

董朝丽 陆万春. Markov 切换下含疫苗接种和垂直感染的随机 SIRS 模型性质 [J]. 江西师范大学学报(自然科学版) 2023 47(4): 336-341.

DONG Zhaoli, LU Wanchun. The properties of stochastic SIRS model with vaccination and vertical transmission under Markovian switching [J]. Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) 2023 47(4): 336-341.

文章编号: 1000-5862(2023)04-0336-06

Markov 切换下含疫苗接种和垂直感染的 随机 SIRS 模型性质

董朝丽¹, 陆万春^{2*}

(1. 江西农业大学南昌商学院, 江西 赣江新区 332020; 2. 萍乡学院数学系, 江西 萍乡 337000)

摘要: 该文研究了一类含 Markov 机制切换和疫苗接种及垂直感染的随机 SIRS 模型的动力学性质, 通过构造带切换的 Lyapunov 函数, 研究了模型具有平稳分布的判别条件, 并研究了在模型中疾病趋于灭绝的阈值. 最后通过举例来验证研究结果. 结果表明: 模型具有平稳分布和趋于灭绝的阈值是相同的.

关键词: Markov 机制切换; 随机 SIRS 模型; 疫苗接种; 垂直感染; 动力性质

中图分类号: O 211.6; O 29 文献标志码: A DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2023.04.02

0 引言

流行病学是研究人们健康分布状况和影响因素以探索病因、提供预防措施来达到消灭、控制疾病目的的学科. 对疾病的传播机制进行建模并研究模型性质是预防和控制疾病的重要途径之一. 当疾病暴发时, 对人群接种疫苗是控制疾病的一种有效手段. 因不同地区受经济发展水平、文化观念等各种因素影响导致只有一部分人能接种疫苗而达不到全员接种. 一些学者已经研究了含部分接种疫苗的传染病模型, 获得了一些性质^[1-3]. A. Lahrouz 等^[1]利用 Lyapunov 函数法研究了带有疫苗接种的 SIRS 模型的稳定性. 一般地, 带部分接种的 SIRS 模型可以表示为

$$\begin{cases} dS(t) = (1-p)\Lambda - d_1S(t) - \beta S(t)I(t) + \lambda R(t), \\ dI(t) = \beta S(t)I(t) - (d_2+r)I(t), \\ dR(t) = p\Lambda + rI(t) - (d_3+\lambda)R(t), \end{cases}$$

其中 p 为疫苗接种的比例 $0 \leq p < 1$, Λ 为由移民所产

生的种群人口更新率, $S(t)$ 、 $I(t)$ 和 $R(t)$ 分别表示易感者类、感染者和恢复类的数量, d_1 、 d_2 、 d_3 分别为这 3 类人员的死亡率, 由实际来看 $d_2 \geq d_1$ 的假设是合理的, β 为有效接触率, λ 为恢复类人员失去免疫重新回到易感者类人员的比例, r 为疾病的治愈率.

在现实生活中, 疾病传播途径复杂多样. 在女性感染者怀孕或分娩期间, 疾病可直接从母体传播给胚胎或婴儿, 即垂直传染^[4], 如乙型肝炎、艾滋病、脊髓灰质炎等. 许多研究人员建立了各种垂直传播的流行病模型^[4-6], 并讨论了其对系统动力学的影响. Zhang Xiaobing 等^[5]研究了一类具有垂直传播的随机 SIS 流行病模型, 建立了模型存在平稳概率测度的充分条件. 具有垂直传播的 SIRS 模型可表示为

$$\begin{cases} dS(t) = (1-p)\Lambda - d_1S(t) - \beta S(t)I(t) + \lambda R(t) + \\ b(S(t) + R(t)) + (1-c)bI(t), \\ dI(t) = \beta S(t)I(t) + cbI(t) - (d_2+r)I(t), \\ dR(t) = p\Lambda + rI(t) - (d_3+\lambda)R(t), \end{cases}$$

其中 b 为出生率, c 为感染的母系后代被感染的垂

收稿日期: 2023-06-05

基金项目: 国家自然科学基金(62063029)和江西省教育厅科学技术研究课题(GJJ209103)资助项目.

作者简介: 董朝丽(1985—), 女, 山西晋城人, 讲师, 主要从事随机微分方程研究. E-mail: dongzhao-li@qq.com

通信作者: 陆万春(1978—), 男, 江西信丰人, 副教授, 主要从事复分析、随机微分方程等的研究. E-mail: luwanchun540@163.com

直传染率. 假设 $b < \min\{d_1, d_2, d_3\}$, $0 \leq c \leq 1$.

