/l$, $k, h = 1, \dots, N-1$, N 是一个正偶数, l 是空间积分区间的长度. 矩阵 M 和 K 为反对称矩阵, 且矩阵 M 可逆, 分别为

$$M = \begin{pmatrix} O & -I_1 & O & O \\ I_1 & O & O & O \\ O & O & O & I_1 \\ O & O & -I_1 & O \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} O & O & I_1 & O \\ O & O & O & -I_1 \\ -I_1 & O & O & O \\ O & I_1 & O & O \end{pmatrix},$$

其中 O 是 N_1 阶的零矩阵, I_1 是 N_1 阶的单位矩阵, $S(Z)$ 是如下标量光滑函数

$$S(Z) = \sum_{i=1}^{N_1} (v_i^2/2 - w_i^2/2 - \cos u_i).$$

在这里, 利用 Hamilton 系统 4 阶平均向量场方法对方程(4)进行时间离散, 可得到如下格式:

$$(Z^{n+1} - Z^n)/\tau + (I - \tau^2 J^2/12) M^{-1} K D (Z^{n+1} + Z^n)/2 = (I - \tau^2 J^2/12) M^{-1} \int_0^1 \overline{\omega}_Z S((1-\xi)Z^n + \xi Z^{n+1}) d\xi, \quad (5)$$

其中 $J = M^{-1} T$, $T = \overline{\omega}_{ZZ} S((Z^{n+1} + Z^n)/2) - K D$,

$$\overline{\omega}_{ZZ} S((Z^{n+1} + Z^n)/2) = \begin{pmatrix} T_{uu} & T_{uv} & T_{uw} & T_{u\varphi} \\ T_{vu} & T_{vv} & T_{vw} & T_{v\varphi} \\ T_{wu} & T_{wv} & T_{ww} & T_{w\varphi} \\ T_{\varphi u} & T_{\varphi v} & T_{\varphi w} & T_{\varphi\varphi} \end{pmatrix},$$

$$T_{uu} = \begin{pmatrix} \cos u_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cos u_{N_1} \end{pmatrix},$$

$$T_{vv} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{ww} = - \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{\varphi\varphi} = T_{uv} = T_{uw} = T_{u\varphi} = T_{vw} = T_{v\varphi} = T_{w\varphi} = O.$$

I 是一个 $4N_1$ 阶的单位矩阵, τ 为时间步长.

格式(5)可以转化成如下格式数值计算

$$[I/\tau + (I - \tau^2 J^2/12) M^{-1} K D/2] Z^{n+1} = [I/\tau + (I - \tau^2 J^2/12) M^{-1} K D/2] Z^n + (I - \tau^2 J^2/12) M^{-1} \cdot \int_0^1 \overline{\omega}_Z S((1-\xi)Z^n + \xi Z^{n+1}) d\xi. \quad (6)$$

在格式(6)右边函数 $S(z)$ 中三角函数 $\sin u$ 积分会产生奇异积分, 相应的积分函数为

$$\int_0^1 \sin((1-\xi)u^n + \xi u^{n+1}) d\xi = (\cos u^n - \cos u^{n+1})/(u^{n+1} - u^n).$$

当 u^n 和 u^{n+1} 的值充分接近时, 相应的积分值趋向于无穷大.

为避免格式(6)在数值计算中积分值趋于无穷大的情况, 对格式(6)的积分项采用 Boole 离散线积分法进行逼近^[13-14], 可得到对应于格式(6)的如下

离散线积分格式

$$[I/\tau + (I - \tau^2 J^2/12) M^{-1} KD/2] Z^{n+1} = [I/\tau - (I - \tau^2 J^2/12) M^{-1} KD/2] Z^n + (I - \tau^2 J^2/12) M^{-1} \cdot (7 \bar{\omega}_Z S(Z^n) + 32 \bar{\omega}_Z S((3Z^n + Z^{n+1})/4) + 12 \bar{\omega}_Z S((Z^n + Z^{n+1})/2) + 32 \bar{\omega}_Z S((Z^n + 3Z^{n+1})/4) + 7 \bar{\omega}_Z S(Z^{n+1}))/90. \quad (7)$$

