第 45 卷 第 2 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 45 No. 2
2021 年 3 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Mar. 2021

文章编号: 1000-5862(2021)02-0198-06

5 次对称群 S_5 的子群

占 颖,张细苟*
(江西师范大学数学与统计学院,江西 南昌 330022)

摘要: 利用在群论中一些重要的定理以及在 n 次对称群中的重要知识,该文通过理论推导得到了对称群 S_5 的所有子群(共 156 个),并分析了这些子群的结构.

关键词: n 次对称群 S_n; 子群; Lagrange 定理; Sylow 定理
中图分类号: O 152.1 文献标志码: A DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2021.02.14

0 引言

在群论中子群是一个非常重要的概念. 由有限群的凯莱(Caylay)定理[1]知,每一个有限群都同构于一个 S_n 的子群,所以从理论上来说,若能够找出 S_n 的所有子群,则对有限群的结构也就了解清楚了. 但事实上,当 n 较大时,要找出 S_n 的全部子群就显得比较困难[2]. 近年来,文献[3-14]从理论上和借用电子计算机辅助的方法研究了某些对称群 S_n 的子群. 本文仅利用有限群的 Lagrange 定理、Sylow 第一定理以及在群论中的重要结论,通过理论推导详细阐述了 5 次对称群 S_5 的所有子群,并对它们的结构进行较清晰地描述. 文中引用的符号参见文献[5].

1 群论预备知识

1.1 群论基本知识

引理 1(Lagrange 定理)[1] 设 G 是一个有限群,H 是 G 的子群(记为 $H<G$),则 $|G|=|H|[G:H]$. 其中 $[G:H]$ 是左陪集或右陪集的个数,$|G|$ 表示在群 G 中元素的个数.

引理 2[2] 素数阶群必为循环群.

引理 3(Sylow 定理)[1] 设 G 是一个有限群,$|G|=p^n m(n\geqslant 1)$,其中 p 为素数,且 $(p,m)=1$,则对每个 $i(1\leqslant i\leqslant n)$,$G$ 必含有阶为 p^i 的子群.

定义 1[2] 设 G 为群,N 为 G 的正规子群(记为 $N\lhd G$),$H<G$,若 $G=NH$ 且 $N\cap H=\{e\}$,则 G 是 N 和 H 的半直积,记作 $G=N\rtimes H$.

1.2 n 次对称群 S_n

设 $X=\{1,2,\cdots,n\}$,则 X 的全体可逆变换关于变换的合成构成了一个 n 次对称群 S_n.

引理 4[15] n 次对称群 S_n 的阶是 $n!$.

1.3 在 5 次对称群 S_5 中的元素

由 $|S_5|=5!=120$ 知,S_5 中元素的阶数只能是 1、2、3、4、5、6. 具体分布如下:

1) 1 个 1 阶元即单位元(1);

2) 共有 25 个 2 阶元,

(i) 单独的 2 轮换($C_5^2=10$);

(ii) 2 个 2 轮换乘积的形式($3C_5^4=15$);

3) 共有 20 个 3 阶元($2C_5^3=20$),所有的 3-轮换;

4) 共有 30 个 4 阶元($6C_5^4=30$),所有的 4-轮换;

5) 共有 24 个 5 阶元($A_5^5/5=24$),所有的 5-轮换;

6) 共有 20 个 6 阶元($2C_5^2=20$),此 6 阶元为 2 轮换乘以 3 轮换的形式.

2 在 S_5 中子群的个数

由 $|S_5|=2^3\times 3\times 5=120$ 及 Sylow 第一定理知,S_5 中一定含有 2 阶子群、3 阶子群、4 阶子群、5 阶子群、8 阶子群以及平凡子群. 由引理 1 知,结合 120 所有可能的因子,子群的阶数还可能是 6、10、12、15、20、24、30、40、60. 在下面的叙述中,用符号 $H_n^{(m)}$ 表示该子群的阶是 m 和序号为 n. 为方便查阅,把本文的所有结果(即 S_5 的所有子群)均列在附录 A 中.

收稿日期: 2020-07-08
基金项目: 国家自然科学基金(11961031)资助项目.
通信作者: 张细苟(1971—),男,江西余干人,副教授,博士,主要从事代数群与 Hecke 代数相关研究. E-mail: xyzhang@jxnu.edu.cn

定理 1　S_5 有 25 个 2 阶子群.

证　由第 1.3 节的讨论知,S_5 有 25 个 2 阶子群. 如 $H_1^{(2)}=\{(1),(12)\}$,$H_2^{(2)}=\{(1),(13)\}$. 详细结果见附录 A(b). 所有的这些 2 阶子群均是循环子群.

