

文章编号: 1000-5862(2020) 06-0599-05

2 维 Gross-Pitaevskii 方程的分裂高阶紧致差分格式

贺增甲¹ 孔令华^{1*} 符芳芳²

(1. 江西师范大学数学与统计学院, 江西 南昌 330022; 2. 南昌工学院基础部, 江西 南昌 330108)

摘要: 该文为带有旋转角动量的 Gross-Pitaevskii 方程构造了分裂高阶紧致差分格式. 首先通过时间分裂将其分为线性方程和非线性方程. 非线性方程可以通过质量守恒定律进行精确求解. 线性方程通过高阶紧致格式和局部 1 维方法进行离散. 最终得到的格式时间方向 2 阶收敛和空间方向 4 阶收敛, 并保持质量守恒. 最后用数值算例验证了格式的收敛阶以及质量守恒性.

关键词: Gross-Pitaevskii 方程; 旋转效应; 分裂方法; 高阶紧致格式; 质量守恒

中图分类号: O 241. 8 文献标志码: A DOI: 10. 16357/j. cnki. issn1000-5862. 2020. 06. 09

0 引言

20 世纪 20 年代, 萨特延德拉·纳特·玻色和阿尔伯特·爱因斯坦预言了一种新的物态即 Bose-Einstein condensate(BEC) 的存在, 直到 1995 年, 人们才在碱金属原子稀薄气体中真正获得了 BEC^[1-2]. Bose-Einstein 碱原子与氢的缩合反应已在实验室中进行了广泛研究, 使人们对宏观量子世界有了新的认识. 在温度 T 远小于临界冷凝温度 $T_c = -273. 15\text{ }^\circ\text{C}$ 的情况下, 根据平均场理论, 旋转框架下的 BEC 可以用带有旋转效应的 Gross-Pitaevskii (GP) 方程来模拟. 具体形式如下:

$$i\eta\partial_t\psi(x,t)/\partial t = (-\eta^2\nabla^2/(2m) + V_d(x) + NU_0|\psi|^2 - \Omega L_z)\psi(x,t), \quad x \in \mathbf{R}^2, t > 0,$$

其中 m 为原子的质量, η 为普朗克常数, N 为凝聚态中的原子数, $V_d(x)$ 是与外部势阱相对应的一个实值函数, Ω 是旋转激光束的角速度, U_0 表现为旋转 BEC 中粒子之间的相互作用, L_z 是角动量在 z 轴方向上的分量, 其定义为 $L_z = -i(x\partial_y - y\partial_x)$.

为了方便起见, 将上述 GP 方程做无量纲化处理, 得到如下无量纲形式 2 维 GP 方程

$$i\partial_t\psi = (-\nabla^2/2 + V(x) + \beta|\psi|^2 - \Omega L_z)\psi, \quad x \in U \subset \mathbf{R}^2, t > 0, \quad (1)$$

其中 β 为无量纲实数, $x = (x, y)$, $V(x) = (r_x^2x^2 + r_y^2y^2)/2$, r_x, r_y 为频率常数.

在本文中, 考虑齐次 Dirichlet 边界条件

$$\psi(x,t) = 0, \quad x \in \partial U, t \geq 0, \quad (2)$$

同时给出初值

$$\psi(x,0) = \psi_0(x), \quad x \in U, \quad (3)$$

通过计算, 初边值问题(1) ~ (3) 保持质量守恒

$$Q(\psi(\cdot,t)) = \int_U |\psi(x,t)|^2 dx \equiv Q(\psi(\cdot,0)) =$$

$$Q_0, t \geq 0$$

和能量守恒

$$E(\psi(\cdot,t)) = \int_U (|\nabla\psi|^2/2 + V(x)|\psi|^2 +$$

$$\beta|\psi|^4/2 - \Omega\bar{\psi}L_z\psi) dx \equiv E_0, t \geq 0,$$

其中 \bar{f} 表示函数 f 的共轭.

