

文章编号: 1000-5862(2020)06-0614-07

基于快速分数阶 Fourier 变换的期权定价 ——以上证 50ETF 期权为例

姚艾嘉¹ 张艳慧^{1*} 李明阳² 康蕊¹

(1. 北京工商大学数学与统计学院, 北京 100048; 2. 英国诺丁汉大学数学科学学院统计系, 诺丁汉 NG8 1AF)

摘要: 受美国股市熔断影响, 近期中国欧式期权波动剧烈, 从而对其定价问题产生一定挑战. 基于 VG 过程刻画上证 50ETF 期权标的资产对数价格变化情况, 对美国股市熔断前后各 9 支期权数据, 采用快速分数阶 Fourier 变换进行期权定价研究, 并与实际价格进行对比. 实证分析表明: 在美国股市熔断期间标的资产价格波动相对剧烈时 VG 过程依然拟合较好, 用快速分数阶 Fourier 变换数值方法具有一定优势.

关键词: 方差伽玛过程; 期权定价; 快速分数阶 Fourier 变换

中图分类号: F 224.0 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2020.06.12

0 引言

由于受到美国股市熔断的影响, 近期中国股市波动较大, 股价一度出现跳崖式下跌, 因而中国期权市场也受到一定的影响. 在标的资产剧烈波动的情况下, 如何确定这些日趋复杂期权的价值, 就成为一个具有挑战性的问题.

近年来, 学者们发现 VG 模型比 BS 模型有较高的拟合度, 能更好地模拟股票价格收益率的动态过程. 奚炜^[1]采用香港期货交易所的恒生指数期权数据对 VG 模型的定价性能进行实证检验, 发现在波动率微笑等定价偏差的纠错方面 VG 模型是 BS 模型的一种比较理想的改进. 刘国光等^[2]运用 VG 模型对沪深股市股指收益分布特征和国际上其他主要股市股指收益分布特征拟合分析, 发现在拟合收益分布方面 VG 模型的拟合度远远高出正态分布假设的拟合度. 刘志东等^[3]通过选取恒生指数、上证指数、标准普尔 500 指数数据进行研究, 发现以 VG 模型为代表的无限跳跃 Lévy 过程更符合金融资产价格的实际情况. 翁伟皓^[4]采用香港期货交易所的恒生指数期权数据进行实证研究, 得出 VG 模型比 BS 模型在执行价格较高时更接近期权市场价的结论.

VG 模型参数较多, 包含跳跃行为等潜在变量,

增加了计算复杂性, 且 VG 模型的密度函数没有解析式, 但其特征函数的解析式存在. Fourier 变换从 VG 模型的特征函数得到相应欧式期权的理论值, 是一个有效的方法. 对于复杂的积分方程的求解问题, 运用快速 Fourier 变换方法的速率高于数值积分法多倍^[5-8]. J. L. Kyriakos^[9]将快速分数阶 Fourier 方法用于期权定价. 宫晓莉等^[10]利用基于特征函数的快速分数阶 Fourier 方法和随机波动率模型对恒生指数期权数据进行期权定价. 方民等^[11]使用快速分数阶 Fourier 变换数值方法对 VG 模型下的豆粕期权进行定价研究, 结果表明 VG 模型定价相对准确.

本文基于 VG 模型选取美国股市熔断前后上证 50ETF 购 2020 年 11 月 9 支期权合约和上证 50ETF 购 2020 年 4 月 9 支期权合约的日数据, 采用快速分数阶 Fourier 变换方法进行实证分析, 并与实际期权价格对比.

1 模型简介

假设标的资产价格服从几何布朗运动, 即标的资产对数价格服从布朗运动, BS 欧式看涨期权定价公式^[12]为

$$c = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (1)$$

其中 $d_1 = (\ln(S/N) + (r + \sigma^2/2)(T - t)) /$

收稿日期: 2020-08-18

基金项目: 国家自然科学基金(11971042)和北京市自然科学基金(1182008)资助项目.

通信作者: 张艳慧(1975-), 女, 河北承德人, 教授, 博士, 主要从事金融统计、函数论的位势理论研究. E-mail: zhangyanhui@th.btbu.edu.cn

$$(\sigma \sqrt{T-t}); d_2 = (\ln(S/N) + (r - \sigma^2/2)(T-t)) / (\sigma \sqrt{T-t}) = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}.$$

风险中性测度下期权定价公式^[13]为

$$C(S_0, K, T) = e^{-rT} E^Q((S_T - K)^+) = e^{-rT} \int_K^{+\infty} (S_T - K) q_T(S_T) dS_T. \quad (2)$$

对(2)式化简得

$$C_T(k) = e^{-rT} E^Q((e^x - e^k)^+) = e^{-rT} \int_k^{+\infty} (e^x - e^k) q_T(x) dx, \quad (3)$$

其中 $C(S_0, K, T)$ 为欧式看涨期权的期权价格; T 为到期时间; S_T 为到期日标的资产价格; K 为执行价格; $q_T(\cdot)$ 为密度函数; $k = \ln K, x = \ln S_T$.