定理 2　S_5 有 10 个 3 阶子群.

证　类似地,S_5 有 10 个 3 阶子群. 如 $H_1^{(3)}=\{(1),(123),(132)\}$,$H_2^{(3)}=\{(1),(124),(142)\}$. 类似地,可得到其他的子群(见附录 A(c)). 所有的这些子群也是循环子群.

定理 3　S_5 有 35 个 4 阶子群.

证　从同构意义上说,4 阶群只有 2 类:

(i) 4 阶循环群,即元素阶数为 1、2、4、4. 因为 S_5 含有 15 对 4 阶元,以其中 1 对为例. 假如这对 4 阶元为(1234)和(1432). 即 $(1234)^{-1}=(1432)$. 由 $(1234)^2=(13)(24)$,所以该 2 阶元为(13)(24). 由于每对 4 阶元都能确定 1 个 4 阶循环子群,所以 S_5 共有 15 个 4 阶循环子群. 如 $H_1^{(4)}=\{(1),(1234),(1432),(13)(24)\}$,$H_2^{(4)}=\{(1),(1243),(1342),(14)(23)\}$.

(ii) 4 阶非循环群,均同构于 klein 4 元群,该群由 1 个 1 阶元,3 个 2 阶元组成. 这类子群共有 35 个. 如 $H_{16}^{(4)}=\{(1),(12),(34),(12)(34)\}$,$H_{17}^{(4)}=\{(1),(12),(35),(12)(35)\}$.

定理 4　S_5 有 6 个 5 阶子群.

证　S_5 共有 6 个 5 阶子群,这些子群是循环子群. 如 $H_1^{(5)}=\langle(12345)\rangle=\{(1),(12345),(13524),(14253),(15432)\}$.

定理 5　S_5 有 15 个 8 阶子群.

证　在 8 阶子群中有 1 个 1 阶元、2 个 4 阶元和 5 个 2 阶元,其中这 5 个 2 阶元中必有 2 个 2 轮换的 2 阶元,且无公共数字;另外 3 个 2 阶元为 2 轮换乘积形式的 2 阶元. 所以,S_5 有 15 个 8 阶子群,且每个子群同构于 4 阶循环群和 2 阶循环群的半直积. 如 $H_1^{(8)}=\{(1),(1234),(13)(24),(1432),(12)(34),(14)(23),(13),(24)\}=H_1^{(4)}\rtimes H_2^{(2)}$,其中 $H_1^{(4)}$ 和 $H_2^{(2)}$ 分别见附录 A(d)和 A(b).

接下来讨论在 S_5 中可能存在的子群,即子群可能的阶数为 6、10、12、15、20、24、30、40、60.

定理 6　S_5 有 30 个 6 阶子群.

证　从同构的意义来看,6 阶群只有 2 类:一类是 6 阶循环群,另一类是 3 次对称群 S_3.

(i) 考虑在 S_5 中的 6 阶循环群. 6 阶循环群一共有 10 个,如 $H_1^{(6)}=\langle(12)(345)\rangle=\{(1),(12)(345),(345),(12),(345),(12)(354)\}$,其他 9 个 6 阶循环群可类似得到.

(ii) 考虑 6 阶非循环群. 由于同构保持元素的阶不变,故在该 6 阶群中含有 1 个 1 阶元、3 个 2 阶元和 2 个 3 阶元. 经分析,S_5 共有 20 个 6 阶非循环群. 如 $H_{11}^{(6)}=\{(1),(123),(132),(12),(13),(23)\}$,$H_{12}^{(6)}=\{(1),(123),(132),(12)(45),(13)(45),(23)(45)\}$. 所以,$S_5$ 共有 30 个 6 阶子群,即 10 个 6 阶循环群和 20 个 6 阶非循环群(均同构于 S_3).

定理 7　S_5 有 6 个 10 阶子群.

证　由引理 1 知,10 阶子群中元素的阶数可能为 1、2、5. 由于 $10=2\times5$,所以在 10 阶子群中一定存在 5 阶子群. 而这个 5 阶子群也一定是 S_5 的 5 阶子群,从而该 10 阶子群中必有 4 个 5 阶元和 5 个 2 阶元. 可以得到 10 阶子群共有 6 个,如 $H_1^{(10)}=\{(1),(12345),(13524),(14253),(15432),(12)(35),(13)(45),(14)(23),(15)(24),(25)(34)\}$. 且每个子群同构于一个 5 阶循环群和 2 阶循环群的半直积. 如 $H_1^{(10)}=H_1^{(5)}\rtimes H_{14}^{(2)}$,其他 5 个 10 阶子群可类似得到.