在生活中充满了各类不确定性, 这种不确定性会给疾病的动力行为带来不同程度的影响. 因此, 很多学者研究了带有随机扰动的传染病模型的不同性质^[4-7]. 学者们从不同角度对参数进行随机扰动, 且对死亡率进行扰动, 即 $d_i \rightarrow d_i - \sigma_i dB_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$), $B_i(t)$ 为定义在概率空间上的 Brown 运动. 本文将研究这类随机扰动对模型的影响. 众所周知, 疾病的传播会受季节变化或湿度等环境影响, 这类影响可用连续时间 Markov 链刻画. 正因其具有更广泛的应用, 所以很多学者研究了含有 Markov 切换的传染病模型^[8-11]. Cai Siyang 等^[8] 利用 M -矩阵理论给出并证明了模型疾病灭绝和持续阈值.

综上所述, 本文研究具有疫苗接种和垂直传染且带 Markov 切换的随机 SIRS 模型的动力学性质, 其形式如下:

$$\begin{cases} dS(t) = ((1-p(\alpha_t))\Lambda(\alpha_t) - d_1(\alpha_t)S(t) - \beta(\alpha_t)S(t)I(t) + b(\alpha_t)(S(t)+R(t)) + (1-c(\alpha_t)) \cdot b(\alpha_t)I(t) + \lambda(\alpha_t)R(t))dt + \sigma_1(\alpha_t)S(t)dB_1(t), \\ dI(t) = (\beta(\alpha_t)S(t)I(t) + c(\alpha_t)b(\alpha_t)I(t) - (d_2(\alpha_t) + r(\alpha_t))I(t))dt + \sigma_2(\alpha_t)I(t)dB_2(t), \\ dR(t) = (p(\alpha_t)\Lambda(\alpha_t) + r(\alpha_t)I(t) - (d_3(\alpha_t) + \lambda(\alpha_t))R(t))dt + \sigma_3(\alpha_t)R(t)dB_3(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ 是不可约的且含状态空间 $N^* = \{1, 2, \dots, N\}$ 的连续时间 Markov 链, 转移概率可由

$$P(\alpha_{t+\delta} = j | \alpha_t = i) = \begin{cases} q_{ij}\delta + o(\delta), & i \neq j, \\ 1 + q_{ii}\delta + o(\delta), & i = j \end{cases}$$

确定, 则 Q 矩阵为 $Q = (q_{ij})_{N \times N}$, 通过求解方程组

$$\begin{cases} \pi Q = \mathbf{0}, \\ \sum_{j=1}^N \pi_j = 1 \end{cases}$$

可得其平稳分布 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$.

当前, 文献[12-14]的方法对于研究随机生物模型非常有效, 其主要思想是: 当 $I(t)$ 很小时, $R(t)$ 也将变得很小, 使得 $S(t)$ 趋于构造的新随机变量 $\bar{S}(t)$. 它能简化一些条件, 在较少的条件下获得模型各类性质. 但是, 对于本文的模型, 由于 $R(t)$ 中 $p\Lambda$ 的存在, 所以即使 $I(t)$ 变小也不能使 $R(t)$ 趋于很小. 因此上述方法对于本文模型的研究存在一定的困难. Lyapunov 函数法是一类经典的方法, 它通过构造合适的函数来研究模型性质, 但也存在一定缺陷, 由于含 Markov 切换模型获取的疾病灭绝和持久性的阈值很难一致, 所以 2 个值往往存在一定的差别^[10]. 本文通过新的方法来研究疾病的平稳分布

和灭绝性的条件, 并且保证在 2 个条件中的阈值是一致的.

1 基础知识

令 $\tilde{a} = \max_{k \in N^*} \{a(k)\}$, $\hat{a} = \min_{k \in N^*} \{a(k)\}$, $a \vee b = \max\{a, b\}$, $a \wedge b = \min\{a, b\}$, $\mathbf{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_i > 0, i = 1, 2, 3\}$. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$ 为带流的完备概率空间. 带 Markov 切换的 SDE 为

$$dX(t) = f(X, \Lambda_t)dt + g(X, \Lambda_t)dB(t),$$

其中 $f: \mathbf{R}^n \times N^* \rightarrow \mathbf{R}^n$, $g: \mathbf{R}^n \times N^* \rightarrow \mathbf{R}^{n \times m}$, $B(t)$ 是 m 维标准 Brown 运动. 对于 $l \in N^*$ 和任意函数 $V \in C^2(\mathbf{R}^n \times N^*; \mathbf{R}^n)$ 定义算子

$$L_V(X, l) = V_x(X, l)f(X, l) + \text{tr}(g^T(X, l)V_{xx}g(X, l)) / 2 + \sum_{j=1}^N q_{lj}V(X, j).$$

引理 1 对于初始值 $(s, i, r, \alpha_0) \in \mathbf{R}_+^3 \times N^*$, 模型 (1) 有唯一的正解. 另外, 设 2 个常数 p 和 q 满足 $0 < q < p_1 < \min\{2d_i(k) / \sigma_i^2(k), 1\}$, 则有正数 C_1 和 C_2 使得

$$E((S(t) + I(t) + R(t))^{1+p_1} + S(t)^{-q}) \leq ((s+i+r)^{1+p_1} + s^{-q})e^{-C_1 t} + C_2 / C_1.$$

