文章编号: 1000-5862(2012)04-0355-03

直觉权与直觉模糊化拓扑的关系

付云鹏[1]，袁学海[2]，徐红艳[1]，王利香[3]

(1. 辽宁大学信息学院，辽宁 沈阳 110036; 2. 大连理工大学电子信息与电气工程学部，辽宁 大连 116024;
3. 潍坊学院数学与信息科学学院 山东 潍坊 261061)

摘要：通过提出直觉权和直觉模糊化拓扑的概念，阐述了直觉模糊化拓扑可以通过直觉权来刻画，给出了应用直觉权来刻画直觉模糊化拓扑的具体方法，证明了任一个直觉权可以确定一个直觉模糊化拓扑，任一个直觉模糊化拓扑可以确定一个直觉权，并且直觉权与直觉模糊化拓扑之间存在一一对应的关系.

关键词：权；直觉权；模糊化拓扑；直觉模糊化拓扑
中图分类号: O 159　　文献标志码: A

0 引言

模糊拓扑学的研究开始于 C.L.Chang[1]，经过几十年的发展已经成为一门独立的学科, C.L.Chang 将开集、闭集、邻域、连续性、紧性等概念推广到模糊拓扑空间中. 王国俊[2]系统地介绍了 L_模糊拓扑空间理论. 刘锋和张超[3]通过使用 Godel 蕴涵算子给出了R_G-模糊化拓扑的导集和闭包的概念，并讨论了它们的性质. 周旭[4]讨论了值域为布尔格的 L-Fuzzy 拓扑空间的性质，证明了良紧、强紧和模糊紧在 L-Fuzzy 拓扑空间中的关系. 姜金平等[5]研究了 L-Fuzzy 上(下)δ_m 几乎半连续多值映射及其性质. 韩刚和吉智方[6]利用 R-邻域系在 I-模糊拓扑空间中定义 $\theta\_$ 闭包、$\theta\_$ 内部、$\theta\_$ 邻域系和 $\theta\_$ 连续函数，并且研究它们的性质. 李宁[7]研究了 I-模糊拓扑空间中的分离定理. Takashi Kuraoka 等[8]引入了权的概念，从另一个角度刻画了模糊子群. 付云鹏等[9-10]研究了权与模糊化拓扑、权与凸模糊集之间的关系. T. Krassimir[11]引入了直觉模糊集的概念. 本文在前人研究成果的基础上，通过给出直觉权和直觉模糊化拓扑的定义，研究直觉权与直觉模糊化拓扑之间的关系.

1 直觉权

定义 1 若映射 $w:\varphi\to L$, $J\mapsto w(J)=(\alpha,\beta)$ 满足 $w(\langle\bigcup\limits_{t\in T}J_t\rangle)=\inf\limits_{t\in T}w(J_t)$ ，则称 w 为 X 上的直觉权，其中 $\langle\bigcup\limits_{t\in T}J_t\rangle$ 是 $\bigcup\limits_{t\in T}J_t$ 生成的拓扑，即以 $\bigcup\limits_{t\in T}J_t$ 为子基生成的拓扑.

引理 1 若 $J_1\subseteq J_2$,则 $w(J_1)\geqslant w(J_2)$.

定义 2 设 $\tau:2^X\to L=\{(\alpha,\beta)\mid \alpha,\beta\in[0,1],0\leqslant\alpha+\beta\leqslant1\}$, $A\mapsto\tau=(\mu_\tau(A),\nu_\tau(A))$, $0\leqslant\mu_\tau(A)+\nu_\tau(A)\leqslant1$，若 τ 满足:

(i) $\tau(X)=(1,0),\tau(\varnothing)=(1,0)$;

(ii) $\tau(A\cap B)\geqslant\tau(A)\wedge\tau(B)$, 即 $\mu_\tau(A\cap B)\geqslant\mu_\tau(A)\wedge\mu_\tau(B),\nu_\tau(A\cap B)\leqslant\nu_\tau(A)\vee\nu_\tau(B)$;

(iii) $\tau(\bigcup\limits_{t\in T}A_t)\geqslant\inf\limits_{t\in T}\tau(A_t)$, 即 $\mu_\tau(\bigcup\limits_{t\in T}A_t)\geqslant\inf\limits_{t\in T}\mu_\tau(A_t)$, $\nu_\tau(\bigcup\limits_{t\in T}A_t)\leqslant\sup\limits_{t\in T}\nu_\tau(A_t)$,

则称 τ 为 X 上的一个直觉模糊化拓扑.

定义 3 设 τ 为 X 上的直觉模糊化拓扑,定义映射 w_τ 如下:

$$w_\tau:\varphi\to[0,1],\quad J\mapsto w_\tau(J)=(\inf_{A\in J}\mu_\tau(A),\sup_{A\in J}\nu_\tau(A)).$$

引理 2 w_τ 为直觉权.