加入调整变量 α 使(3)式可积, 记 $C_T(k) = e^{\alpha k} C_T(k)$ 作 Fourier 变换^[13]

$$\varphi_T(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuk} C_T(k) dk = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuk} \int_k^{+\infty} (e^x - e^k) q_T(x) dx dk. \quad (4)$$

对(4)式化简得

$$\varphi_T(u) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} q_T(x) \frac{e^{(\alpha+iu+1)x}}{(\alpha+iu)(\alpha+iu+1)} dx. \quad (5)$$

风险中性概率测度 Q 下 x 的特征函数^[13]为

$$\Phi_T(u) = E^Q(e^{iux}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} q_T(x) dx, \quad (6)$$

其中 $\Phi_T(u)$ 由 S_T 所服从的具体过程决定, 本文选用 VG 过程.

由(5)式和(6)式得

$$\varphi_T(u) = e^{-rT} \Phi_T(u - i(\alpha+1)) / ((\alpha+iu)(\alpha+iu+1)). \quad (7)$$

对 $\varphi_T(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuk} C_T(k) dk$ 作 Fourier 逆变换得

$$C_T(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuk} \varphi_T(u) du = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-iuk} \varphi_T(u) du. \quad (8)$$

由(7)式和(8)式得

$$C_T(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-iuk} \frac{e^{-rT} \Phi_T(u - (\alpha+1)i)}{(\alpha+iu)(\alpha+iu+1)} du, \quad (9)$$

其中 $\alpha > 0$ 通过 $E^Q(S_T^{1+\alpha}) < \infty$ 确定.

下面推导 VG 过程下标的资产对数价格的特征函数 $\Phi_T(u)$. 设 $X_t(\sigma, \theta, \nu)$ 为 VG 过程 $t \geq 0$ 有

$$X_t = \theta G_t + \sigma W_{G_t}, \quad (10)$$

其中 θ 为漂移率, σ 为波动率, $G_t = \gamma(t; 1, \nu)$ 是均值为 1、方差为 ν 的伽玛过程, $W = W_t(t \geq 0)$ 是基本布朗运动^[14].

由(10)式得到 VG 过程的密度函数为

$$f_{X_t}(X) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi g}} e^{-(X-\theta g)^2/(2\sigma^2 g)} (g^{1/g-1} e^{-g/\nu}) / (v^{1/v} \Gamma(t/v)) dg. \quad (11)$$

由(6)式和(11)式, 得到 VG 过程的特征函数为

$$\Phi_{X_t}(u) = E(e^{iuX_t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuX} f_{X_t}(X) dX = \exp(i\theta ut) \cdot (1/(1-i\theta v u + \sigma^2 u^2 v/2))^{1/v}. \quad (12)$$

为保证无套利空间, 必须选择变量 w 使得价格贴现过程是一个鞅, 基于 Girsanov 定理, 采用均值校正鞅测度方法进行均值校正, 即 $w = -\ln(\Phi(-i))$.

因此, 对于 VG 过程有

$$w = (\ln(1 - \theta v - \sigma^2 v/2)) / v. \quad (13)$$

由(12)式和(13)式得

$$\Phi_{X_T}(u) = \exp(iu(\ln(1 - \theta v - \sigma^2 v/2)) / v) T) \cdot (1/(1 - i\theta v u + \sigma^2 u^2 v/2))^{1/v}. \quad (14)$$

又因为风险中性测度下基于 VG 过程的标的资产对数价格的特征函数^[13]为

$$\Phi_T(u) = \exp(iu(\ln S_0 + Tr)) \Phi_{X_T}(u), \quad (15)$$

由(14)式和(15)式得

$$\Phi_T(u) = \exp(iu(\ln S_0 + T(r + (\ln(1 - \theta v - \sigma^2 v/2)) / v))) (1/(1 - i\theta v u + \sigma^2 u^2 v/2))^{T/v}. \quad (16)$$

快速分数阶 Fourier 变换是一种求和的有效方法且其计算公式为

$$F_{RFFT}(h, p) = \sum_{j=0}^{N-1} h_j e^{-ijm2\pi/N}, \quad m = 1, 2, \dots, N,$$

其中 N 是 2 的幂.

