第 45 卷 第 2 期　　江西师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 45 No. 2
2021 年 3 月　　Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)　　Mar. 2021

文章编号:1000-5862(2021)02-0194-04

数论函数方程 $k\varphi(Y)=\varphi_2(Y)+S(Y^8)$ 的解

张四保,姜莲霞

(喀什大学数学与统计学院,新疆 喀什　844008)

摘要: 该文讨论了包含 $\varphi(n)$、$\varphi_e(n)$ 与 $S(n)$ 3 个数论函数的方程 $k\varphi(Y)=\varphi_2(Y)+S(Y^8)$ 的可解性. 利用这 3 个数论函数的性质,得到了该方程只在 $k=1、2、4、5、9、11$ 时有正整数解,并给出了其具体的正整数解,其中函数 $\varphi(n)$ 是 Euler 函数,函数 $\varphi_e(n)$ 是广义 Euler 函数,函数 $S(n)$ 是 Smarandache 函数.

关键词: Euler 函数 $\varphi(n)$;广义 Euler 函数 $\varphi_2(n)$;Smarandache 函数 $S(n)$;正整数解

中图分类号: O 156　　**文献标志码:** A　　**DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2021.02.13

0　引言

在数论的研究中,数论函数方程可解性的讨论一直是令人关注的研究领域,如文献[1-4]讨论了包含 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的方程可解性;文献[5-8]讨论了包含广义 Euler 函数 $\varphi_e(n)$ 的方程可解性;文献[9-11]讨论了包含 Smarandache 函数 $S(n)$ 的方程可解性;文献[12]讨论了包含 Euler 函数 $\varphi(n)$、Smarandache 函数 $S(n)$ 与广义 Euler 函数 $\varphi_e(n)$ 之间混合方程 $2\varphi(n)=\varphi_2(n)+S(n^{25})$ 的可解性. 本文将在相关研究内容的基础上,讨论包含 Euler 函数 $\varphi(n)$、Smarandache 函数 $S(n)$ 与广义 Euler 函数 $\varphi_e(n)$ 3 者混合的方程

$$k\varphi(Y)=\varphi_2(Y)+S(Y^8) \qquad (1)$$

的可解性.

1　几个基本的引理

为获得本文的相关结论需如下几个基本引理.

引理 1[13]　若 $n=\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i}$,则

$S(n)=\max(S(q_1^{\alpha_1}),S(q_2^{\alpha_2}),\cdots,S(q_k^{\alpha_k}))$.

引理 2[13]　对于素数 p 和正整数 k,有 $S(p^k)\leqslant kp$;特别地,当 $k<p$ 时,有 $S(p^k)=kp$.

引理 3[14]　当 $n\geqslant 3$ 时,有 $\varphi(n)$ 为偶数.

引理 4[15]　当 $n\geqslant 3$ 时,有 $\varphi_2(n)=\varphi(n)/2$.

2　定理及其证明

定理 1　方程(1)只在 $k=1、2、4、5、9、11$ 时有正整数解,且

(i) 当 $k=1$ 时,方程(1)有正整数解 $Y=1$、343、375、500、686、750、867、1 156、1 734;

(ii) 当 $k=2$ 时,方程(1)有正整数解 $Y=45$、72、90、108、121、242;

(iii) 当 $k=4$ 时,方程(1)有正整数解 $Y=24$、25、50;

(iv) 当 $k=5$ 时,方程(1)有正整数解 $Y=12$;

(v) 当 $k=9$ 时,方程(1)有正整数解 $Y=17$、34;

(vi) 当 $k=11$ 时,方程(1)有正整数解 $Y=2$.