定理 8　S_5 有 15 个 12 阶子群.

证　(i) $S_4<S_5$,而在 S_4 中有 A_4 这个 12 阶子群,所以在 S_5 中一定有 5 个 12 阶子群,这些子群均同构于 A_4. 如 $H_1^{(12)}=\{(1),(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$. 其他 4 个 12 阶子群可类似获得.

(ii) 从 6 阶循环子群出发可得

$H_6^{(12)}=\{(1),(12)(345),(354),(12),(345),(12)(354),(12)(34),(12)(35),(12)(45),(34),(35),(45)\}$.

其他 9 个 12 阶子群可类似得到,且每个子群同构于 1 个 6 阶循环群和 2 阶循环群的半直积. 以 $H_6^{(12)}$ 为例,$H_6^{(12)}=H_1^{(6)}\rtimes H_{11}^{(2)}$.

定理 9　S_5 不存在 15 阶子群.

证　由引理 1 知,在 15 阶子群中元素的阶数可能为 1、3、5. 假设存在 15 阶子群 H,则在这个子群 H 中一定有 3 阶子群和 5 阶子群. 而这样的 3 阶子群和 5 阶子群也一定是 S_5 的子群. 因为任意 3 阶群里的 3 阶元和任意 5 阶群里的 5 阶元相乘,结果会出现 2 阶元,但 2 不是 15 的因子,矛盾,所以 S_5 不存在 15 阶子群.

定理 10　S_5 有 6 个 20 阶子群.

证　经计算,该 20 阶子群中有 1 个 1 阶元、4 个 5 阶元、5 个 2 阶元和 10 个 4 阶元. 如

$H_1^{(20)}=\{(1),(12345),(13524),(14253),(15432),(12)(35),(13)(45),(14)(23),(15)(24),(25)(34),(1243),(1325),(1452),(1534),(2354),$

(1342),(1523),(1254),(1435),(2453)}.

其他 5 个 20 阶子群可类似获得,且每个子群同构于 1 个 5 阶循环群和 4 阶循环群的半直积. 以 $H_1^{(20)}$ 为例,$H_1^{(20)}=H_1^{(5)}\rtimes H_6^{(4)}$.

定理 11 S_5 有 5 个 24 阶子群.

证 显然,$S_4<S_5$,且 S_4 恰为 24 阶子群. 所以在 S_5 中一定有 5 个 24 阶子群,如 $H_1^{(24)}=\{(1)$, (12),(13),(14),(23),(24),(34),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243),(1234),(1432),(1243),(1342),(1324),(1423)}.

其他 4 个 24 阶子群可类似得到,每个子群均同构于 S_4.

定理 12 S_5 不存在 30 阶子群.

类似于定理 9 可得到.

定理 13 S_5 不存在 40 阶子群.

类似于定理 9 可得到.

定理 14 S_5 有 1 个 60 阶子群.

证 A_5 是 S_5 的一个子群,且为 60 阶子群. 下证该 60 阶子群有且只有 1 个.

(反证法) 设 B 是 S_5 的另一个 60 阶子群. 因为 $[G:B]=2$,所以 $B\lhd S_5$. 又 $A_5\lhd S_5$,则 A_5B 与 $A_5\cap B$ 都是 S_5 的正规子群. 因为 $|A_5B|\geqslant 60$,所以 $|A_5B|=60$ 或 $|A_5B|=120$.

(i) 若 $|A_5B|=60$,由引理 4 得 $\left|A_5\cap B\right|=60$,则 $B=A_4$.

(ii) 若 $|A_5B|=120$,由引理 4 得 $\left|A_5\cap B\right|=30$.

又因为 $A_5\cap B$ 仍然是子群,所以 $A_5\cap B$ 是 S_5 的 30 阶子群. 但 S_5 无 30 阶子群,矛盾. 所以 A_5 是唯一的 60 阶子群.

3 总结

结合上述讨论,S_5 共有 156 个子群. 除 2 个平凡子群外,有 25 个 2 阶子群、10 个 3 阶子群、35 个 4 阶子群、6 个 5 阶子群、15 个 8 阶子群、30 个 6 阶子群、6 个 10 阶子群、15 个 12 阶子群、6 个 20 阶子群、5 个 24 阶子群和 1 个 60 阶子群.