采用 Trapezoidal 规则将(9)式离散化^[9]为

$$C_T(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} h_j e^{-iuk}.$$

$$\frac{e^{-rT} \Phi_T(u_j - (\alpha+1)i)}{(\alpha+iu_j)(\alpha+iu_j+1)} \eta_j \delta, \quad (17)$$

其中 $u_j = j\delta$, 区间间隔 δ 必须充分小; 权重

$$\eta_j = \begin{cases} 1/2, & j = 0 \text{ 或者 } N-1, \\ 1, & j = 1, 2, \dots, N-2. \end{cases}$$

在采用快速分数阶 Fourier 变换方法时,

$$h_j = e^{ij\delta k_0} \frac{e^{-rT} \Phi_T(j\delta - (\alpha+1)i)}{(\alpha+ij\delta)(\alpha+ij\delta+1)} \delta, \quad p = \lambda\delta/(2\pi).$$

要求^[9]

$$\left| \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-rT} \Phi_T(N\delta - (\alpha+1)i)}{(\alpha+iN\delta)(\alpha+iN\delta+1)} \right) \right| \leq \left| \left(\frac{e^{-rT} \Phi_T(N\delta - (\alpha+1)i)}{(\alpha+iN\delta)(\alpha+iN\delta+1)} \right) \right|, \\ \left| \operatorname{Im} \left(\frac{e^{-rT} \Phi_T(N\delta - (\alpha+1)i)}{(\alpha+iN\delta)(\alpha+iN\delta+1)} \right) \right| \leq$$

$$\left| \left(\frac{e^{-rT} \Phi_T(N\delta - (\alpha + 1)i)}{(\alpha + iN\delta)(\alpha + iN\delta + 1)} \right) \right|.$$

基于上式的条件选择 N 和 δ 进而确定阶次 p .

2 实证分析

2.1 数据分析

本文选取 2019 年美股熔断前的上证 50ETF 购 11 月 2 800(10 001 961) 50ETF 购 11 月 2850(10 001 962), 50ETF 购 11 月 2 900(10 001 963) 50ETF 购 11 月 2 950(10 001 964) 50ETF 购 11 月 3 000(10 001 965), 50ETF 购 11 月 3 100(10 001 966) 50ETF 购 11 月 3 200(10 001 967) 50ETF 购 11 月 3 300(10 001 968), 50ETF 购 11 月 3 400(10 001 969) 共 9 支期权合约数据作为非熔断期间样本; 选取 2019 年美股熔断期间上证 50ETF 购 4 月 2 700(10 002 333) 50ETF 购 4 月 2 750(10 002 334) 50ETF 购 4 月 2 800(10 002 335), 50ETF 购 4 月 2 850(10 002 336) 50ETF 购 4 月 2 900(10 002 337) 50ETF 购 4 月 2 950(10 002 338), 50ETF 购 4 月 3 000(10 002 339) 50ETF 购 4 月 3 100(10 002 340) 50ETF 购 4 月 3 200(10 002 341) 共 9 支期权合约数据作为熔断期间样本. 美股非熔断期间的样本与熔断期间的样本均采用开盘价作为期权价格. 上证 50ETF 购 11 月 9 支期权合约的执行价分别为 2.800 0、2.850 0、2.900 0、2.950 0、3.000 0、3.100 0、3.200 0、3.300 0、3.400 0, 其挂牌日期均为 2019 年 9 月 26 日, 行权日即到期日为 2019 年 11 月 27 日, 共有交易日 40 天. 上证 50ETF 购 4 月 9 支期权合约的执行价分别为 2.700 0、2.750 0、2.800 0、2.850 0、2.900 0、2.950 0、3.000 0、3.100 0、3.200 0, 其挂牌日期均为 2020 年 2 月 27 日, 行权日即到期日

为 2020 年 4 月 22 日, 共有交易日 40 d. 将期权价格数据分为样本内(首个交易日)和样本外(除首个交易日外交易日)2 个阶段. 样本内期权价格数据用于模型风险中性参数校准, 样本外期权价格数据用于模型定价表现的评价. 期权价格数据来源于大智慧软件.