证　根据广义 Euler 函数 $\varphi_e(n)$ 的定义有,$\varphi_2(1)=0$,$\varphi_2(2)=1$. 对于方程(1),当 $Y=1$ 时,由方程(1)可得 $k=1$,即当 $k=1$ 时,$Y=1$ 是方程(1)的 1 个正整数解;当 $Y=2$ 时,由方程(1)可得 $k=1+10=11$,即当 $k=11$ 时,$Y=2$ 是方程(1)的 1 个正整数解;设 $Y=\prod_{j=1}^{t}q_j^{\delta_j}\geqslant 3$,其中 $q_1<q_2<\cdots<q_t$ 是质数,由引理 1 可得

$$S(Y)=\max(S(q_1^{\delta_1}),S(q_2^{\delta_2}),\cdots,S(q_t^{\delta_t}))=S(q^{\delta}), \qquad (2)$$

其中 $Y=q^{\delta}Y_1$,$(q,Y_1)=1$,则有

$\varphi(Y)=\varphi(q^{\delta}Y_1)=\varphi(q^{\delta})\varphi(Y_1)=q^{\delta-1}(q-$

收稿日期: 2020-04-21

基金项目: 国家自然科学基金(11201411),新疆维吾尔自治区自然科学基金(2017D01A13),云南省教育厅科学技术研究(2019J1182)和喀什大学一般课题((19)2652)资助项目.

作者简介: 张四保(1978—),男,江西峡江人,教授,主要从事数论研究. E-mail: sibao98@sina.com

$1)\varphi(Y_1)$.　(3)

由引理 4,结合式(2)与式(3)得,方程(1)可转化为

$(2k-1)q^{\delta-1}(q-1)\varphi(Y_1)=2S(Y^8)=2S(q^{8\delta})$. (4)

情形 1　若 $\delta=1$,则有:

当 $q=2$ 时,由式(4)有 $(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(2^8)=20$,从而有 $2k-1=1,\varphi(Y_1)=20$ 与 $2k-1=5,\varphi(Y_1)=4$. 当 $2k-1=1,\varphi(Y_1)=20$ 时,有 $k=1,Y_1=25$、33、44、50、66,结合 $Y=q^\delta Y_1$ 与 $(q,Y_1)=1$,有 $Y=50$、66,经验算 $Y=50$、66 都不是方程(1)的解;当 $2k-1=5,\varphi(Y_1)=4$ 时,有 $k=3,Y_1=5$、8、10、12,结合 $Y=q^\delta Y_1$ 与 $(q,Y_1)=1$,有 $Y=10$,经验算 $Y=10$ 不是方程(1)的解;

当 $q=3$ 时,由式(4)有 $(2k-1)\varphi(Y_1)=S(3^8)=18$,从而有 $2k-1=1,\varphi(Y_1)=18$ 与 $2k-1=3,\varphi(Y_1)=6$ 及 $2k-1=9,\varphi(Y_1)=2$. 当 $2k-1=1,\varphi(Y_1)=18$ 时,有 $k=1,Y_1=19$、27、38、54,结合 $Y=q^\delta Y_1$ 与 $(q,Y_1)=1$,有 $Y=57$、114,经验算 $Y=57$、114 都不是方程(1)的解;当 $2k-1=3,\varphi(Y_1)=6$ 时,有 $k=2,Y_1=7$、9、14、18,结合 $Y=q^\delta Y_1$ 与 $(q,Y_1)=1$,有 $Y=21$、42,经验算 $Y=21$、42 都不是方程(1)的解;当 $2k-1=9,\varphi(Y_1)=2$ 时,有 $k=5,Y_1=3$、4、6,结合 $Y=q^\delta Y_1$ 与 $(q,Y_1)=1$,有 $Y=12$,经验算 $Y=12$ 是方程(1)的解;

当 $q=5$ 时,由式(4)有 $4(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(5^8)=2\times35$,即有 $2(2k-1)\varphi(Y_1)=35$,无解;

当 $q=7$ 时,由式(4)有 $6(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(7^8)=2\times49$,即有 $3(2k-1)\varphi(Y_1)=49$,无解;