在过去十几年中, 一些学者对无旋 GP 方程($\Omega = 0$) 进行了研究, 构造了一些数值方法. 如 Bao Weizhu 等^[3] 构造了 4 阶时间分裂正弦或傅里叶的拟谱方法. 符芳芳等^[4] 构造了其辛格式, 因为是全隐格式从而计算效率不高. 对于计算无旋 BEC 问题的动力学行为, 他们能够较为准确地模拟且非常有效. 对于带旋的 GP 方程, 由于旋转角动量显式含有空间变量, 导致在数值求解时存在一些困难. Wang Lan 等^[5] 讨论了其保持能量结构特征的保能量式, 但是这种数值方法计算效率不高, 难以用于求解大区域细网格上较为准确的数值解. 分裂步方法的基本思想是把原问题分解成若干个更容易求解的子问题, 通过适当的组合方式, 得到原问题的近似问题. 通过近似问题来得到原问题的近似解^[6-7]. 同时, 为了提高空间方向的离散精度, 又不增加太大的计算

收稿日期: 2020-08-11

基金项目: 国家自然科学基金(11961036) 和江西省教育厅基金(GJJ200310) 资助项目.

通信作者: 孔令华(1977-), 男, 江西石城人, 教授, 博士, 博士生导师, 主要从事微分方程数值方法的研究. E-mail: konglh@mail. ustc. edu. cn

复杂度,充分利用节点信息,高阶紧致方法比通常有限差分法能够更精确、更高效地模拟微分方程,对于具有一定光滑性的问题,经常采用高阶紧致方法^[8-11].

为此,本文将对带有旋转效应的 GP 方程构造出一种时间分裂高阶紧致差分格式,在时间上运用分裂方法^[3,12]把复杂问题分解成由线性方程和非线性方程组成的更为简单的问题.对于非线性方程可以精确求解,不存在离散误差,而对于线性问题使用局部 1 维法以及高阶紧致格式进行求解^[2,8,11].该数值格式在时间方向上达到 2 阶精度,在空间方向上达到 4 阶精度,并保持质量守恒且无条件稳定.

1 高阶紧致格式

首先回顾 1 阶导数 $f_j' = \frac{d}{dx} f(x) \Big|_{x=x_j}$ 高阶紧致方

法的构造.对于 1 阶导数,假设有离散形式^[5,10]: $\alpha f_{j-1}' + f_j' + \alpha f_{j+1}' = a(f_{j+1} - f_{j-1}) / (2h)$, 其中 α, a 为待定系数.将以上各点的导数值或者函数值在 x_j 处泰勒展开,并根据误差阶合并同类项,得到系数满足的线性代数方程组 $a = 1 + 2\alpha, a = 6\alpha$, 解得 $\alpha = 1/4, a = 3/2$. 则 1 阶导数的 4 阶格式能够整理为

$$(f_{j-1}' + 4f_j' + f_{j+1}') / 6 = (f_{j+1} - f_{j-1}) / (2h),$$

因此 1 阶导数在齐次边界条件下的逼近能用矩阵表示为 $Af' = Bf$, 其中

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{2h} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

同理 2 阶导数 $f_j'' = \frac{d^2}{dx^2} f(x) \Big|_{x=x_j}$ 能够离散^[11]

为 $\beta f_{j-1}'' + f_j'' + \beta f_{j+1}'' = b(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}) / h^2$, 其中 β, b 为待定系数.通过泰勒展开舍去高阶项得到系数关系满足的方程组 $b = 1 + 2\beta, b = 12\beta$, 解得 $\beta = 1/10, b = 6/5$. 因此 2 阶导数的 4 阶格式能够写成 $(f_{j-1}'' + 10f_j'' + f_{j+1}'') / 12 = (f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}) / h^2$, 则 2 阶导数在齐次边界条件下的逼近能用矩阵表示为 $Cf'' = Df$, 其中

$$C = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 10 & 1 & & & \\ 1 & 10 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 10 & 1 \\ & & & 1 & 10 \end{pmatrix},$$

$$D = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

引理 1^[5] 设 A, C, D 是同阶循环矩阵, 则他们满足以下性质:

- (i) $CD = DC$ 且 A^{-1}, C^{-1} 和 CD 也为循环矩阵;
- (ii) 对于 A, C, D 存在唯一对称正定矩阵 R_1, R_2, R_3 使得 $A = R_1^{-1}, C = R_2^{-1}, D = R_3^{-1}$.

2 分裂高阶紧致格式

本节将采用时间分裂技巧、局部 1 维方法、高阶紧致格式等数值方法为 2 维 GP 方程构造出一个时间方向 2 阶精度、空间方向 4 阶精度且无条件稳定的数值格式.为此,首先对时空区域 $[x_L, x_R] \times [y_L, y_R] \times [0, T]$ 进行网格剖分,并给出本文常用的定义及符号.用网格 $[x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}] \times [t_n, t_{n+1}]$ 将区域进行剖分,将 x 方向分成 J 等份, y 方向分成 K 等份, 时间方向分成 N 等份, $h_x = (x_R - x_L) / J, h_y = (y_R - y_L) / K, \tau = T / N$, 则 $x_j = x_L + jh_x, y_k = y_L + kh_y, t_n = n\tau, j = 0, 1, 2, \dots, J, k = 0, 1, 2, \dots, K, n = 0, 1, 2, \dots, N$; 用 $\Psi_{jk}^n = \psi(x_j, y_k, t_n)$ 和 $\psi_{jk}^n \approx \psi(x_j, y_k, t_n)$ 分别表示方程的精确解和数值解.为了表述方便, 本文采用以下差分符号:

$$\delta_x \psi_{jk}^n = (\psi_{j+1,k}^n - \psi_{j,k}^n) / h_x, \delta_{\bar{x}} \psi_{jk}^n = (\psi_{j,k}^n - \psi_{j-1,k}^n) / h_x, \delta_y \psi_{jk}^n = (\psi_{j,k+1}^n - \psi_{j,k}^n) / h_y, \delta_{\bar{y}} \psi_{jk}^n = (\psi_{j,k}^n - \psi_{j,k-1}^n) / h_y, \delta_x^2 \psi_{jk}^n = \delta_x \delta_{\bar{x}} \psi_{jk}^n, \delta_y^2 \psi_{jk}^n = \delta_y \delta_{\bar{y}} \psi_{jk}^n, \delta_{2x} \psi_{jk}^n = (\psi_{j+2,k}^n - \psi_{j-2,k}^n) / (2h_x), \delta_{2y} \psi_{jk}^n = (\psi_{j,k+2}^n - \psi_{j,k-2}^n) / (2h_y).$$

为构造 2 维 GP 方程的分裂步高阶紧致格式, 先将方程(1) 分裂为如下形式:

$$i\psi_t = -(\psi_{xx} + \psi_{yy}) / 2, \quad (4)$$

$$i\psi_t = iQ(x\partial_y - y\partial_x)\psi, \quad (5)$$

$$i\psi_t = V(x)\psi + \beta|\psi|^2\psi. \quad (6)$$

对于分裂后的子问题(6) 满足点点的质量守恒律, 即 $\forall x, t$,

$$|\psi(x, t)|^2 = |\psi(x, t_n)|^2.$$

事实上, 在子问题(6) 的两边同乘以 $\bar{\psi}$ 得

$$i\psi\partial_t\psi(x, t) = V(x)|\psi(x, t)|^2 + \beta|\psi(x, t)|^4.$$

对上式两端取虚部得 $d|\psi(x,t)|^2/dt = 0$.