设

$$F(Z^n, Z^{n+1}) = 7 \bar{\omega}_Z S(Z^n) + 32 \bar{\omega}_Z S((3Z^n + Z^{n+1})/4) + 12 \bar{\omega}_Z S((Z^n + Z^{n+1})/2) + 32 \bar{\omega}_Z S((Z^n + 3Z^{n+1})/4) + 7 \bar{\omega}_Z S(Z^{n+1}).$$

格式(7)可简化为

$$[I/\tau + (I - \tau^2 J^2/12) M^{-1} KD/2] Z^{n+1} = [I/\tau - (I - \tau^2 J^2/12) M^{-1} KD/2] Z^n + (I - \tau^2 J^2/12) M^{-1} F(Z^n, Z^{n+1})/90,$$

其中 $F = (F^1 \ F^2 \ F^3 \ F^4)^T$, $F^1 = (F_1^1 \ F_2^1 \ \cdots \ F_{N_1}^1)^T$, $F^2 \ F^3 \ F^4$ 以此类推.

$$F_i^1 = 7 \sin u_i^n + 32 \sin((3u_i^n + u_i^{n+1})/4) + 12 \sin((u_i^n + u_i^{n+1})/2) + 32 \sin((u_i^n + 3u_i^{n+1})/4) + 7 \sin u_i^{n+1},$$

$$F_i^2 = 7v_i^n + 32((3v_i^n + v_i^{n+1})/4) + 12((v_i^n + v_i^{n+1})/2) + 32((v_i^n + 3v_i^{n+1})/4) + 7v_i^{n+1},$$

$$F_i^3 = -7w_i^n - 32((3w_i^n + w_i^{n+1})/4) - 12((w_i^n + w_i^{n+1})/2) - 32((w_i^n + 3w_i^{n+1})/4) - 7w_i^{n+1},$$

$$F_i^4 = 0.$$

sine-Gordon 方程在 $t_n = n\tau$ 时刻相应的离散能量格式为

$$E(Z^n) = \sum_{i=1}^{N_1} ((v_i^n)^2 - (w_i^n)^2 - 2 \cos u_i^n)/2 - Z^T KDZ/2.$$

定理1 新格式(5)在时间方向上具有4阶精度.

证 格式(4)可以写成如下常微分方程组:

$$Z_t = M^{-1} \bar{\omega}_Z (S(Z) - Z^T KDZ/2), \quad (8)$$

其中 M^{-1} 是反对称矩阵,然后把4阶平均向量场格式应用到格式(8),可以得到

$$(Z^{n+1} - Z^n)/\tau = (I - \tau^2 J^2/12) M^{-1} \int_0^1 \bar{\omega}_Z (S((1 - \xi)Z^n + \xi Z^{n+1}) - \hat{Z}^T KD\hat{Z}/2) d\xi, \quad (9)$$

其中 $\hat{Z} = (1 - \xi)Z^n + \xi Z^{n+1}$,显然,格式(9)具有4阶精度,通过计算,格式(9)等价于新格式(5).因此,新格式(5)在时间方向上具有4阶精度.

定理2 新格式(5)具有整体能量守恒特性:

$$E(Z^{n+1}) = E(Z^n),$$

其中 $E(Z) = S(Z) - Z^T KDZ/2$.

证 格式(9)等价于以下形式

$$(Z^{n+1} - Z^n)/\tau = (M^{-1} - \tau^2 J^2 M^{-1}/12) \cdot$$

$$\int_0^1 \bar{\omega}_Z E((1 - \xi)Z^n + \xi Z^{n+1}) d\xi,$$

其中 $J = M^{-1}T$, $T = \bar{\omega}_{ZZ} S((Z^{n+1} + Z^n)/2) - KD$.