证 模型正解的证明是平凡的, 本文在此省略. 现证后半部分结论, 令函数 $f(S, I, R, k) = (S+I+R)^{1+p_1} + S^{-q}$, $S, I, R \in \mathbf{R}_+^3$, 则有

$$\begin{aligned} L_f(S, I, R, k) &= (1+p_1)(S+I+R)^{p_1}(\Lambda(k) - d_1(k) \cdot S - d_2(k)I - d_3(k)R + b(k)(S+I+R)) + p_1(1+p_1) \cdot (S+I+R)^{p_1-1}(\sigma_1^2(k)S^2 + \sigma_2^2(k)I^2 + \sigma_3^2(k)R^2) / 2 - qS^{-1-q} \cdot ((1-p(k))\Lambda(k) - (d_1(k) - b(k))S - \beta(k)SI + (\lambda(k) + b(k))R + (1-c(k))b(k)I) + q(1+q)S^{-2-q}\sigma_1^2(k)S^2 / 2 = (1+p_1)(S+I+R)^{p_1-1}(-(S+I+R)((d_1(k) - b(k))S + (d_2(k) - b(k))I + (d_3(k) - b(k))R) + p_1(\sigma_1^2(k)S^2 + \sigma_2^2(k)I^2 + \sigma_3^2(k)R^2) / 2) + \Lambda(k)(1+p_1)(S+I+R)^{p_1} + qS^{-q}(-(1-p(k))\Lambda(k) / S + d_1(k) - b(k) - (\lambda(k) + b(k)) \cdot R / S - (1-c(k))b(k)I + (1+q)\sigma_1^2(k) / 2) + q\beta(k)S^{-q}I. \end{aligned}$$

由于

$$S^{-q}I \leq (p_1 + q)(S^{-q})^{(2+p_1+q)/(p_1+q)} / (2+p_1+q) + 2I^{(2+p_1+q)/2} / (2+p_1+q) \leq (p_1+q)S^{-q(2+p_1+q)/(p_1+q)} / (2+p_1+q) + 2(SI)^{(2+p_1+q)/2} / (2+p_1+q),$$

且令

$$C_1 = \min\{d_1(k) - b(k) - p_1\sigma_1^2(k) / 2, d_2(k) - b(k) - p_1\sigma_2^2(k) / 2, d_3(k) - b(k) - p_1\sigma_3^2(k) / 2, (d_1(k) +$$

$d_2(k) / 2 \{ d_1(k) + d_3(k) / 2 \} / 2 \{ d_2(k) + d_3(k) / 2 \}$,
 则 $C_1 > 0$ 且

$$L_f \leq -C_1(1+p_1) (S+I+R)^{1+p_1} + \tilde{A}(1+p_1) (S+I+R)^{p_1} + 2q\tilde{\beta}(S+I)^{(2+p_1+q)/2} / (2+p_1+q) + qS^{-q} (-(1-\tilde{p}) \hat{A}/S + d_1(k) + (1+q) \sigma_1^2(k) / 2 + \tilde{\beta}(p_1+q) S^{-2q/(p_1+q)} / (2+p_1+q)) .$$

因此 $L_f + C_1 f \leq C_2$ 其中

$$C_2 = \sup_{S, I, R, k \in \mathbf{R}_+^{3 \times N} *} (-C_1 p_1 (S+I+R)^{1+p_1} + \tilde{A}(1+p_1) \cdot (S+I+R)^{p_1} + 2q\tilde{\beta}(S+I)^{(2+p_1+q)/2} / (2+p_1+q) + qS^{-q} (-(1-\tilde{p}) \hat{A}/S + d_1(k) + (1+q) \sigma_1^2(k) / 2 + \tilde{\beta}(p_1+q) S^{-2q/(p_1+q)} / (2+p_1+q)) + C_1 S^{-q}) < +\infty .$$

定义停时 $\zeta_n = \inf\{t > 0: f(S(t), I(t), R(t), \alpha_t) \geq n\}$. 因此 ,

$$E(e^{C_1(t \wedge \zeta_n)} f(S(t \wedge \zeta_n), I(t \wedge \zeta_n), R(t \wedge \zeta_n), \alpha_{t \wedge \zeta_n})) \leq f(S(0), I(0), R(0), \alpha_0) + E \int_0^{t \wedge \zeta_n} e^{C_1 u} (L_f(S(s), I(s), R(s), \alpha_s) + C_1 f) du \leq f(S(0), I(0), R(0), \alpha_0) + C_2 e^{C_1 t} / C_1 .$$

令 $n \rightarrow \infty$, 则有 $E(f(S(t), I(t), R(t), \alpha_t)) \leq f(S(0), I(0), R(0), \alpha_0) e^{-C_1 t} + C_2 / C_1$.