将其代入(6)式中有

$$i\partial_t \psi(x,t) = (V(x) + \beta |\psi(x,t_n)|^2) \psi(x,t). \quad (7)$$

再对(7)式从 t_n 到 t_{n+1} 上积分可得

$$\psi(x, t_{n+1}) = e^{-i\tau(V(x) + \beta |\psi(x, t_n)|^2)} \psi(x, t_n).$$

即得出了非线性子问题(6)的精确解.

对分裂后的 GP 方程(4)~(6)通过 Strang 组合为时间 2 阶精度的格式,再运用局部 1 维法和高阶紧致法离散为

$$\begin{cases} i \frac{\psi_{jk}^{(1)} - \psi_{jk}^{(n)}}{\tau} = -\frac{1}{4} C_{xx}^{-1} \delta_x^2 \frac{\psi_{jk}^{(1)} + \psi_{jk}^{(n)}}{2}, \\ i \frac{\psi_{jk}^{(2)} - \psi_{jk}^{(1)}}{\tau} = -\frac{1}{4} C_{yy}^{-1} \delta_y^2 \frac{\psi_{jk}^{(2)} + \psi_{jk}^{(1)}}{2}, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \frac{\psi_{jk}^{(3)} - \psi_{jk}^{(2)}}{\tau} = \frac{\Omega}{2} x_j A_{2y}^{-1} \delta_{2y} \frac{\psi_{jk}^{(3)} + \psi_{jk}^{(2)}}{2}, \\ \frac{\psi_{jk}^{(4)} - \psi_{jk}^{(3)}}{\tau} = -\frac{\Omega}{2} y_k A_{2x}^{-1} \delta_{2x} \frac{\psi_{jk}^{(4)} + \psi_{jk}^{(3)}}{2}, \end{cases} \quad (9)$$

$$\psi_{jk}^{(5)} = \psi_{jk}^{(4)} e^{-i\tau(V(x_j, y_k) + \beta |\psi_{jk}^{(4)}|^2)}, \quad (10)$$

$$\begin{cases} \frac{\psi_{jk}^{(6)} - \psi_{jk}^{(5)}}{\tau} = \frac{\Omega}{2} x_j A_{2y}^{-1} \delta_{2y} \frac{\psi_{jk}^{(6)} + \psi_{jk}^{(5)}}{2}, \\ \frac{\psi_{jk}^{(7)} - \psi_{jk}^{(6)}}{\tau} = -\frac{\Omega}{2} y_k A_{2x}^{-1} \delta_{2x} \frac{\psi_{jk}^{(7)} + \psi_{jk}^{(6)}}{2}, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} i \frac{\psi_{jk}^{(8)} - \psi_{jk}^{(7)}}{\tau} = -\frac{1}{4} C_{xx}^{-1} \delta_x^2 \frac{\psi_{jk}^{(8)} + \psi_{jk}^{(7)}}{2}, \\ i \frac{\psi_{jk}^{(n+1)} - \psi_{jk}^{(8)}}{\tau} = -\frac{1}{4} C_{yy}^{-1} \delta_y^2 \frac{\psi_{jk}^{(n+1)} + \psi_{jk}^{(8)}}{2}. \end{cases} \quad (12)$$

因此对于分裂高阶紧致差分格式(8)~(12),在每个时间步上仅需求解一些线性方程组,易知此格式在空间方向上具有 4 阶收敛精度,在时间方向上具有 2 阶收敛精度.在实际计算中比其他进行非线性迭代的方法成本更低,下面给出离散形式下的质量守恒.

引理 2^[6] 对于任意的正整数 $p(\geq 1)$ 以及序列 $\{a_k\}_{k=0}^p, \{b_k\}_{k=0}^p$ 有

$$\sum_{k=1}^p a_k \delta_x b_k = a_p b_p - a_1 b_0 - \sum_{k=1}^{p-1} \delta_x a_k b_k,$$

特别地当 $a_0 = a_p, b_0 = b_p$ 时有 $\sum_{k=1}^p a_k \delta_x b_k = -\sum_{k=0}^{p-1} \delta_x a_k b_k$.