4 参考文献

[1] 韩士安,林磊. 近世代数[M]. 北京: 科学出版社,2009.

[2] 张远达. 有限群构造[M]. 北京: 科学出版社,1982.

[3] 孙自行,崔方达. 4 次对称群 S_4 的子群个数及其证明[J]. 阜阳师范学院学报: 自然科学版,2005,22(4): 13-16.

[4] 班桂宁,吴建平,张中健,等. S_5 的一类子群的一个构造方法[J]. 吉首大学学报: 自然科学版,2008,29(4): 1-4.

[5] Machi A,Siconofi A. A new characterization of A_5[J]. Arch Math,1977,29(1): 385-388.

[6] Arad Z,Chillang D,Herjog M. Classification of finite groups by a maximal subgroup[J]. Journal of Algebra,1981,71(1): 235-244.

[7] 施武杰,杨文泽. A_5 的一个新刻划与有限质元群[J]. 西南师范学院学报: 自然科学版,1984,9(1): 36-40.

[8] 何立国,张泽,尚玮. 计算对称群 S_{10} 的所有子群[J]. 武汉大学学报: 理学版,2012,58(5): 451-455.

[9] 黄本文. 对称群 S_6 中的一类子群[J]. 武汉交通科技大学学报,2000,24(2): 129-134.

[10] 孙自行,王雪. 5 次交错群 A_5 的 10 阶子群的一个构造方法[J]. 电子科技大学学报,2006,35(3): 419-422.

[11] 黄本文,廖向军,吕云翔. 计算对称群 S_n 的所有 Sylow-p 子群[J]. 武汉大学学报: 理学版,2004,50(3): 303-305.

[12] 马建萍. 对称群 S_4 及其正规子群 A_4、K_4 的若干性质[J]. 青海师范大学学报: 自然科学版,2009,25(2): 16-18.

[13] 包霞,焦艳. A_5 的一类 12 阶子群的构造[J]. 西北民族大学学报: 自然科学版,2007,28(3): 11-15.

[14] 黄本文. 计算对称群 S_6 的所有子群[J]. 高校应用数学学报 A 辑: 中文版,2001,16(1): 31-35.

[15] 徐明耀. 有限群导引[M]. 北京: 科学出版社,1999.

The Subgroups of 5-Degree Symmetric Group S_5

ZHAN Ying,ZHANG Xigou*

(School of Mathematics and Statistics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: In this paper,it is concluded that there are 156 subgroups in S_5 through theoretical derivation by using some important theorems in group theory and important knowledge in symmetric groups. And the structure of these subgroups are analyzed.

Key words: n-degree symmetric group S_n; subgroup; Lagrange´s theorem; Sylow´s theorem

(责任编辑: 曾剑锋)

附录 A

S_5 的全部子群分布如下:

(a) 2 **个平凡子群**: $H_1^{(1)}=\{(1)\}$, $H_1^{(120)}=S_5$.

(b) 2 **阶子群(共** 25 **个)**: $H_1^{(2)}=\{(1),(12)\}$, $H_2^{(2)}=\{(1),(13)\}$, $H_3^{(2)}=\{(1),(14)\}$, $H_4^{(2)}=\{(1),(15)\}$, $H_5^{(2)}=\{(1),(23)\}$, $H_6^{(2)}=\{(1),(24)\}$, $H_7^{(2)}=\{(1),(25)\}$, $H_8^{(2)}=\{(1),(34)\}$, $H_9^{(2)}=\{(1),(35)\}$, $H_{10}^{(2)}=\{(1),(45)\}$, $H_{11}^{(2)}=\{(1),(12)(34)\}$, $H_{12}^{(2)}=\{(1),(13)(24)\}$, $H_{13}^{(2)}=\{(1),(14)(23)\}$, $H_{14}^{(2)}=\{(1),(12)(35)\}$, $H_{15}^{(2)}=\{(1),(13)(25)\}$, $H_{16}^{(2)}=\{(1),(15)(23)\}$, $H_{17}^{(2)}=\{(1),(12)(45)$, $H_{18}^{(2)}=\{(1),(14)(25)\}$, $H_{19}^{(2)}=\{(1),(15)(24)\}$, $H_{20}^{(2)}=\{(1),(13)(45)\}$, $H_{21}^{(2)}=\{(1),(14)(35)\}$, $H_{22}^{(2)}=\{(1),(15)(43)\}$, $H_{23}^{(2)}=\{(1),(23)(45)\}$, $H_{24}^{(2)}=\{(1),(24)(35)\}$, $H_{25}^{(2)}=\{(1),(25)(34)\}$.