当 $q=11$ 时,由式(4)有 $10(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(11^8)=2\times8\times11$,即有 $5(2k-1)\varphi(Y_1)=88$,无解;

当 $q=13$ 时,由式(4)有 $12(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(13^8)=2\times8\times13$,即有 $3(2k-1)\varphi(Y_1)=52$,无解;

当 $q=17$ 时,由式(4)有 $16(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(17^8)=2\times8\times17$,即有 $(2k-1)\varphi(Y_1)=17$,则 $2k-1=17,\varphi(Y_1)=1$,因而 $k=9,Y_1=1$、2,则 $Y=17$、34;故当 $k=9$ 时,方程(1)有解 $Y=17$、34;

当 $q\geqslant19$ 时,由式(4)有 $(2k-1)(q-1)\varphi(Y_1)=2S(q^8)=16q$,即有 $((2k-1)\varphi(Y_1)-16)(q-1)=16$,这是不可能的,无解.

情形 2　若 $\delta=2$,则有:

当 $q=2$ 时,由式(4)有 $2(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(2^{16})=2\times18$,从而有 $2k-1=1,\varphi(Y_1)=18$ 与 $2k-1=3,\varphi(Y_1)=6$ 及 $2k-1=9,\varphi(Y_1)=2$. 当 $2k-1=1,\varphi(Y_1)=18$ 时,有 $k=1,Y_1=19$、27、38、54,结合 $Y=q^\delta Y_1$ 与 $(q,Y_1)=1$,有 $Y=76$、108,经验算 $Y=76$、108 都不是方程(1)的解;当 $2k-1=3,\varphi(Y_1)=6$ 时,有 $k=2,Y_1=7$、9、14、18,结合 $Y=q^\delta Y_1$ 与 $(q,Y_1)=1$,有 $Y=28$、36,经验算 $Y=28$、36 都不是方程(1)的解;当 $2k-1=9,\varphi(Y_1)=2$ 时,有 $k=5,Y_1=3$、4、6,结合 $Y=q^\delta Y_1$ 与 $(q,Y_1)=1$,有 $Y=12$,经验算 $Y=12$ 是方程(1)的解;

当 $q=3$ 时,由式(4)有 $6(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(3^{16})=2\times36$,从而有 $2k-1=1,\varphi(Y_1)=12$ 与 $2k-1=3,\varphi(Y_1)=4$. 当 $2k-1=1,\varphi(Y_1)=12$ 时,有 $k=1,Y_1=13$、21、26、28、36、42,结合 $Y=q^\delta Y_1$ 与 $(q,Y_1)=1$,有 $Y=117$、234、252,经验算 $Y=117$、234、252 都不是方程(1)的解;当 $2k-1=3,\varphi(Y_1)=4$ 时,有 $k=2,Y_1=5$、8、10、12,结合 $Y=q^\delta Y_1$ 与 $(q,Y_1)=1$,有 $Y=45$、72、90,经验算 $Y=45$、72、90 都是方程(1)的解;

当 $q=5$ 时,由式(4)有 $20(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(5^{16})=2\times70$,即有 $(2k-1)\varphi(Y_1)=7$,从而有 $2k-1=7,\varphi(Y_1)=1$,进而 $k=4,Y_1=1$、2,结合 $Y=q^\delta Y_1$ 与 $(q,Y_1)=1$,有 $Y=25$、50,即当 $k=4$ 时,$Y=25$、50 是方程(1)的解;

当 $q=7$ 时,由式(4)有 $42(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(7^{16})=2\times98$,即有 $21(2k-1)\varphi(Y_1)=98$,无解;

当 $q=11$ 时,由式(4)有 $110(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(11^{16})=2\times165$,即有 $(2k-1)\varphi(Y_1)=3$,从而有 $2k-1=3,\varphi(Y_1)=1$,进而 $k=2,Y_1=1$、2,结合 $Y=q^\delta Y_1$ 与 $(q,Y_1)=1$,有 $Y=121$、242,即当 $k=2$ 时,$Y=121$、242 是方程(1)的解;