根据

$$(E(Z^{n+1}) - E(Z^n))/\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^1 \frac{d}{d\xi} E((1 - \xi)Z^n + \xi Z^{n+1}) d\xi$$

$$= (\int_0^1 \bar{\omega}_Z E((1 - \xi)Z^n + \xi Z^{n+1}) d\xi)^T (Z^{n+1} - Z^n)/\tau = (\int_0^1 \bar{\omega}_Z E((1 - \xi)Z^n + \xi Z^{n+1}) d\xi)^T (M^{-1} -$$

$$\tau^2 J^2 M^{-1}/12) \int_0^1 \bar{\omega}_Z E((1 - \xi)Z^n + \xi Z^{n+1}) d\xi = 0,$$

其中 $M^{-1} - \tau^2 J^2 M^{-1}/12$ 是反对称方阵,可以得到 $E(Z^{n+1}) = E(Z^n)$ 新格式(5)具有整体能量守恒特性.

2 数值模拟

应用新的4阶保能量格式(7)对 sine-Gordon 方程(1)进行数值模拟.为了分析格式的保能量守恒特性,令相对能量误差为

$$e(t) = |(E(Z^n) - E(Z^0))/E(Z^0)|,$$

其中 $E(Z^0)$ 表示在 $t = 0$ 时刻的初始能量, $E(Z^n)$ 表示在 $t = n\tau$ 时刻的离散能量.

例1 研究双刃孤立波的情况.设 sine-Gordon 方程(1)的精确解为

$$u(x, t) = 4 \arctan\left(\frac{1}{c} \sin\left(\frac{ct}{\sqrt{1+c^2}}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{x}{\sqrt{1+c^2}}\right)\right), \quad -\infty < x < +\infty.$$

对 t 和 x 求偏导数并令 $t = 0$ 可得到初始条件,选择循环边界条件 $u(-10, t) = u(10, t)$,取空间步长 $h = 0.5$,时间步长 $\tau = 0.05$.

图1表示新格式的双刃孤立波在 $t \in [0, 20]$ 内的数值解,可以看出双刃孤立波的数值解波形光滑,较平稳地随时间进行传播,新格式可较好地模拟双刃孤立波的演化行为.图2表示多辛 sine-Gordon 方程双刃孤立波数值解的相对能量误差随时间的变化,误差为 10^{-14} ,达到机器精度,可忽略不计.这表明新格式可较好地模拟多辛 sine-Gordon 方程中双

刃孤立波的演化行为,并精确地保持方程离散能量守恒特性.