(c) 3 **阶子群(共** 10 **个)**: $H_1^{(3)}=\{(1),(123),(132)\}$, $H_2^{(3)}=\{(1),(124),(142)\}$, $H_3^{(3)}=\{(1),(125),(152)\}$, $H_4^{(3)}=\{(1),(134),(143)\}$, $H_5^{(3)}=\{(1),(135),(153)\}$, $H_6^{(3)}=\{(1),(145),(154)\}$, $H_7^{(3)}=\{(1),(234),(243)\}$, $H_8^{(3)}=\{(1),(235),(253)\}$, $H_9^{(3)}=\{(1),(245),(254)\}$, $H_{10}^{(3)}=\{(1),(345),(354)\}$.

(d) 4 **阶子群(共** 35 **个)**: $H_1^{(4)}=\{(1),(1234),(1432),(13)(24)\}$, $H_2^{(4)}=\{(1),(1243),(1342),(14)(23)\}$, $H_3^{(4)}=\{(1),(1324),(1423),(12)(34)\}$, $H_4^{(4)}=\{(1),(1235),(13)(25),(1532)\}$, $H_5^{(4)}=\{(1),(1253),(15)(23),(1352)\}$, $H_6^{(4)}=\{(1),(1325),(12)(35),(1523)\}$, $H_7^{(4)}=\{(1),(1245),(14)(25),(1542)\}$, $H_8^{(4)}=\{(1),(1254),(15)(24),(1452)\}$, $H_9^{(4)}=\{(1),(1425),(12)(45),(1524)\}$, $H_{10}^{(4)}=\{(1),(1345),(14)(35),(1543)\}$, $H_{11}^{(4)}=\{(1),(1354),(15)(34),(1453)\}$, $H_{12}^{(4)}=\{(1),(1435),(13)(45),(1534)\}$, $H_{13}^{(4)}=\{(1),(2345),(24)(35),(2543)\}$, $H_{14}^{(4)}=\{(1),(2354),(25)(34),(2453)\}$, $H_{15}^{(4)}=\{(1),(2435),(23)(45),(2534)\}$, $H_{16}^{(4)}=\{(1),(12),(34),(12)(34)\}$, $H_{17}^{(4)}=\{(1),(12),(35),(12)(35)\}$, $H_{18}^{(4)}=\{(1),(12),(45),(12)(45)\}$, $H_{19}^{(4)}=\{(1),(13),(24),(13)(24)\}$, $H_{20}^{(4)}=\{(1),(13),(25),(13)(25)\}$, $H_{21}^{(4)}=\{(1),(13),(45),(13)(45)\}$, $H_{22}^{(4)}=\{(1),(14),(23),(14)(23)\}$, $H_{23}^{(4)}=\{(1),(14),(25),(14)(25)\}$, $H_{24}^{(4)}=\{(1),(14),(35),(14)(35)\}$, $H_{25}^{(4)}=\{(1),(15),(23),(15)(23)\}$, $H_{26}^{(4)}=\{(1),(15),(24),(15)(24)\}$, $H_{27}^{(4)}=\{(1),(15),(34),(15)(34)\}$, $H_{28}^{(4)}=\{(1),(23),(45),(23)(45)\}$, $H_{29}^{(4)}=\{(1),(24),(35),(24)(35)\}$, $H_{30}^{(4)}=\{(1),(25),(34),(25)(34)\}$, $H_{31}^{(4)}=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$, $H_{32}^{(4)}=\{(1),(12)(35),(13)(25),(15)(23)\}$, $H_{33}^{(4)}=\{(1),(12)(45),(14)(25),(15)(24)\}$, $H_{34}^{(4)}=\{(1),(13)(45),(14)(35),(15)(34)\}$, $H_{35}^{(4)}=\{(1),(23)(45),(24)(35),(25)(34)\}$.

(e) 5 **阶子群(共** 6 **个)**: $H_1^{(5)}=\langle(12345)\rangle=\{(1),(12345),(13524),(14253),(15432)\}$, $H_2^{(5)}=\langle(12354)\rangle=\{(1),(12354),(13425),(15243),(14532)\}$, $H_3^{(5)}=\langle(12435)\rangle=\{(1),(12435),(14523),(13254),(15342)\}$, $H_4^{(5)}=\langle(12453)\rangle=\{(1),(12453),(14325),(15234),(13542)\}$, $H_5^{(5)}=\langle(12534)\rangle=\{(1),(12534),(15423),(13245),(14352)\}$, $H_6^{(5)}=\langle(12543)\rangle=\{(1),(12543),(15324),(14235),(13452)\}$.