当 $q=13$ 时,由式(4)有 $12\times13\times(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(13^{16})=2\times195$,即有 $2(2k-1)\varphi(Y_1)=5$,无解;

当 $q=17$ 时,由式(4)有 $16\times17\times(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(17^{16})=2\times16\times17$,即有 $(2k-1)\varphi(Y_1)=2$,则 $2k-1=1,\varphi(Y_1)=2$,因而 $k=1,Y_1=3$、4、6,则 $Y=867$、$1\ 156$、$1\ 734$;因而,当 $k=1$ 时,方程(1)有解 $Y=867$、$1\ 156$、$1\ 734$;

当 $q\geqslant19$ 时,由式(4)有 $(2k-1)(q-1)q\varphi(Y_1)=2S(q^{16})=2\times16q$,即有 $(2k-1)(q-1)\varphi(Y_1)=32$,这是不可能的,无解.

情形 3　若 $\delta=3$,则有:

当 $q=2$ 时,由式(4)有 $2^2(2k-1)\varphi(Y_1)=$

$2S(2^{24})=2\times28$,即$(2k-1)\varphi(Y_1)=14$.由于14为非Euler商数,所以有$2k-1=7$,$\varphi(Y_1)=2$,有$k=4$,$Y_1=3、4、6$,结合$Y=q^{\delta}Y_1$与$(q,Y_1)=1$,有$Y=24$,经验算$Y=24$是方程(1)的解,即当$k=4$时,方程(1)有解$Y=24$;

当$q=3$时,由式(4)有$3^2\times2\times(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(3^{24})=2\times54$,即$(2k-1)\varphi(Y_1)=6$,则有$2k-1=1$,$\varphi(Y_1)=6$与$2k-1=3$,$\varphi(Y_1)=2$.当$2k-1=1$,$\varphi(Y_1)=6$时,有$k=1$,$Y_1=7、9、14、18$,结合$Y=q^{\delta}Y_1$与$(q,Y_1)=1$,有$Y=189、378$,经验算$Y=189、378$都不是方程(1)的解;当$2k-1=3$,$\varphi(Y_1)=2$时,有$k=2$,$Y_1=3、4、6$,结合$Y=q^{\delta}Y_1$与$(q,Y_1)=1$,有$Y=108$,经验算$Y=108$是方程(1)的解;

当$q=5$时,由式(4)有$100(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(5^{24})=2\times100$,即有$(2k-1)\varphi(Y_1)=2$,则有$2k-1=1$,$\varphi(Y_1)=2$,进而$k=1$,$Y_1=3、4、6$,结合$Y=q^{\delta}Y_1$与$(q,Y_1)=1$,有$Y=375、500、750$,即当$k=1$时,$Y=375、500、750$是方程(1)的解;

当$q=7$时,由式(4)有$7^2\times6\times(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(7^{24})=2\times147$,即有$(2k-1)\varphi(Y_1)=1$,从而有$2k-1=1$,$\varphi(Y_1)=1$,进而$k=1$,$Y_1=1、2$,结合$Y=q^{\delta}Y_1$与$(q,Y_1)=1$,有$Y=343、686$,即当$k=1$时,$Y=343、686$是方程(1)的解;

当$q\geqslant11$时,由式(4)有$q^2(q-1)(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(q^{24})\leqslant48q$,即有$q(q-1)(2k-1)\varphi(Y_1)\leqslant48$,这是不可能的,无解.