定理 1 定义 $\|\psi^n\| = \sqrt{h_x h_y \sum_{j=1}^{J-1} \sum_{k=1}^{K-1} |\psi_{jk}^n|^2}$,

则分裂高阶紧致差分格式(8)~(12)满足离散的质量守恒,即 $\|\psi^{n+1}\| = \|\psi^n\| = \cdots = \|\psi^0\|$.

证 将(8)式中的第 1 式与 $\psi^{(1)} + \psi^n$ 做内积

$$\frac{i}{\tau} \langle \psi^{(1)} - \psi^n, \psi^{(1)} + \psi^n \rangle = -\frac{1}{8} \langle C_{xx}^{-1} \delta_x^2 (\psi^{(1)} + \psi^n), \psi^{(1)} + \psi^n \rangle, \quad (13)$$

根据引理 1 和引理 2 得

$$\langle C_{xx}^{-1} \delta_x^2 (\psi^{(1)} + \psi^n), \psi^{(1)} + \psi^n \rangle = -\langle R_2 \delta_x (\psi^{(1)} + \psi^n), R_2 \delta_x (\psi^{(1)} + \psi^n) \rangle,$$

此式为实数.从而对(13)式两边取虚部有 $\|\psi^{(1)}\| = \|\psi^n\|$.

将(9)式中的第 1 式与 $\psi^{(3)} + \psi^{(2)}$ 作内积

$$\frac{1}{\tau} \langle \psi^{(3)} - \psi^{(2)}, \psi^{(3)} + \psi^{(2)} \rangle = \frac{\Omega}{4} \langle x A_{2y}^{-1} \delta_{2y} (\psi^{(3)} + \psi^{(2)}), \psi^{(3)} + \psi^{(2)} \rangle, \quad (14)$$

根据引理 1 和引理 2 得

$$\langle A_{2y}^{-1} \delta_{2y} (\psi^{(3)} + \psi^{(2)}), \psi^{(3)} + \psi^{(2)} \rangle = -\langle R_1 (\psi^{(3)} + \psi^{(2)}), R_1 \delta_{2y} (\psi^{(3)} + \psi^{(2)}) \rangle,$$

则对(14)式两边取实部有 $\|\psi^{(3)}\| = \|\psi^{(2)}\|$.

对于(10)式,两边取范数显然 $\|\psi^{(5)}\| = \|\psi^{(4)}\|$.同理可证, $\|\psi^{(2)}\| = \|\psi^{(1)}\|, \|\psi^{(4)}\| = \|\psi^{(3)}\|, \|\psi^{(6)}\| = \|\psi^{(5)}\|, \|\psi^{(7)}\| = \|\psi^{(6)}\|, \|\psi^{(8)}\| = \|\psi^{(7)}\|, \|\psi^{n+1}\| = \|\psi^{(8)}\|$.

因此有 $\|\psi^{n+1}\| = \|\psi^n\|$.定理 1 得证.

3 数值实验

本节主要通过数值实验来检验所构造出的时间分裂高阶紧致格式的有效性,并且给出一些数值结果.通过表格及生成的图像直观地展示格式的收敛阶及离散的质量守恒.

取 $U = [-8, 8] \times [-8, 8]$ 在方程(1)中取势函数 $V(x) = (x^2 + y^2)/2, \beta = 10$.取初值 $\psi_0(x) = 2(x + iy) e^{-(x^2 + y^2)}/\sqrt{\pi}$.