(f) 8 **阶子群(共** 15 **个)**: $H_1^{(8)}=\{(1),(1234),(13)(24),(1432),(12)(24),(14)(23),(13),(24)\}$, $H_2^{(8)}=\{(1),(1243),(14)(23),(1342),(12)(34),(13)(24),(14),(23)\}$, $H_3^{(8)}=\{(1),(1324),(12)(34),(1423),(13)(24),(14)(23),(12),(34)\}$, $H_4^{(8)}=\{(1),(1235),(13)(25),(1532),(12)(35),(15)(23),(13),(25)\}$, $H_5^{(8)}=\{(1),(1253),(15)(23),(1352),(12)(35),(13)(25),(15),(23)\}$, $H_6^{(8)}=\{(1),(1325),(12)(35),(1523),(13)(25),(15)(23),(12),(35)\}$, $H_7^{(8)}=\{(1),(1245),(14)(25),(1542),(12)(45),(15)(24),(14),(25)\}$, $H_8^{(8)}=\{(1),(1254),(15)(24),(1452),(12)(45),(14)(25),(15),(24)\}$, $H_9^{(8)}=\{(1),(1425),(12)(45),(1524),(14)(25),(15)(24),(12),(45)\}$, $H_{10}^{(8)}=\{(1),(1345),(14)(35),(1543),(13)(45),(15)(34),(14),(35)\}$, $H_{11}^{(8)}=\{(1),(1354),(15)(34),(1453),(13)(45),(14)(35),(15),(34)\}$, $H_{12}^{(8)}=\{(1),(1435),(13)(45),(1534),$

(14)(35),(15)(34),(13),(45)}, $H_{13}^{(8)}$ ={(1),(2345),(24)(35),(2543),(23)(45),(25)(34),(24),(35)}, $H_{14}^{(8)}$ ={(1),(2354),(25)(34),(2453),(23)(45),(24)(35),(25),(34)}, $H_{15}^{(8)}$ ={(1),(2435),(23)(45),(2534),(24)(35),(25)(34),(23),(45)}.

(g) 6 **阶子群(共** 30 **个)**: $H_1^{(6)}$ = 《12)(345)〉={(1),(12)(345),(354),(12),(345),(12)(354)}, $H_2^{(6)}$ = 《13)(245)〉={(1),(13)(245),(254),(13),(245),(13)(254)}, $H_3^{(6)}$ = 《14)(235)〉={(1),(14)(235),(253),(14),(235),(14)(253)}, $H_4^{(6)}$ = 《15)(234)〉={(1),(15)(234),(243),(15),(234),(15)(243)}, $H_5^{(6)}$ = 《23)(145)〉={(1),(23)(145),(154),(23),(145),(23)(154)}, $H_6^{(6)}$ = 《24)(135)〉={(1),(24)(135),(153),(24),(135),(24)(153)}, $H_7^{(6)}$ = 《25)(134)〉={(1),(25)(134),(143),(25),(134),(25)(143)}, $H_8^{(6)}$ = 《34)(125)〉={(1),(34)(125),(152),(34),(125),(34)(152)}, $H_9^{(6)}$ = 《35)(124)〉={(1),(35)(124),(142),(35),(124),(35)(142)}, $H_{10}^{(6)}$ = 《45)(123)〉={(1),(45)(123),(132),(45),(123),(45)(132)}, $H_{11}^{(6)}$ ={(1),(123),(132),(12),(13),(23)}, $H_{12}^{(6)}$ ={(1),(123),(132),(12)(45),(13)(45),(23)(45)}, $H_{13}^{(6)}$ ={(1),(124),(142),(12),(24),(14)}, $H_{14}^{(6)}$ ={(1),(124),(142),(12)(35),(24)(35),(14)(35)}, $H_{15}^{(6)}$ ={(1),(125),(152),(12),(25),(15)}, $H_{16}^{(6)}$ ={(1),(125),(152),(12)(34),(25)(34),(15)(34)}, $H_{17}^{(6)}$ ={(1),(134),(143),(13),(14),(34)}, $H_{18}^{(6)}$ ={(1),(134),(143),(13)(25),(14)(25),(34)(25)}, $H_{19}^{(6)}$ = {(1),(135),(153),(13),(15),(35)}, $H_{20}^{(6)}$ ={(1),(135),(153),(13)(24),(15)(24),(35)(24)}, $H_{21}^{(6)}$ ={(1),(145),(154),(14),(15),(45)}, $H_{22}^{(6)}$ = {(1),(145),(154),(14)(23),(15)(23),(45)(23)}, $H_{23}^{(6)}$ = {(1),(234),(243),(23),(24),(34)}, $H_{24}^{(6)}$ = {(1),(234),(243),(23)(15),(24)(15),(34)(15)}, $H_{25}^{(6)}$ = {(1),(235),(253),(23),(35),(25)}, $H_{26}^{(6)}$ = {(1),(235),(253),(23)(14),(35)(14),(25)(14)}, $H_{27}^{(6)}$ = {(1),(245),(254),(24),(45),(25)}, $H_{28}^{(6)}$ = {(1),(245),(254),(24)(13),(45)(13),(25)(13)}, $H_{29}^{(6)}$ = {(1),(345),(354),(34),(45),(35)}, $H_{30}^{(6)}$ = {(1),(345),(354),(34)(12),(45)(12),(35)(12)}.