情形4 若$\delta=4$,则有:

当$q=2$时,由式(4)有$2^3(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(2^{32})=2\times34$,即$2(2k-1)\varphi(Y_1)=17$,这是不可能的,无解;

当$q=3$时,由式(4)有$3^3\times2\times(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(3^{32})=2\times69$,即$3^2\times(2k-1)\varphi(Y_1)=23$,这是不可能的,无解;

当$q=5$时,由式(4)有$500(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(5^{32})=2\times130$,这是不可能的,无解;

当$q\geqslant7$时,由式(4)有$q^3(q-1)(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(q^{32})\leqslant64q$,即有$q^2(q-1)(2k-1)\varphi(Y_1)\leqslant64$,这是不可能的,无解.

情形5 若$\delta=5$,则有:

当$q=2$时,由式(4)有$2^4(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(2^{40})=2\times44$,即$2(2k-1)\varphi(Y_1)=11$,这是不可能的,无解;

当$q\geqslant3$时,由式(4)有$q^4(q-1)(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(q^{40})\leqslant80q$,即$q^3(q-1)(2k-1)\varphi(Y_1)\leqslant80$,这是不可能的,无解.

情形6 若$\delta=6$,则有:

当$q=2$时,由式(4)有$2^5(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(2^{48})=2\times52$,即$2^2(2k-1)\varphi(Y_1)=13$,这是不可能的,无解;

当$q\geqslant3$时,由式(4)有$q^5(q-1)(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(q^{48})\leqslant96q$,即$q^4(q-1)(2k-1)\varphi(Y_1)\leqslant96$,这是不可能的,无解.

情形7 若$\delta=7$,则有:

当$q=2$时,由式(4)有$2^6(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(2^{56})=2\times60$,即$2^3(2k-1)\varphi(Y_1)=15$,这是不可能的,无解;

当$q\geqslant3$时,由式(4)有$q^6(q-1)(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(q^{56})\leqslant112q$,即$q^5(q-1)(2k-1)\varphi(Y_1)\leqslant112$,这是不可能的,无解.

情形8 若$\delta=8$,则有:

当$q=2$时,由式(4)有$2^7(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(2^{64})=2\times66$,即$2^5(2k-1)\varphi(Y_1)=33$,这是不可能的,无解;

当$q\geqslant3$时,由式(4)有$q^7(q-1)(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(q^{64})\leqslant128q$,即$q^6(q-1)(2k-1)\varphi(Y_1)\leqslant128$,这是不可能的,无解.

情形9 若$\delta=9$,则有:

当$q=2$时,由式(4)有$2^8(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(q^{72})=2\times76$,即$2^5(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(q^{72})=19$,这是不可能的,无解;

当$q\geqslant3$时,由式(4)有$q^8(q-1)(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(q^{72})\leqslant144q$,即$q^7(q-1)(2k-1)\varphi(Y_1)\leqslant144$,这是不可能的,无解.

情形10 若$\delta\geqslant10$,则当$q\geqslant2$时,由式(4)有$q^{\delta-1}(q-1)(2k-1)\varphi(Y_1)=2S(q^{8\delta})\leqslant16\delta q$,即$q^{\delta-2}(q-1)(2k-1)\varphi(Y_1)\leqslant16\delta$,这是不可能的,无解.

综合以上各种情形的讨论可得定理1的结论.

3 结束语

对于包含Euler函数$\varphi(n)$、Smarandache函数$S(n)$与广义Euler函数$\varphi_e(n)$混合的形如$k\varphi(Y)=\varphi_2(Y)+S(Y^n)$的方程的可解性,其中$k,n\in\mathbf{Z}^+$,本文采用分段分类讨论的方式与结合这3个函数的性质及初等方法给出了当$n=8$时所对应的方程有正整数解的k值,并给出了此时k值对应方程的全部正

整数解. 对于形如 $k\varphi(Y)=\varphi_2(Y)+S(Y^n)$ 的方程，当 $n\in\mathbf{Z}^+$ 取其他正整数值时该方程的可解性问题，也可采用本文所述的方法进行讨论得到解决.