由于方程的复杂性,因此不能给出其精确解的解析表达式.为便于分析比较,取非常精细的网格和较小的时间步长,如 $h_x = h_y = 1/64, \tau = 0.001$.本文构造的分裂高阶紧致格式(8)~(12)计算得到的数值解作为“精确解”.令 $e(h, \tau)$ 表示在网格长度 h 和时间步长 τ 下误差的无穷范数 $\|e^n\|_\infty$.格式的收敛阶用如下公式进行计算:

$$\rho_1 = \frac{\ln(e(h_1, \tau)/e(h_2, \tau))}{\ln(h_1/h_2)}, \quad \rho_2 = \frac{\ln(e(h, \tau_1)/e(h, \tau_2))}{\ln(\tau_1/\tau_2)}.$$

下面考察分裂高阶紧致格式(8)~(12)时间和空间方向的误差和收敛阶.为了计算空间方向的收敛阶,选取不同的空间步长 h ,并固定足够小的时间步长 $\tau = 0.001$ 来得出相对于空间离散产生的误差,由时间离散产生的误差可以忽略不计.同理,为了计算时间方向的收敛阶,选取不同的时间步长 τ ,并选取足够小的空间步长 $h_x = h_y = 1/64$ 来得出相对于时间离散产生的误差,由空间离散产生的误差可以忽略不计.以上计算都取时间 $t = 0.5$.由表 1~表 2 可以看出,分裂高阶紧致格式(8)~(12)在时间方向上具有 2 阶收敛速度,在空间方向上具有 4 阶收敛速度.

表 1 当 $\tau = 0.001$ 时, 空间方向的收敛速度和误差

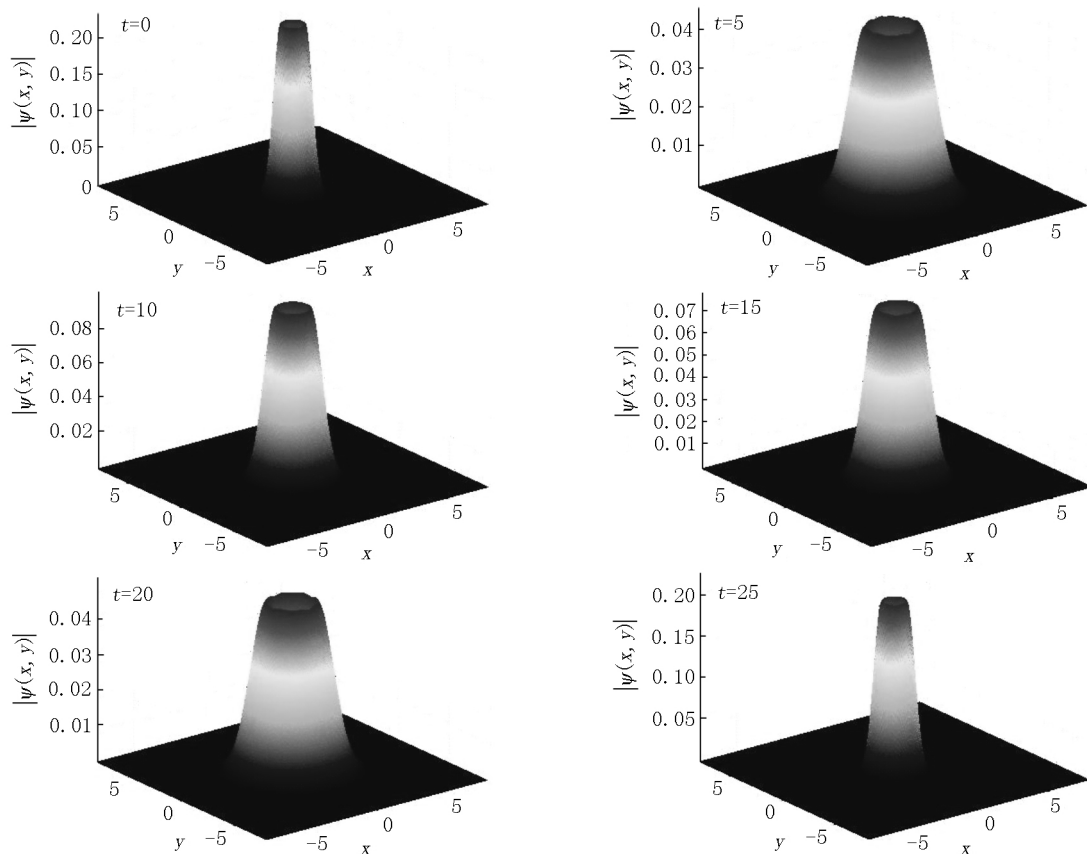
Ω	h	2 范数		无穷范数	
		$\ e^n\ _2$	ρ_1	$\ e^n\ _\infty$	ρ_1
0	1/4	5.6139×10^{-3}		1.4175×10^{-3}	
	1/8	3.3307×10^{-4}	4.075	8.4808×10^{-5}	4.063
	1/16	2.0257×10^{-5}	4.039	5.1171×10^{-6}	4.051
	1/32	1.1847×10^{-6}	4.096	2.9932×10^{-7}	4.096
0.1	1/4	5.5721×10^{-3}		1.4086×10^{-3}	
	1/8	3.3090×10^{-4}	4.074	8.4222×10^{-5}	4.064
	1/16	2.0129×10^{-5}	4.039	5.0862×10^{-6}	4.050
	1/32	1.1772×10^{-6}	4.096	2.9755×10^{-7}	4.095