图 1 为 2019 年 9 月 26 日~2020 年 4 月 2 日之间的上证 50ETF(510 050) 5 min 高频价格时序图、收益率时序图和成交量时序图. 通过价格时序图(见图 1(a)) 可以看出受新冠疫情和美股熔断影响, 上证 50ETF 价格由原来的在 2.9~3.1 之间小幅变动变为在 2.5~3.0 之间大幅震荡. 2020 年 1 月下旬和 3 月中旬更是出现 2 次跳崖式下跌, 尤其是受 3 月中旬美股熔断影响一度下跌到 2.514. 由收益率时序图(见图 1(b)) 可以看出受新冠疫情和美股熔断影响, 上证 50ETF 收益率在无疫情、美股非熔断期间的波动较为平稳, 在疫情和美股熔断期间的波动剧烈, 并出现数次明显跳跃. 由成交量时序图(见图 1(c)) 可以看出受新冠疫情和美股熔断的影响, 上证 50ETF 的成交量由原来的 1 000 000 以内变为突破 1 000 000, 其中出现突破 2 000 000, 美股熔断期间更是数次突破 1 000 000. 受新冠疫情和美股熔断影响股价下跌程度剧烈, 许多市场投资者或选择及时止损或选择重仓抄底, 波动程度越大, 虽然风险越大, 但收益同样也会越大, 因此成交量反而突破新高. 考虑到美股熔断期间的资产价格发生的剧烈波动对期权定价的影响, 本文选用美股熔断前与美股熔断期间 2 个时间段各 9 支欧式期权合约进行实证分析, 对比不同波动程度下 BS 公式期权定价和 VG 模型的 Fourier 变换期权定价的有效性.

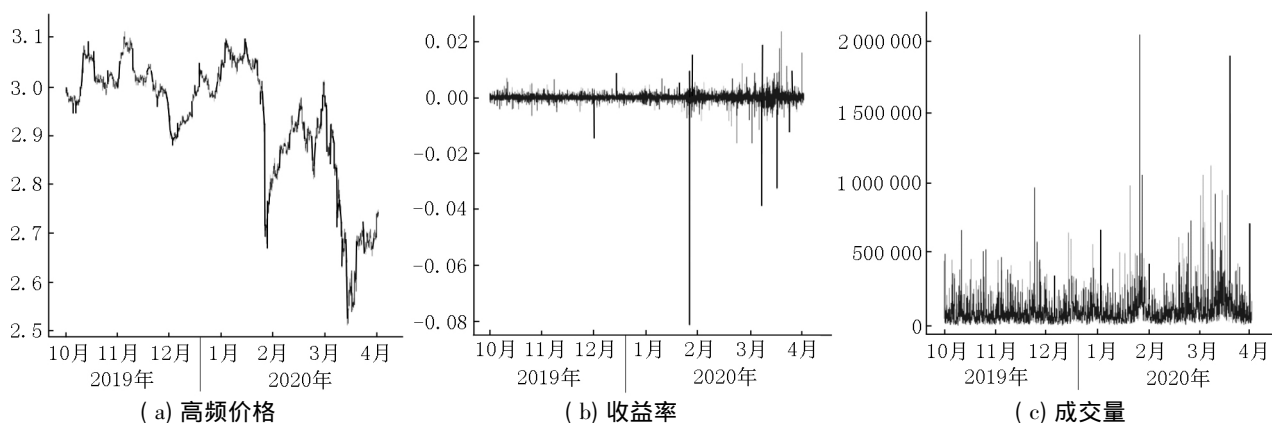


图 1 上证 50ETF 的 5 min 时序图

本文利用 VG 过程来描述上证 50ETF 的动态性. 为了说明其合理性, 采用从 2019 年 9 月 26 日 ~ 2020 年 4 月 2 日、2019 年 9 月 26 日 ~ 2019 年 11 月 19 日和 2020 年 2 月 27 日 ~ 2020 年 4 月 2 日的上

证 50ETF 的 5 min 高频价格序列, 将其转换成对数收益率序列. 表 1 给出了上证 50ETF 收益率的描述性统计量.

表 1 不同时间段标的资产收益率的描述性统计量

时间段	最大值	最小值	均值	标准差	偏度	峰度	J-B 统计量	P 值
美股熔断前后	0.056 95	-0.101 2	-0.000 8	0.015 1	-2.526 2	16.200 6	69 999 000	$<2.2e-16$
美股熔断前	0.002 36	-0.004 1	-0.000 2	0.001 1	-1.327 4	5.007 2	2 830.9	$<2.2e-16$
美股熔断期间	0.004 01	-0.001 0	0.000 4	0.000 9	2.469 5	10.138 3	166 920	$<2.2e-16$

从表 1 的偏度和峰度可以看到, 整个时间段内其经验分布存在明显的左偏和尖峰的特征; 美股熔断前其经验分布存在左偏和尖峰的特征; 美股熔断期间其经验分布存在明显的右偏和尖峰的特征. 通过 Jarque-Bera 统计量和 P 值表明无论美股熔断前后都不服从正态分布.