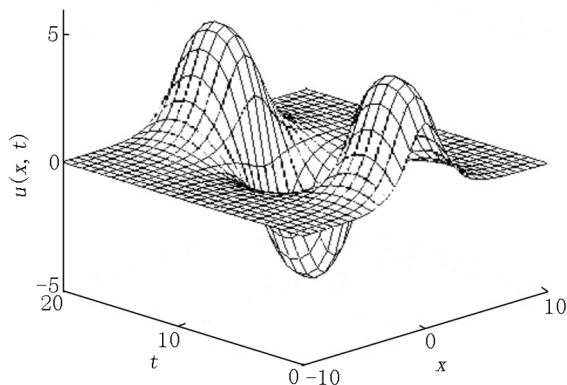


图1 双刃孤立波在 $t \in [0, 20]$ 内的数值解

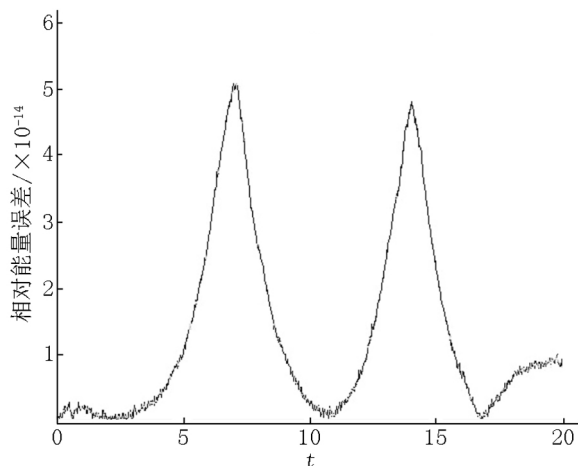


图2 双刃孤立波在 $t \in [0, 20]$ 内的相对能量误差

例2 研究纽结和反纽结孤立波的情况. 设 sine-Gordon 方程(1) 的精确解为

$$u(x, t) = 4\arctan[\exp((x + x_0 - \beta t) / \sqrt{1 - \beta^2})] + 4\arctan[\exp((-x + x_0 - \beta t) / \sqrt{1 - \beta^2})],$$

初始条件由对 t 和 x 求偏导数并令 $t = 0$ 得到, 选择循环边界条件 $u(-30, t) = u(30, t)$, 取空间步长 $h = 0.2$, 时间步长 $\tau = 0.02$, $x_0 = 10$ 和 $\beta = 0.5$.

图3 表示新的高阶保能量格式的纽结和反纽结孤立波在 $t \in [0, 90]$ 内的数值解, 可以看出: 纽结和反纽结孤立波的数值解波形光滑, 较平稳地随时间进行传播. 新的高阶保能量格式可以较好地模拟纽结和反纽结孤立波的碰撞行为. 图4 表示多辛 sine-Gordon 方程纽结和反纽结孤立波数值解的相对能量误差随时间的变化, 误差为 10^{-13} , 也达到了机器精度, 可忽略不计. 这表明新的高阶保能量格式可以较好地模拟多辛 sine-Gordon 方程中纽结和反纽结孤立波的碰撞行为, 并精确地保持方程的离散能量守恒特性.

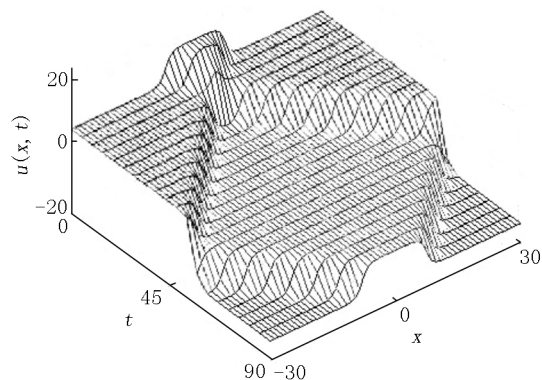


图3 纽结和反纽结孤立波在 $t \in [0, 90]$ 内的数值解

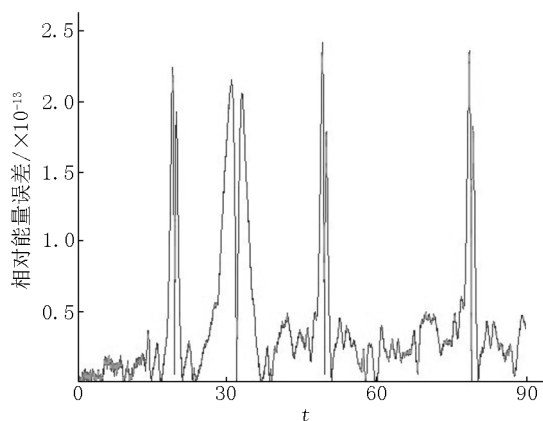


图4 纽结和反纽结孤立波在 $t \in [0, 90]$ 内的相对能量误差

3 结论

本文把 1 维 sine-Gordon 方程通过适当的变换转化成多辛 Hamilton 偏微分方程, 利用 Hamilton 系统的 4 阶平均向量场方法和 Boole 离散线积分方法得到了多辛 sine-Gordon 方程的一个新的 4 阶整体保能量格式, 并数值求解 1 维 sine-Gordon 方程. 数值结果表明新格式能很好模拟 sine-Gordon 方程孤立波的运动和保能量守恒特性. 本文进一步表明对于一些特定能量守恒的偏微分方程, 通过适当的变换可转化成特定的多辛 Hamilton 偏微分方程, 利用 Hamilton 系统的高阶保能量方法, 可构造多辛 Hamilton 偏微分方程的高阶保能量格式.