表 2 当 $h_x = h_y = 1/64$ 时, 时间方向的收敛速度和误差

Ω	τ	2 范数		无穷范数	
		$\ e^n\ _2$	ρ_2	$\ e^n\ _\infty$	ρ_2
0	1/32	1.6588×10^{-3}		4.1264×10^{-4}	
	1/64	4.1379×10^{-4}	2.003	1.0064×10^{-4}	2.040
	1/128	1.0212×10^{-4}	2.019	2.4699×10^{-5}	2.027
	1/256	2.4251×10^{-5}	2.074	5.8570×10^{-6}	2.076
0.1	1/32	1.6598×10^{-3}		4.1432×10^{-4}	
	1/64	4.4194×10^{-4}	2.000	1.0135×10^{-4}	2.030
	1/128	1.0319×10^{-4}	2.008	2.5039×10^{-5}	2.017
	1/256	2.5066×10^{-5}	2.041	6.0072×10^{-6}	2.059

下面讨论 2 维 GP 方程 (1) 所描述的 Gaussian 脉冲随时间的演化关系, 同时考虑格式对质量的保持情况. 用分裂高阶紧致格式 (8) ~ (12) 在 $h_x = h_y =$

1/32, $\tau = 0.01$ 下模拟此问题. 数值解在 $t = 0, 5, 10, 15, 20, 25$ 时的波形图如图 1 所示. 图 2 描述了质量的误差随时间的演化关系.