图 2 和图 3 给出了美股熔断前后上证 50ETF 的 5 min 高频价格序列收益率经验密度及 $Q-Q$ 图.

从图 2 和图 3 中可以看到, 2 个时间段上证 50ETF 收益率序列在抽样阶段内展现明显的波动率时变性、聚集性以及典型的尖峰、厚尾特征, 特别是美股熔断期间上证 50ETF 收益率经验密度相比于正态分布出现明显的尖峰, 相比于美股熔断前更不符合正态分布. 为更好地拟合数据和揭示价格过程的实质, 本文考虑用 VG 过程解释尖峰、厚尾现象, 即通过 VG 模型进行期权定价.

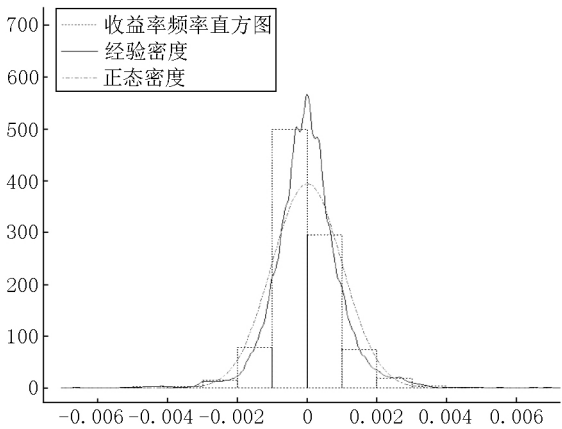


图 2 上证 50ETF 购 2019 年 11 月期权标的资产的收益率经验密度图和 $Q-Q$ 图

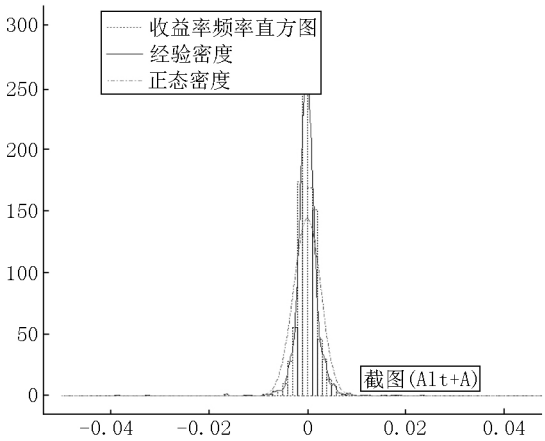
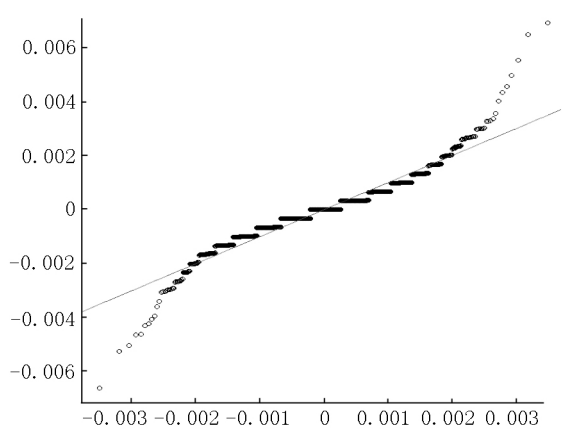
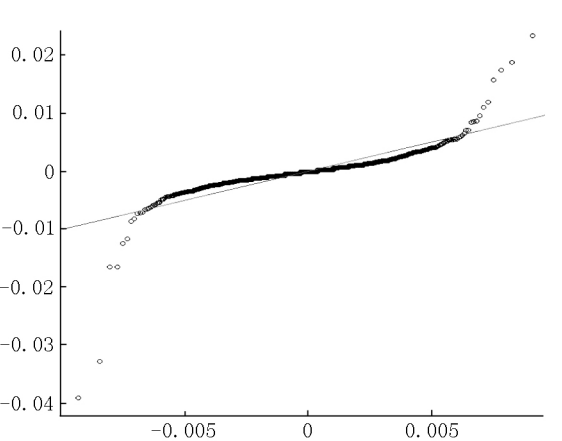