引理 2 对于 $i = 1, 2, \dots, N$, 方程组

$$\begin{cases} \beta(i) - (d_1(i) - b(i)) v_1(i) + \sum_{j \in N^*} q_{ij} v_1(j) = 0 , \\ (b(i) + \lambda(i)) v_1(i) - (d_3(i) + \lambda(i)) v_2(i) + \sum_{j \in N^*} q_{ij} v_2(j) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

有解 $(v_1(1), v_1(2), \dots, v_1(N), v_2(1), v_2(2), \dots, v_2(N))$, 其中各分量 $v_1(i) \geq 0, v_2(i) \geq 0, i = 1, 2, \dots, N$.

证 (2) 式等同于矩阵方程 $AX = \beta$, 其中 $A =$

$$\begin{pmatrix} A_1 & O \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix}_{2N \times 2N} \text{ , 且}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} l_{11} & -q_{12} & \cdots & -q_{1N} \\ -q_{21} & l_{22} & \cdots & -q_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -q_{N1} & -q_{N2} & \cdots & l_{NN} \end{pmatrix} ,$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{NN} \end{pmatrix} ,$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} n_{11} & -q_{12} & \cdots & -q_{1N} \\ -q_{21} & n_{22} & \cdots & -q_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -q_{N1} & -q_{N2} & \cdots & n_{NN} \end{pmatrix} ,$$

$$X = (v_1(1), v_1(2), \dots, v_1(N), v_2(1), v_2(2), \dots, v_2(N))^T, \beta = (\beta(1), \beta(2), \dots, \beta(N), \rho, \dots, \rho)^T ,$$

其中 $l_{ii} = d_1(i) - b(i) - q_{ii}, m_{ii} = -b(i) - \lambda(i), n_{ii} = d_3(i) + \lambda(i) - q_{ii}, i = 1, 2, \dots, N$.

从矩阵 A_1 可以看出: 其各阶顺序主子式在主对角线上的元素为正而同行其他元素为负, 且 $d_1(i) - b(i) - q_{ii} = d_1(i) - b(i) + \sum_{j \neq i} q_{ij} > \sum_{j < i} q_{ij}, i = 1, 2, \dots, N$. 同理矩阵 A 的各 $i (i = N+1, N+2, \dots, 2N)$ 阶顺序主子式行列式是正的, 故矩阵 A 为非奇异 M 矩阵, 则根据文献 [15] 中定理 2.10 可得 $AX = \beta$ 有非负解

$$X = (v_1(1), v_1(2), \dots, v_1(N), v_2(1), v_2(2), \dots, v_2(N))^T .$$

2 模型 (1) 的平稳分布

本部分将研究模型 (1) 存在平稳分布的条件.

定理 1 当 $R^S = \sum_{k \in N^*} \pi_k R_k > 0$ 其中

$$R_k = v_1(k) (1-p(k)) \Lambda(k) + v_2(k) p(k) \Lambda(k) - (d_2(k) + r(k) - c(k) b(k) + \sigma_2^2(k) / 2) ,$$

其中 $v_i(k) (i = 1, 2)$ 如引理 2 中所定义, 模型 (1) 的解 $(S(t), I(t), R(t), \alpha_t)$ 具有唯一的平稳分布.

证 令 Lyapunov 函数

$$V_1 = -v_1(k) (S+I) - v_2(k) R - \ln I - \omega_k ,$$

$$V_2 = (S(t) + I(t) + R(t))^{1+a} / (1+a) ,$$

$$V_3 = -\ln S - \ln R, V(S, I, R, k) = MV_1 + V_2 + V_3 ,$$

其中出现的常数 ω_k 和 a 将在后文给出. 易知函数 $V(S, I, R, k)$ 是连续的, 含有最小值点 (S_0, I_0, R_0, k_0) , 因此 $\tilde{V}(S, I, R, k) = V(S, I, R, k) - V(S_0, I_0, R_0, k_0)$ 是非负的. 根据 Itô 公式, 有