4 参考文献

[1] 郑璐，高丽，郭梦媛. 与 Euler 函数 $\varphi(n)$ 有关的非线性方程的正整数解 [J]. 纯粹数学与应用数学，2018，34(2)：172-176.

[2] 张四保，官春梅，席小忠. Euler 方程 $\varphi(xy)=k_1\varphi(x)+k_2\varphi(y)$ ($k_1\neq k_2$) 的正整数解 [J]. 郑州大学学报：理学版，2017，49(1)：7-10.

[3] 张丹丹. 若干包含 Euler 函数的不定方程问题的研究 [D]. 西安：西安工程大学，2019.

[4] 杨海，李娇，高晓梅. 一个包含 Euler 函数的不定方程求解 [J]. 东北师大学报：自然科学版，2019，51(3)：21-25.

[5] 张四保，阿克木·优力达西. 与广义 Euler 函数 $\varphi_2(n)$ 有关的两个方程 [J]. 东北师大学报：自然科学版，2019，51(2)：7-12.

[6] 张四保. 广义 Euler 函数方程 $\varphi_6(n)=n/d$ 的可解性 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2019，41(12)：50-56.

[7] 张四保，陈佳宏，杨燕妮. 一个包含广义 Euler 函数 $\varphi_3(n)$ 方程的解 [J]. 科技通报，2019，35(3)：7-10.

[8] 张四保. 广义 Euler 函数方程 $\varphi_6(n)=2^{\omega(n)}$ 的解 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2018，43(2)：36-41.

[9] 阿克木·优力达西，姜莲霞. 包含广义 Euler 函数 $\varphi_3(n)$ 和 Smarandache 函数 $S(n)$ 的一方程的解 [J]. 江西科学，2019，37(6)：821-824，831.

[10] 白海荣，廖群英. Smarandache 函数的几类相关方程的解 [J]. 数学学报：中文版，2019，62(2)：247-254.

[11] 袁合才，王晓峰. 关于 Smarandache LCM 函数的数论函数方程 $S(SL(n^{11,12}))=\varphi_2(n)$ 的可解性 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2018，40(10)：72-76.

[12] 李昌吉. 数论函数方程 $2\varphi(n)=\varphi_2(n)+S(n^{25})$ 的正整数解 [J]. 南宁师范大学学报：自然科学版，2019，36(4)：35-39.

[13] 杨张媛，赵西卿，白继文. 数论函数方程 $\varphi_2(n)=S(n^{10})$ 的解 [J]. 延安大学学报：自然科学版，2017，36(1)：9-12.

[14] 潘承洞，潘承彪. 简明数论 [M]. 北京：北京大学出版社，1998：125.

[15] 蒋舒图，沈忠燕. 数论函数方程 $\Phi(n)=S(n^{11})$ 和 $\Phi_2(n)=S(n^{11})$ 的解 [J]. 浙江外国语学院学报，2014(5)：31-37.

The Solutions of Arithmetic Function Equation $k\varphi(Y)=\varphi_2(Y)+S(Y^8)$

ZHANG Sibao，JIANG Lianxia

(School of Mathematics and Statistics，Kashi University，Kashi Xinjiang 844008，China)

Abstract: The solvability of the equation $k\varphi(Y)=\varphi_2(Y)+S(Y^8)$ involving $\varphi(n)$，$\varphi_e(n)$ and $S(n)$ three arithmetic functions is discussed. By using the properties of these three arithmetic functions，it is obtained that the equation has positive integer solutions only when $k=1,2,4,5,9,11$，and its specific positive integer solutions are given，where the arithmetic function $\varphi(n)$ is Euler function，the arithmetic function $\varphi_2(n)$ is generalized Euler function and the arithmetic function $S(n)$ is Smarandache function.

Key words: Euler function $\varphi(n)$；generalized Euler function $\varphi_2(n)$；Smarandache function $S(n)$；positive integer solution

(责任编辑：曾剑锋)