图 3 上证 50ETF 购 2020 年 4 月期权标的资产的收益率经验密度图和 $Q-Q$ 图



2.2 参数估计

VG 模型包含参数 $S_0, K, T, r, \sigma, \alpha, \theta, \nu$, 其中 S_0, k, T 可由样本数据直接获得; r 为市场无风险利率, 采用上海银行间同业拆放利率 (SHIBOR), 选择交易日的每日 SHIBOR 取平均值 (数据来源于 SHIBOR 网站 www.shibor.org) 作为市场无风险利率 r 的估计值 $r=0.022\ 740$. 上证 50ETF 收益率的无条件年波动率用 T. G. Andersen^[15] 提出的计算方法, 美股熔断前后波动率分别为 $1.310\ 7\% \times \sqrt{250} \approx 20.723\ 81\%$ (收益率标准差乘以根号下 250), 即 $\sigma_1=0.207\ 238\ 1; 1.3957\% \times \sqrt{250} \approx 22.067\ 95\%$, 即 $\sigma_2=0.220\ 679\ 5$, 其中 σ_1 为上证 50ETF 购 2019 年 11 月期权模型中的参数; σ_2 为上证 50ETF 购 2020 年 4 月期权模型中的参数. α 为控制参数, 由 $E^Q(S_T^{1+\alpha}) < \infty$, 取 $\alpha=2.5$. θ, ν 的估计采用矩估计方法, VG 模型的矩形式如表 2 所示.

表 2 VG 模型对应的矩

矩关系	VG 模型
均值	θ
方差	$\sigma^2 + \theta^2 \nu$
偏度	$\theta \nu (3\sigma^2 + 2\theta^2 \nu) / (\sigma^2 + \theta^2 \nu)^{3/2}$

得到初始参数 $\theta_1 = -0.008\ 3, \nu_1 = 0.144\ 1$; $\theta_2 = -0.046\ 7, \nu_2 = 0.098\ 5$, 其中 θ, ν_1 为上证 50ETF 购 2019 年 11 月期权 VG 模型中的参数; θ_2, ν_2 为上证 50ETF 购 2020 年 4 月期权 VG 模型中的参数. 通过样本内定价数据进行参数修正, 得到 $\theta_1^* = -0.0259, \nu_1^* = 0.1716; \theta_2^* = -0.0440,$

$\nu_2^* = 0.056\ 2$, 其中 θ_1^*, ν_1^* 为上证 50ETF 购 2019 年 11 月期权 VG 模型中的修正参数; θ_2^*, ν_2^* 为上证 50ETF 购 2020 年 4 月期权 VG 模型中的修正参数. 此外, 快速分数阶 Fourier 变换数值方法中的参数 N 取 1 024.

2.3 实证结果

通过 RStudio 软件将 (1) 式、(16) 式和 (17) 式进行编程, 并带入样本内数据、参数, 得到 BS 模型和 VG 模型的样本内期权定价. 为了考察样本内期权定价表现, 通过绝对均方根定价误差 (R_{MSE_a}) 和相对均方根定价误差 (R_{MSE_r}) 进行表示. R_{MSE_a} 和 R_{MSE_r} 分别定义为

$$R_{MSE_a} = \left(\frac{1}{J} \sum_{i=1}^J (C_j^{mod} - C_j^{mkt})^2 \right)^{1/2},$$

$$R_{MSE_r} = \left(\frac{1}{J} \sum_{i=1}^J ((C_j^{mod} - C_j^{mkt}) / C_j^{mkt})^2 \right)^{1/2},$$

其中 C_j^{mod} 是期权模型价格; C_j^{mkt} 是期权观测的市场价格. 从表 3 可以看到, 美股熔断前 9 支期权 BS 模型定价的 R_{MSE_a} 为 0.010 144 21, R_{MSE_r} 为 0.261 896 95; VG 模型定价的 R_{MSE_a} 为 0.010 481 28, 与 BS 模型的 R_{MSE_a} 值比较接近, R_{MSE_r} 为 0.163 675 70, 小于 BS 模型 R_{MSE_r} 值. 美股熔断期间 9 支期权 BS 模型定价的 R_{MSE_a} 为 0.007 381 03, R_{MSE_r} 为 0.169 569 53; VG 模型定价的 R_{MSE_a} 为 0.001 965 454, R_{MSE_r} 为 0.041 681 735, 均小于 BS 模型对应的均方根定价误差. 可以看到, 美股熔断前 VG 模型相比 BS 模型具有一定优势; 美股熔断期间 VG 模型相比 BS 模型具有更精确与稳定的样本内期权定价表现.