$$\begin{aligned} dV_1 = & -v_1(k) ((1-p(k)) \Lambda(k) - (d_1(k) - b(k)) S + (b(k) + \lambda(k)) R - (d_2(k) + r(k) - b(k)) I) - \sum_{j \in N^*} q_{kj} v_1(j) \cdot \\ & (S+I) - v_2(k) (p(k) \Lambda(k) + r(k) I - (d_3(k) + \lambda(k)) R) - \\ & \sum_{j \in N^*} q_{kj} v_2(j) R - (\beta(k) S I + c b(k) I(t) - (d_2(k) + r(k)) I) / \\ & I + \sigma_2^2(k) / 2 - \sum_{j \in N^*} q_{kj} \omega_j = -v_1(k) ((1-p(k)) \Lambda(k) - v_2(k) \cdot \\ & p(k) \Lambda(k) + d_2(k) + r(k) - c b(k) + \sigma_2^2(k) / 2 - \sum_{j \in N^*} q_{kj} \omega_j + \\ & (v_1(k) (d_1(k) - b(k)) - \sum_{j \in N^*} q_{kj} v_1(j) - \beta(k)) S + \\ & (v_1(k) (d_2(k) + r(k) - b(k)) - \sum_{j \in N^*} q_{kj} v_1(j) - \\ & v_2(k) r(k)) I + (v_2(k) (d_3(k) + \lambda(k)) - v_1(k) (b(k) + \end{aligned}$$

$$\lambda(k) - \sum_{j \in N^*} q_{kj} v_2(j) R.$$

由式(2)知,

$$L_{V_1} = -R_k - \sum_{j \in N^*} q_{kj} \omega_j + (v_1(k) (d_2(k) + r(k) - d_1(k)) + \beta(k) - v_2(k) r(k)) I.$$

令 $\vec{R} = (R_1, R_2, \dots, R_N)^T$ 且 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)^T$

为方程 $Q\omega = \sum_{k \in N^*} \pi_k R_k \vec{1} - \vec{R}$ 的解 则 $\sum_{j=1}^N q_{kj} \omega_j + R_k = \sum_{k \in N^*} \pi_k R_k$. 因此

$$L_{V_1} = -R^S + (v_1(k) (d_2(k) + r(k) - d_1(k)) + \beta(k) - v_2(k) r(k)) I.$$

对 V_2 和 V_3 分别应用 Itô 公式计算 并记 $d(k) = d_1(k) \wedge d_2(k) \wedge d_3(k)$, $\sigma^2(k) = \sigma_1^2(k) \vee \sigma_2^2(k) \vee \sigma_3^2(k)$ 得

$$L_{V_2} = (S+I+R)^a (\Lambda(k) - d_1(k) S - d_2(k) I - d_3(k) R + b(k) (S+I+R)) + a(S+I+R)^{a-1} (\sigma_1^2(k) S^2 + \sigma_2^2(k) I^2 + \sigma_3^2(k) R^2) / 2 \leq \tilde{\Lambda}(S+I+R)^a - (d(k) - b(k)) (S+I+R)^{1+a} + a\sigma^2(k) (S+I+R)^{a+1} / 2 \leq \tilde{\Lambda}(S+I+R)^a - (d(k) - b(k) - a\sigma^2(k) / 2) (S+I+R)^{1+a}.$$

设常数 a 是正的且充分小使得 $d(k) - b(k) - a\sigma^2(k) / 2 > 0, k \in N^*$.

另外,

$$L_{V_3} = -((1-p(k)) \Lambda(k) - (d_1(k) - b(k)) S - \beta(k) SI + (b(k) + \lambda(k)) R) / S + \sigma_1^2(k) / 2 - (1-c(k)) \cdot b(k) I / S - (p(k) \Lambda(k) + r(k) I - (d_3(k) + \lambda(k)) R) / R + \sigma_3^2(k) / 2 \leq -(1-\tilde{p}) \hat{\Lambda} / S + \beta(k) I - (\lambda(k) + b(k)) R / S + d_1(k) - b(k) + \sigma_1^2(k) / 2 - (1-c(k)) b(k) I / S - \hat{p} \hat{\Lambda} / R - r(k) I / R + d_3(k) + \lambda(k) + \sigma_3^2(k) / 2.$$

因此

$$L_{\tilde{V}} \leq -MR^S + M(\tilde{v}_1(\tilde{d}_2 + \tilde{r}) + \tilde{\beta} - \tilde{v}_2 \tilde{r}) I + \tilde{\Lambda}(S+I+R)^a - (\hat{d} - b(k) - a\sigma^2 / 2) (S+I+R)^{1+a} - (1-\tilde{p}) \hat{\Lambda} / S + \beta(k) I - \hat{p} \hat{\Lambda} / R - r(k) I / R + d_1(k) - b(k) + d_3(k) + \lambda(k) + (\sigma_1^2(k) + \sigma_3^2(k)) / 2.$$

接下来构造一个开集 D , 并分别证明在区域 R_+^3 / D 中有 $L_{\tilde{V}} \leq -1$. 此过程与在文献[10]中的定理 4.1 类似, 在此省略.

注 1 由 R^S 的表达式可知 $R^S > 0$ 等价于

$$\tilde{R}^S = \sum_{k \in N^*} \pi_k (v_1(k) (1-p(k)) \Lambda(k) + v_2(k) p(k) \Lambda(k)) / \sum_{k \in N^*} \pi_k (d_2(k) + r(k) - c(k) b(k) + \sigma_2^2(k) / 2) > 1. \quad (3)$$

在流行病学上, 平稳分布意味着疾病将持续下去, 即当 $\tilde{R}^S > 1$ 时疾病会持续下去.