图 1 数值解 $|\psi_{jk}|$ 在不同时刻下的波形

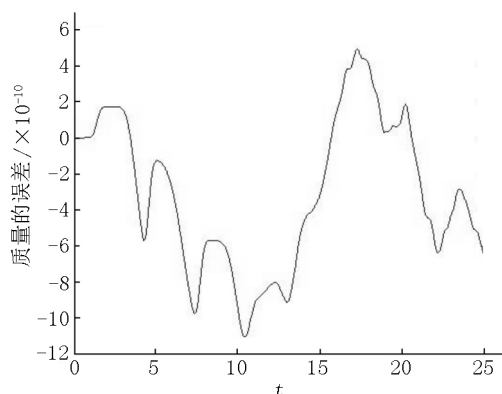


图2 离散质量的误差随时间的演化关系

由图1可以观察到 Gaussian 脉冲的波形和振幅随时间呈周期性变化,而由图2可以看出格式保持系统的质量不变。

4 结论

对于带有旋转角动量作用的 GP 方程,为克服高维、非线性在数值模拟中带来的困难和不足,采用分裂技术,把原问题分解成若干个易于计算的局部1维的子问题和可以精确求解的子问题。为提高计算效率采用高精度且计算复杂度较低的高阶紧致方法对空间导数进行离散。通过理论推导可知这样构造的数值格式能够保持原问题的质量守恒,使得数值计算更加稳定高效。数值实验表明所构造的数值格式具有高精度高效率的优点,同时能够在较长时间内模拟原问题所描述的物理现象。本文所构造的数值方法可以直接扩展到其他类型微分方程的数值求解,如3维 GP 方程、多维 Maxwell 方程等。

5 参考文献

[1] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, et al. Obser-

vation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor [J]. Science, 1995, 269(5221): 198-201.

[2] Davis K B, Mewes M O, Andrews M R, et al. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms [J]. Phys Rev Lett, 1995, 75(22): 3969-3973.

[3] Bao Weizhu, Jaksch D, Markowich P A. Numerical solution of the Gross-Pitaevskii equation for Bose-Einstein condensation [J]. J Comput Phys, 2003, 187(1): 318-342.

[4] 符芳芳,周媛兰. 2 维 Gross-Pitaevskii 方程的辛格式 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2016, 40(6): 599-602.

[5] Wang Lan, Cai Wenjun, Wang Yushun. An energy-preserving scheme for the coupled Gross-Pitaevskii equations [J]. Adv Appl Math Mech, 2021, 13(1): 203-231.

[6] Kong Linghua, Hong Yuqi, Tian Nana, et al. Stable and efficient numerical schemes for two-dimensional Maxwell equations in lossy medium [J]. J Comput Phys, 2019, 397: 108703.

[7] Wang Hanquan. A time-splitting spectral method for coupled Gross-Pitaevskii equations with applications to rotating Bose-Einstein condensates [J]. J Comput Appl Math, 2007, 205(1): 88-104.

[8] 陈萌,孔令华,王兰. Burgers 方程的跳点紧致格式 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2017, 41(5): 526-530.

[9] 翟步祥,聂涛,薛翔. 5 次非线性 Schrödinger 方程的一个线性化 4 层紧致差分格式 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2019, 43(1): 35-38.

[10] Li Jichun, Chen Yitong, Liu Guoqing. High order compact ADI methods for the parabolic equations [J]. Comput Math Appl, 2006, 52(8/9): 1343-1356.

[11] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like solution [J]. J Comput Phys, 1992, 103(1): 16-42.

[12] 孔令华,田娜娜,张鹏. 2 维 Maxwell 方程的局部 1 维高阶紧致格式 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2019, 43(1): 31-34.

[13] Bao Weizhu, Cai Yongyong. Optimal error estimates of finite difference methods for the Gross-Pitaevskii equation with angular momentum rotation [J]. Math Comp, 2013, 82: 99-128.

The Splitting High-Order Compact Difference Scheme for Two-Dimensional Gross-Pitaevskii Equation

HE Zengjia¹, KONG Linghua^{1*}, FU Fangfang²

(1. School of Mathematics and Statistics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China;

2. Department of Fundamental Education, Nanchang Institute of Science and Technology, Nanchang Jiangxi 330108, China)

Abstract: The splitting high-order compact difference scheme for the Gross-Pitaevskii equation with angular momentum rotation term is constructed. Firstly, the equation is divided into linear equations and nonlinear equations by time splitting method. Secondly, the nonlinear equations can be accurately solved by the conservation law of mass, and the linear equation is discretized by a high-order compact scheme and a local one-dimensional method. The resulting scheme converges second-order in time and fourth-order in space while maintaining mass conservation. Finally, numerical experiments verify the convergence orders and mass conservation of the scheme.

Key words: Gross-Pitaevskii equation; rotating effect; splitting method; high-order compact scheme; mass conservation law

(责任编辑: 曾剑锋)