表 3 上证 50ETF 期权合约 R_{MSE} 结果

样本时间	BS 模型		VG 模型	
	R_{MSE_a}	R_{MSE_r}	R_{MSE_a}	R_{MSE_r}
美股熔断前	0.010 144 21	0.261 896 95	0.010 481 28	0.163 675 70
美股熔断期间	0.007 381 03	0.169 569 53	0.001 965 45	0.041 681 74

本文结合 RStudio 软件, 将满足表 3 时得到的参数, 采用快速分数阶 Fourier 变换数值方法求解模型, 得到美股熔断前后不同 50ETF 期权合约定价结果, 并与 BS 模型、实际市场收盘价作对比, 部分结果如表 4 和表 5 所示.

由表 4 可知, 对于美股熔断前的期权合约, 除上

证 50ETF 购 2019 年 11 月 2950 期权外其余 8 支期权用 VG 模型比用 BS 模型更接近期权实际价格, VG 模型相较于 BS 模型拟合得更好. 这说明在美股熔断前, 大多数情况下 VG 模型相较于 BS 模型更适用于我国欧式期权市场, 同时也验证了快速分数阶 Fourier 变换数值方法的有效性.

表 4 美股熔断前 9 支上证 50ETF 看涨期权合约 BS 模型和 VG 模型定价结果

交割行权价	期权价格	BS 模型价格	VG 模型价格
2 700	0.221 3	0.225 927 7	0.221 314 9
2 750	0.175 5	0.187 515 0	0.179 401 5
2 800	0.141 2	0.152 741 1	0.149 170 1
2 850	0.108 0	0.121 976 3	0.116 093 3
2 900	0.083 5	0.095 418 0	0.093 615 4
2 950	0.061 1	0.073 068 3	0.074 671 1
3 000	0.030 0	0.040 128 3	0.038 316 7
3 100	0.014 3	0.020 170 1	0.017 388 8
3 200	0.006 2	0.009 284 6	0.005 625 2

表 5 美股熔断期间 9 支上证 50ETF 看涨期权合约 BS 模型和 VG 模型定价结果

交割行权价	期权价格	BS 模型价格	VG 模型价格
2 700	0.200 2	0.195 437 3	0.197 240 0
2 750	0.162 7	0.160 881 4	0.158 901 4
2 800	0.127 4	0.130 136 7	0.124 134 6
2 850	0.098 2	0.103 374 0	0.100 326 1
2 900	0.077 6	0.080 598 0	0.074 820 5
2 950	0.057 8	0.061 659 7	0.058 180 8
3 000	0.045 0	0.046 276 1	0.044 655 4
3 100	0.019 8	0.024 606 8	0.023 665 3
3 200	0.010 2	0.005 552 1	0.012 970 3

由表 5 可知,对于美股熔断期间的期权合约,上证 50ETF 购 2020 年 4 月 9 支期权均用 VG 模型比用 BS 模型更接近期权实际价格,VG 模型相较于 BS 模型拟合得更好,这说明在美股熔断带来的剧烈波动下,VG 模型相较于 BS 模型更适用于中国欧式期权市场。

3 结论

本文综合考虑标的资产波动的尖峰厚尾性和跳跃性,基于不同的期权定价模型对上证 50ETF 看涨期权进行实证分析。研究结果有助于完善欧式期权市场价格发现功能,提升定价能力。结果显示:

- 1) 上证 50ETF 期权的对数收益率波动均存在明显的尖峰厚尾特征,时变波动率不服从正态分布;
- 2) 基于方差伽玛过程的 VG 模型对美股熔断前和熔断期间的上证 50ETF 期权的模拟效果优于基于布朗运动的 BS 模型;
- 3) 当欧式期权标的资产价格遵循 VG 过程时,采用快速分数阶 Fourier 变换方法对期权价格的估

算与预测能力较强。

本文只考察了不同的模型对上证 50ETF 看涨期权的定价效果,没有对看跌期权的情况进行研究,实证中也没有详细探讨交易费用、标的资产持有成本等因素对定价模型的影响。

针对未来中国欧式期权的发展,本文得出以下启示:

- 1) 欧式期权标的资产存在着非正态的波动特征。在欧式期权定价理论中,应着重研究标的资产的波动特征,以便更好地刻画和掌握中国欧式期权运行规律、价格波动规律及其对经济的影响机制与程度。深入研究标的资产价格波动的时变性、集聚性和跳跃性等非正态的波动特征,可以有效地提高中国欧式期权的定价精度。
- 2) 快速分数阶 Fourier 变换方法在基于 VG 模型的上证 50ETF 期权定价中得到较好的定价精度和拟合效率。VG 模型充分发挥了跳过程的优点,VG 模型适合于标的资产跳跃次数较多的期权,如本文中的上证 50ETF 看涨期权;由于 VG 模型包含参数较多、公式较复杂,快速分数阶 Fourier 变换方法能很好地计算处于实值状态与平价状态的期权价格,对处于虚值状态的期权价格的估算结果也在可接受范围内,故能得到较为理想的数值解。
- 3) 中国欧式期权的定价机制还有待进一步完善。欧式期权是中国期权市场中重要的期权产品,也是一种基础的期权产品,其价格波动与市场环境、国家政策、国际贸易关系及突发情况等息息相关。期权的交易活动较为复杂,隐含了市场噪音、投资者情绪和宏观政策等多种随机因素。进一步研究期权交易成本、交易目的及持有成本等因素,可为提高中国欧式期权市场的有效性提供更多理论支撑。