(h) 10 **阶子群(共** 6 **个)**: $H_1^{(10)}$ = {(1),(12345),(13524),(14253),(15432),(12)(35),(13)(45),(14)(23),(15)(24),(25)(34)}, $H_2^{(10)}$ = {(1),(12354),(13425),(15243),(14532),(12)(34),(13)(45),(15)(23),(14)(25),(24)(35)}, $H_3^{(10)}$ = {(1),(12435),(14523),(13254),(15342),(12)(45),(14)(35),(13)(24),(15)(23),(25)(34)}, $H_4^{(10)}$ = {(1),(12453),(14325),(15234),(13542),(12)(34),(14)(35),(15)(24),(13)(25),(23)(45)}, $H_5^{(10)}$ = {(1),(12534),(15423),(13245),(14352),(12)(45),(15)(34),(13)(25),(14)(23),(24)(35)}, $H_6^{(10)}$ = {(1),(12543),(15324),(14235),(13452),(12)(35),(15)(34),(14)(25),(13)(24),(23)(45)}.

(i) 12 **阶子群(共** 15 **个)**: $H_1^{(12)}$ = {(1),(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243),(12)(34),(13)(24),(14)(23)}, $H_2^{(12)}$ = {(1),(123),(132),(125),(152),(135),(153),(235),(253),(12)(35),(13)(25),(15)(23)}, $H_3^{(12)}$ = {(1),(124),(142),(125),(152),(145),(154),(245),(254),(12)(45),(14)(25),(15)(24)}, $H_4^{(12)}$ = {(1),(134),(143),(135),(153),(145),(154),(345),(354),(13)(45),(14)(35),(15)(34)}, $H_5^{(12)}$ = {(1),(234),(243),(235),(253),(245),(254),(345),(354),(23)(45),(24)(35),(25)(34)}, $H_6^{(12)}$ ={(1),(12)(345),(354),(12),(345),(12)(354),(12)(34),(12)(35),(12)(45),(34),(35),(45)}, $H_7^{(12)}$ ={(1),(13)(245),(254),(13),(245),(13)(254),(13)(24),(13)(25),(13)(45),(24),(25),(45)}, $H_8^{(12)}$ ={(1),(14)(235),(253),(14),(235),(14)(253),(14)(23),(14)(25),(14)(35),(23),(25),(35)}, $H_9^{(12)}$ = {(1),(15)(234),(243),(15),(234),(15)(243),(15)(23),(15)(24),(15)(34),(23),(24),(34)}, $H_{10}^{(12)}$ = {(1),(23)(145),(154),(23),(145),(23)(154),(23)(14),(23)(15),(23)(45),(14),(15),(45)}, $H_{11}^{(12)}$ ={(1),(24)(135),(153),(24),(135),(24)(153),(24)(13),(24)(15),(24)(35),(13),(13),(35)}, $H_{12}^{(12)}$ ={(1),(25)(134),(143),(25),(134),(25)(143),(25)(13),(25)(14),(25)(34),(13), (14)，(34)}，$H_{13}^{(12)}$ = {(1)，(34)(125)，(152)，(34)，(125)，(34)(152)，(34)(12)，(34)(15)，(34)(25)，(12)，(15)，(25)}，$H_{14}^{(12)}$ = {(1)，(35)(124)，(142)，(35)，(124)，(35)(142)，(35)(12)，(35)(14)，(35)(24)，(12)，(14)，(24)}，$H_{15}^{(12)}$ = {(1)，(45)(123)，(132)，(45)，(123)，(45)(132)，(45)(12)，(45)(13)，(45)(23)，(12)，(13)，(23)}.