3 疾病的灭绝性

由于在 $R(t)$ 中参数 $p\Lambda$ 和 Markov 机制切换因素的存在, 所以在很多文献中疾病持久和灭绝的阈值并不相同. 本部分利用新的方法来得到二者一致的阈值.

定理 2 若 $\beta(i) \geq (v_2(i) - v_1(i)) r(i), i \in N^*$, 且 $\tilde{R}^S < 1$ 则有 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\ln I(t)) / t \leq R^S < 0$, a. s. . 这意味着疾病将趋于灭绝.

证 令 $V_4 = v_1(k) (S+I), V_5 = v_2(k) R$ 可得

$$L(v_1(k) (S+I)) = v_1(k) ((1-p(k)) \Lambda(k) - (d_1(k) - b(k)) S - (d_2(k) + r(k) - b(k)) I) + v_1(k) (b(k) + \lambda(k)) R + \sum_{j \in N^*} q_{kj} v_1(j) (S+I),$$

$$L(v_2(k) R) = v_2(k) (p(k) \Lambda(k) + r(k) I - (d_3(k) + \lambda(k)) R) + \sum_{j \in N^*} q_{kj} v_2(j) R.$$

2 者相加可得

$$L(v_1(k) (S+I) + v_2(k) R) = v_1(k) (1-p(k)) \Lambda(k) + v_2(k) p(k) \Lambda(k) - (v_1(k) (d_1(k) - b(k)) - \sum_{j \in N^*} q_{kj} v_1(j)) S - (v_1(k) (d_2(k) + r(k) - b(k)) - \sum_{j \in N^*} q_{kj} v_1(j) - v_2(k) r(k)) I + (v_1(k) (\lambda(k) + b(k)) - v_2(k) (d_3(k) + \lambda(k)) + \sum_{j \in N^*} q_{kj} v_2(j)) R.$$

由式(2)和假设 $\beta(i) \geq (v_2(i) - v_1(i)) r(i)$ 知

$$L(V_4 + V_5) = v_1(k) (1-p(k)) \Lambda(k) + v_2(k) p(k) \cdot \Lambda(k) - \beta(k) S - (\beta(k) + (d_2(k) - d_1(k)) v_1(k) - (v_2(k) - v_1(k)) r(k)) I \leq v_1(k) (1-p(\alpha_t)) \Lambda(\alpha_t) + v_2(k) p(k) \cdot \Lambda(k) - \beta(k) S.$$

对上式进行从 0 到 t 积分并除以 t , 有

$$E(\int_0^t \beta(\alpha_s) S(s) ds / t) \leq -E(V_4(t) + V_5(t)) / t + E(V_4(0) + V_5(0)) / t + \int_0^t (v_1(\alpha_s) (1-p(\alpha_s)) \Lambda(\alpha_s) + v_2(\alpha_s) p(\alpha_s) \Lambda(\alpha_s)) ds / t.$$

利用引理 1 和 Markov 链的遍历性可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \beta(\alpha_s) S(s) ds / t \leq \sum_{k \in N^*} \pi_k (v_1(k) (1-p(k)) \cdot \Lambda(k) + v_2(k) p(k) \Lambda(k)).$$

对 $\ln I(t)$ 应用 Itô 公式计算可得

$$d(\ln I(t)) = (\beta(\alpha_t) S(t) - (d_2(\alpha_t) + r(\alpha_t) + \sigma_2^2(k) / 2)) dt + \sigma_2(\alpha_t) dB_2(t),$$

所以,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\ln I(t)) / t = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \beta(\alpha_s) S(s) ds / t - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (d_2(\alpha_s) + r(\alpha_s) + \sigma_2^2(\alpha_s) / 2) ds / t \leq \sum_{k \in N^*} \pi_k (v_1(k) \cdot (1 - p(k)) \Lambda(k) + v_2(k) p(k) \Lambda(k) - (d_2(k) + r(k) - c(k) b(k) + \sigma_2^2(k) / 2)) ,$$

当 $\tilde{R}^S < 1$ 时,有 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\ln I(t)) / t < 0$, a. s. .

4 一些说明

前面得到了模型(1)平稳分布存在和疾病灭绝的判别条件. 2者所得到的阈值是一致的,结果是对一些文献的结论的推广.

1) 文献[5]研究了带垂直传播的随机 SIS 模型的平稳分布和疾病持久、灭绝的条件,得到了 2 个参数

$$\tilde{R}_0^S = \beta \Lambda / ((d+B-b)(d+\alpha+B+\gamma-bp+\sigma_2^2/2)) ,$$

$$R_0^S = \beta \Lambda / ((d+B-b+\sigma_1^2/2)(d+\alpha+B+\gamma-bp+\sigma_2^2/2)) > 1 \tag{4}$$

来判别不同行为,然而这 2 个值不一定相等,存在一定的间隔.