4 参考文献

- [1] Gonzalez O. Time integration and discrete Hamiltonian systems [J]. Nonlinear Sci, 1996, 6(5): 449-467.
- [2] Celledoni E, McLachlan R I, McLaren D I, et al. Energy-preserving Runge-Kutta methods [J]. Math Model Numer Anal, 2009, 43(4): 645-649.
- [3] McLachlan R I, Quispel G R W, Robidoux N. Geometric integration using discrete gradients [J]. Phil Trans R Soc

- Lond A ,1999 ,357(1754) : 1021-1045.
- [4] Quispel G R W ,McLaren D I. A new class of energy-preserving numerical integration methods [J]. J Phy A: Math Theor 2008 ,41(4) : 045206.
- [5] Yang Yanhong ,Wang Yushun ,Song Yongzhong. A new local energy-preserving algorithm for the BBM equation [J]. Applied Mathematics and Computation ,2018 ,324: 119-130.
- [6] Gong Yuezheng ,Cai Jiaxiang ,Wang Yushun. Some new structure-preserving algorithms for general multi-symplectic formulations of Hamiltonian PDEs [J]. Journal of Computational Physics 2014 ,279: 80-102.
- [7] 袁春晓. 多辛结构偏微分方程保能量方法 [D]. 海口: 海南大学 2019.
- [8] Vu-Quoc L ,Li Shaofan. Invariant-conserving finite difference algorithms for the nonlinear Klein-Gordon equation [J]. Compt Methods Appl Mech Eng ,1993 ,107(3) : 341-391.
- [9] McLachlan R I. Symplectic integration of Hamiltonian wave equations [J]. Numer Math ,1993 ,66(1) : 465-492.
- [10] Chen Jingbo. Symplectic and multisymplectic Fourier pseudospectral discretizations for the Klein-Gordon equation [J]. Lett Math Phys 2006 ,75(3) : 293-305.
- [11] Li Haochen ,Sun Jianqiang ,Qin Mengzhao. New explicit multi-symplectic scheme for nonlinear wave equation [J]. Appl Math Mech: English Edition 2014 ,35(3) : 369-380.
- [12] Wang Jian. A note on multisymplectic Fourier pseudospectral discretization for the nonlinear Schrödinger equation [J]. Appl Math Comput 2007 ,191(1) : 31-41.
- [13] Iavernaro F ,Pace B. s -stage trapezoidal methods for the conservation of Hamiltonian functions of polynomial type [J]. AIP Conf Proc 2007 ,936(1) : 603-606.
- [14] Brugnano L ,Iavernaro F. Line integral methods and their application to the numerical solution of conservative problems [R]. Beijing: Chinese Academy of Sciences 2013.

The High Order Energy-Preserving Scheme of Multi-Symplectic sine-Gordon Equation

GUO Yuzhuo ,SUN Jianqiang* ,KONG Jiameng

(School of Science ,Hainan University ,Haikou Hainan 570228 ,China)

Abstract: One dimension sine-Gordon equation is transformed into the multi-symplectic Hamiltonian partial differential equation through appropriate transformation ,where the matrix with the time variable partial derivation is inverse. A new fourth-order energy-preserving scheme of multi-symplectic sine-Gordon equation is obtained by the fourth order average vector field method of the Hamiltonian system and the Boole discrete line integral method. The new scheme is applied to simulate sine-Gordon equation. Numerical results show that the new scheme can well simulate the solitary wave behaviors of sine-Gordon equation with different initial conditions ,moreover preserve the energy conservation property of the solitary waves.

Key words: multi-symplectic high order energy-preserving method; average vector field method; Boole discrete line integral method; sine-Gordon equation

(责任编辑: 曾剑锋)