4 参考文献

[1] 奚炜. Variance Gamma 过程与股票期权定价中的波动率偏度的纠正 [J]. 系统工程, 2003, 21(1): 29-32.

[2] 刘国光, 王慧敏. 基于纯粹跳跃利维过程的中外股票收益分布特征研究 [J]. 数理统计与管理, 2006, 25(1): 43-46.

[3] 刘志东, 陈晓静. 无限活动纯跳跃 Lévy 金融资产价格

- 模型及其 CF-CGMM 参数估计与应用 [J]. 系统管理学报 2010 ,19(4) : 428-438 ,450.
- [4] 翁伟皓. 基于傅里叶变换法的欧式期权定价 [D]. 上海: 上海交通大学 2011.
- [5] Zhang Sumei ,Wang Lihe. Fast Fourier transform option pricing with stochastic interest rate ,stochastic volatility and double jumps [J]. Applied Mathematics and Computation 2013 ,219(23) : 10928-10933.
- [6] Kirkby J L. Efficient option pricing by frame duality with the fast Fourier transform [J]. Social Science Electronic Publishing 2014 ,6(1) : 713-747.
- [7] Xiao Shuang ,Ma Shihua ,Li Guo ,et al. European option pricing with a fast Fourier transform algorithm for big data analysis [J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics , 2017 ,12(3) : 1219-1231.
- [8] Ackerer D ,Filipovic D. Option pricing with orthogonal polynomial expansions [J]. Mathematical Finance 2020 ,30(1) : 47-84.
- [9] Chourdakis K. Option pricing using the fractional FFT [J]. Journal of Computational Finance 2005 ,8(2) : 1-18.
- [10] 宫晓莉 ,庄新田. 调和稳定 Lévy 过程驱动的双重跳跃模型及期权应用 [J]. 系统管理学报 ,2017 ,26(6) : 1089-1096.
- [11] 方民 张秋兰. 我国豆粕期货期权定价分析: 基于分数快速傅立叶变换 [J]. 时代经贸 2018(23) : 53-54.
- [12] Black F ,Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities [J]. Journal of Political Economy ,1973 ,81(3) : 637-659.
- [13] Carr P ,Madan D. Option valuation using the fast fourier transform [J]. Journal of Computational Finance ,1999 ,2(4) : 61-73.
- [14] Madan D B ,Carr P ,Chang E. The variance gamma process and options pricing [J]. European Finance Review ,1998 ,2(1) : 79-105.
- [15] Andersen T G ,Bollerslev T ,Diebold F X ,et al. The distribution of realized stock return volatility [J]. Journal of Financial Economics 2001 ,61(1) : 43-76.
- [9] Chourdakis K. Option pricing using the fractional FFT

The Option Pricing Based on Fast Fractional Fourier Transform

——Take 50ETF Options in Shanghai Stock Exchange as An Example

YAO Aijia¹ ,ZHANG Yanhui^{1*} ,LI Mingyang² ,KANG Rui¹

(1. School of Mathematics and Statistics ,Beijing Technology and Business University ,Beijing 100048 ,China;

2. Department of Statistics ,School of Mathematics Science ,University of Nottingham ,Nottingham ,NG8 1AF ,The United Kingdom)

Abstract: European option pricing under fast fractional Fourier transform is affected by the circuit breakers in the US stock market ,and European option pricing in China fluctuates dramatically recently ,which poses a certain challenge to its pricing problem. Based on the VG process ,the logarithm price changes of the underlying assets of the 50ETF options in Shanghai Stock Exchange are described. The option pricing is studied by using fast fractional Fourier transform on the data of nine options before and after the circuit breaker in the US stock market ,and compared with the actual prices. The empirical analysis shows that the VG process still fits well when the underlying asset price fluctuations are relatively severe during the US stock circuit breaker ,and the numerical method using fast fractional Fourier transform has certain advantages.

Key words: VG process; option pricing; fractional fast Fourier transform

(责任编辑: 曾剑锋)