当模型(1)不含 Markov 切换(即随机环境只有 1 个)时,由引理 2 知 $v_1 = \beta / (d_1 - b)$ $v_2 = (\lambda + b) \beta / ((d_1 - b)(d_3 + \lambda))$ 则

$$\tilde{R}^{1S} = (v_1(1-p)\Lambda + v_2 p \Lambda) / (d_2 + r - cb + \sigma_2^2 / 2) = (\beta(1-p)\Lambda + \lambda \beta p \Lambda / (d_3 + \lambda)) / ((d_1 - b)(d_2 + r - cb + \sigma_2^2 / 2))$$

可作为在模型中疾病持久和灭绝的阈值. 特别地,

当疫苗接种率 $p = 0$ 时, \tilde{R}^S 可简化为 $\beta \Lambda / ((d_1 - b)(d_2 + r - cb + \sigma_2^2 / 2))$, 与式(4)中参数 \tilde{R}_0^S 类似(式(4)中 B 为由移民导致的人群输出率,本文设为 0).

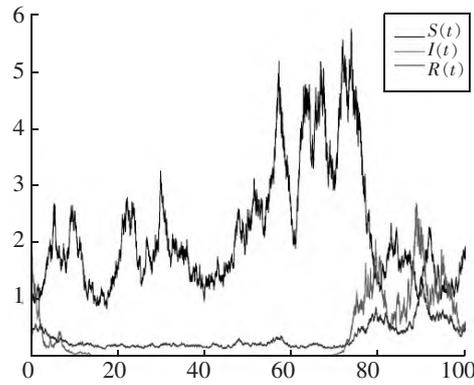
2) 当模型(1)不含 Markov 切换且疫苗接种率 $p = 0$ 和出生率、垂直传染率 $b = c = 0$ 时, 阈值 $\tilde{R}^S = \beta \Lambda / (d_1 \cdot (d_2 + r + \sigma_2^2 / 2))$, 该结果与文献[12]中结果一致.

3) 从式(3)可以看出,白噪声 $B(t)$ 的扰动可使 \tilde{R}^S 值变小,当 $\tilde{R}^S < 1$ 时,可使得疾病趋于灭绝,这表明白噪声有利于疾病趋于灭绝.

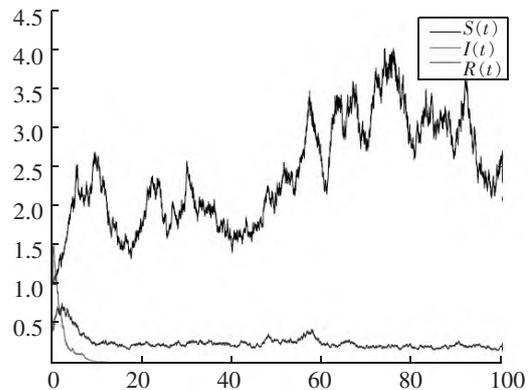
例 1 设 $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ 为概率空间上 $N^* = \{1, 2\}$ 的 Markov 链,其 Q 矩阵为 $Q = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix}$, 则其平稳分布为 $\pi = (b / (a+b), a / (a+b))$.

设 $\Lambda(1) = 0.20, \Lambda(2) = 0.15$, 记 $\Lambda = (0.20,$

$0.15)$. 同理 $p = (0.60, 0.75), d_1 = (0.08, 0.10), d_2 = (0.20, 0.15), d_3 = (0.05, 0.08), \beta = (0.25, 0.10), \lambda = (0.60, 0.40), b = (0.03, 0.05), c = (0.10, 0.20), r = (0.30, 0.40), \sigma_1 = (0.20, 0.10), \sigma_2 = (0.40, 0.20), \sigma_3 = (0.20, 0.15)$, 则根据计算得在第 1 个随机环境中 $\tilde{R}^{1S} = 1.6531 > 1$, 在第 2 个随机环境中 $\tilde{R}^{2S} = 0.4687 < 1$, 而 $R^S = -0.0949 < 1$. 这表明在环境 1 中疾病将持续下去(见图 1(a)), 在环境 2 中疾病将灭绝(见图 1(b)), 而在 Markov 切换的作用下由 $R^S < 1$ 导致疾病将灭绝(见图 2).