(j) 20 **阶子群(共 6 个)**：$H_1^{(20)}$ = {(1)，(12345)，(13524)，(14253)，(15432)，(12)(35)，(13)(45)，(14)(23)，(15)(24)，(25)(34)，(1243)，(1325)，(1452)，(1534)，(2354)，(1342)，(1523)，(1254)，(1435)，(2453)}，$H_2^{(20)}$ = {(1)，(12354)，(13425)，(15243)，(14532)，(12)(34)，(13)(45)，(15)(23)，(14)(25)，(24)(35)，(1253)，(1324)，(1542)，(1435)，(2345)，(1352)，(1423)，(1245)，(1534)，(2543)}，$H_3^{(20)}$ = {(1)，(12435)，(14523)，(13254)，(15342)，(12)(45)，(14)(35)，(13)(24)，(15)(23)，(25)(34)，(1234)，(1425)，(1352)，(1543)，(2453)，(1432)，(1524)，(1253)，(1345)，(2354)}，$H_4^{(20)}$ = {(1)，(12453)，(14325)，(15234)，(13542)，(12)(34)，(14)(35)，(15)(24)，(13)(25)，(23)(45)，(1254)，(1423)，(1532)，(1345)，(2435)，(1452)，(1324)，(1235)，(1543)，(2534)}，$H_5^{(20)}$ = {(1)，(12534)，(15423)，(13245)，(14352)，(12)(45)，(15)(34)，(13)(25)，(14)(23)，(24)(35)，(1235)，(1524)，(1342)，(1453)，(2543)，(1532)，(1425)，(1243)，(1354)，(2345)}，$H_6^{(20)}$ = {(1)，(12543)，(15324)，(14235)，(13452)，(12)(35)，(15)(34)，(14)(25)，(13)(24)，(23)(45)，(1245)，(1523)，(1432)，(1354)，(2534)，(1542)，(1325)，(1234)，(1453)，(2435)}.

(k) 24 **阶子群(共 5 个)**：$H_1^{(24)}$ = {(1)，(12)，(13)，(14)，(23)，(24)，(34)，(12)(35)，(13)(24)，(14)(23)，(123)，(132)，(124)，(142)，(134)，(143)，(234)，(243)，(1234)，(1432)，(1243)，(1342)，(1324)，(1423)}，$H_2^{(24)}$ = {(1)，(12)，(13)，(15)，(23)，(25)，(35)，(12)(35)，(13)(25)，(15)(23)，(123)，(132)，(125)，(152)，(135)，(153)，(235)，(253)，(1235)，(1532)，(1253)，(1352)，(1325)，(1523)}，$H_3^{(24)}$ = {(1)，(12)，(14)，(15)，(24)，(25)，(45)，(12)(45)，(14)(25)，(15)(24)，(124)，(142)，(125)，(152)，(145)，(154)，(245)，(254)，(1245)，(1542)，(1254)，(1452)，(1425)，(1524)}，$H_4^{(24)}$ = {(1)，(13)，(14)，(15)，(34)，(35)，(45)，(13)(45)，(14)(35)，(15)(34)，(134)，(143)，(135)，(153)，(145)，(154)，(345)，(354)，(1345)，(1543)，(1354)，(1453)，(1435)，(1534)}，$H_5^{(24)}$ = {(1)，(23)，(24)，(25)，(34)，(35)，(45)，(23)(45)，(24)(35)，(25)(34)，(234)，(243)，(235)，(253)，(245)，(254)，(345)，(354)，(2345)，(2543)，(2354)，(2453)，(2435)，(2534)}.

(l) 60 **阶子群(共 1 个)**：$H_1^{(60)}$ = {(1)，(12)(34)，(13)(24)，(14)(23)，(12)(35)，(13)(25)，(15)(23)，(12)(45)，(14)(25)，(15)(24)，(13)(45)，(14)(35)，(15)(34)，(23)(45)，(24)(35)，(25)(34)，(123)，(124)，(125)，(134)，(135)，(145)，(234)，(235)，(245)，(345)，(132)，(142)，(152)，(143)，(153)，(154)，(243)，(253)，(254)，(354)，(12345)，(13524)，(14253)，(15432)，(12354)，(13425)，(15243)，(14532)，(12435)，(14523)，(13254)，(15342)，(12453)，(14325)，(15234)，(13542)，(12534)，(15423)，(13245)，(14352)，(12543)，(15324)，(14235)，(13452)}.