(a) 随机环境 1



(b) 随机环境 2

图 1 在例 1 中各参数下模型(1)在随机环境中的轨迹

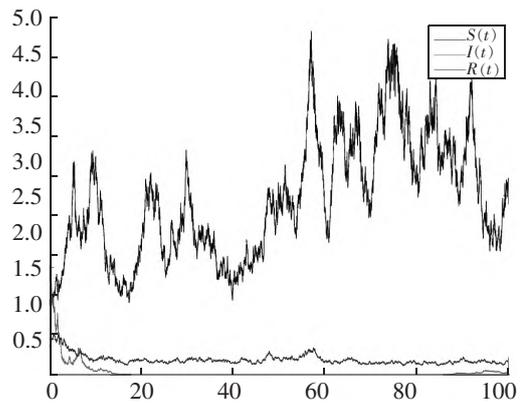


图 2 在例 1 中各参数下模型(1)在 Markov 随机环境中的轨迹

5 结语

本文研究一类含 Markov 机制切换和疫苗接种及垂直感染的随机 SIRS 模型的动力学性质,通过构造合适的函数研究了模型具有平稳分布的阈值,并研究了在模型中疾病趋于灭绝的条件. 二者得到的阈值 $R^S = \sum_{k \in N^*} \pi_k R_k$ 是一致的,这可用于判别模型 (1) 的不同行为.

6 参考文献

- [1] LAHROUZ A, OMARI L, KIOUACH D, et al. Complete global stability for an SIRS epidemic model with generalized non-linear incidence and vaccination [J]. *Applied Mathematics and Computation* 2012 218(11): 6519-6525.
- [2] ZHAO Yanan, JIANG Daqing. The threshold of a stochastic SIS epidemic model with vaccination [J]. *Applied Mathematics and Computation* 2014 243: 718-727.
- [3] JIN Manli. Classification of asymptotic behavior in a stochastic SIS epidemic model with vaccination [J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2019 521: 661-666.
- [4] KIOUACH D, SABBAR Y. Stability and threshold of a stochastic SIRS epidemic model with vertical transmission and transfer from infectious to susceptible individuals [J]. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2018, 2018(1): 7570296.
- [5] ZHANG Xiaobing, CHANG Suqin, SHI Qihong, et al. Qualitative study of a stochastic SIS epidemic model with vertical transmission [J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications* 2018 505: 805-817.
- [6] CHEN Yang, ZHAO Wencai. Asymptotic behavior and threshold of a stochastic SIQS epidemic model with vertical transmission and Beddington-DeAngelis incidence [J]. *Advances in Difference Equations* 2020 2020(1): 353.
- [7] SIMON M. SIR epidemics with stochastic infectious periods [J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 2020 130(7): 4252-4274.
- [8] CAI Siyang, CAI Yongmei, MAO Xuerong. A stochastic differential equation SIS epidemic model with regime switching [J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems: Series B* 2021 26(9): 4887-4905.
- [9] LI Dan, LIU Shengqiang, CUI Jingan. Threshold dynamics and ergodicity of an SIRS epidemic model with Markovian switching [J]. *Journal of Differential Equations*, 2017, 263(12): 8873-8915.
- [10] GUO Xiaoxia, LUO Jiaowan. Stationary distribution and extinction of SIR model with nonlinear incident rate under Markovian switching [J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications* 2018 505: 471-481.
- [11] ZHANG Xinhong, JIANG Daqing, ALSAEDI A, et al. Stationary distribution of stochastic SIS epidemic model with vaccination under regime switching [J]. *Applied Mathematics Letters* 2016 59: 87-93.
- [12] DIEU N T, NGUYEN D H, DU N H, et al. Classification of asymptotic behavior in a stochastic SIR model [J]. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2016, 15(2): 1062-1084.
- [13] NGUYEN D H, YIN G, ZHU Chao. Long-term analysis of a stochastic SIRS model with general incidence rates [J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 2020 80(2): 814-838.
- [14] DU N H, NHU N N. Permanence and extinction for the stochastic SIR epidemic model [J]. *Journal of Differential Equations* 2020 269(11): 9619-9652.
- [15] MAO Xuerong, YUAN Chenggui. *Stochastic differential equations with Markovian switching* [M]. London: Imperial College Press 2006.

The Properties of Stochastic SIRS Model with Vaccination and Vertical Transmission Under Markovian Switching

DONG Zhaoli¹, LU Wanchun^{2*}

(1. Nanchang Business College Jiangxi Agricultural University, Ganjiang New District Jiangxi 332020, China;
2. Department of Mathematics, Pingxiang University, Pingxiang Jiangxi 337000, China)

Abstract: The dynamic properties of a class of stochastic SIRS model with vaccination and vertical transmission under Markovian switching are studied. By constructing the Lyapunov function with switching, the discriminant conditions of the model with stationary distribution are studied, and the threshold of disease tending to extinction in the model is studied. Finally, example is presented to verify the theoretical results. The conclusions show that the threshold of the model for stationary distribution and extinction is consistent.

Key words: Markovian switching; stochastic SIRS model; vaccination; vertical transmission; dynamic properties

(责任编辑: 曾剑锋)