证 $\forall J_i\in X,i\in I$ ，须证 $w_\tau(\langle\bigcup\limits_{i\in I}J_i\rangle)=\inf\limits_{i\in I}w_\tau(J_i)$.

收稿日期：2012-02-17
基金项目：教育部人文社会科学研究青年基金(12YJCZH048)和辽宁大学青年基金(2011LDQN16)资助项目.
作者简介：付云鹏(1978-)，女，辽宁铁岭人，讲师，博士，主要从事模糊数学和组合投资方面的研究.

由于 $w_\tau(\langle\bigcup_{i\in I} J_i\rangle)=(\inf_{A\in\langle\bigcup_{i\in I} J_i\rangle}\mu_\tau(A),\ \sup_{A\in\langle\bigcup_{i\in I} J_i\rangle}\nu_\tau(A))$，而 $\inf_{i\in I} w_\tau(J_i)=\inf_{i\in I}(\inf_{A\in J_i}\mu_\tau(A),\sup_{A\in J_i}\nu_\tau(A))=(\inf_{i\in I}\{\inf_{A\in J_i}\mu_\tau(A)\},\ \sup_{i\in I}\{\sup_{A\in J_i}\nu_\tau(A)\})$, 因此只需证

$$\inf_{A\in\langle\bigcup_{i\in I} J_i\rangle}\mu_\tau(A)=\inf_{i\in I}\{\inf_{A\in J_i}\mu_\tau(A)\}, \tag{1}$$

$$\sup_{A\in\langle\bigcup_{i\in I} J_i\rangle}\nu_\tau(A)=\sup_{i\in I}\{\sup_{A\in J_i}\nu_\tau(A)\} \tag{2}$$

成立即可.

(i)由 $\inf_{A\in\langle\bigcup_{i\in I} J_i\rangle}\mu_\tau(A)\leqslant\inf_{A\in J_i}\mu_\tau(A)$ 知，$\forall i$，

$$\inf_{A\in\langle\bigcup_{i\in I} J_i\rangle}\mu_\tau(A)\leqslant\inf_{i\in I}\{\inf_{A\in J_i}\mu_\tau(A)\}. \tag{3}$$

另一方面，若 $A\in\langle\bigcup_{i\in I} J_i\rangle$，则 $A=\bigcup_{i\in I}A_i$，其中 A_i 为 $\bigcup_{i\in I} J_i$ 中集合的有限交.令 $A_i=A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_j}$ 其中 $A_{i_t}\in J_{i_t}$，于是 $\mu_\tau(A_i)=\mu_\tau(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_j})\geqslant\mu_\tau(A_{i_1})\wedge\cdots\wedge\mu_\tau(A_{i_t})\geqslant\inf_{A\in J_i}\mu_\tau(A)$，而 $\mu_\tau(A)=\mu_\tau(\bigcup_{i\in I}A_i)\geqslant\inf_{A\in J_i}\mu_\tau(A_i)\geqslant\inf_{i\in I}\{\inf_{A\in J_i}\mu_\tau(A_i)\}$, 所以

$$\inf_{A\in\langle\bigcup_{i\in I} J_i\rangle}\mu_\tau(A)\geqslant\inf_{i\in I}\{\inf_{A\in J_i}\mu_\tau(A)\}, \tag{4}$$

由(3)式和(4)式知, (1)式成立.

(ii)由 $\sup_{A\in\langle\bigcup_{i\in I} J_i\rangle}\nu_\tau(A)\geqslant\sup_{A\in J_i}\nu_\tau(A)$ 知，$\forall i$，

$$\sup_{A\in\langle\bigcup_{i\in I} J_i\rangle}\nu_\tau(A)\geqslant\sup_{i\in I}\{\sup_{A\in J_i}\nu_\tau(A)\}.$$

由 $A\in\langle\bigcup_{i\in I} J_i\rangle$ 知, $A=\bigcup_{i\in I}A_i$ (A_i 为 $\bigcup_{i\in I} J_i$ 中集合的有限交)，于是 $\nu_\tau(A)=\nu_\tau(\bigcup_{i\in I}A_i)\leqslant\sup_{i\in I}\nu_\tau(A_i), A_i=A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_j}$，其中 $A_{i_t}\in J_{i_t}$，则 $\nu_\tau(A_i)\leqslant\max\{\nu_\tau(A_{i_1}),\cdots,\nu_\tau(A_{i_j})\}\leqslant\sup_{A\in J_i}\nu_\tau(A)$，所以 $\nu_\tau(A)\leqslant\sup_{i\in I}\{\sup_{A\in J_i}\nu_\tau(A)\}$，所以 $\sup_{A\in\langle\bigcup_{i\in I} J_i\rangle}\nu_\tau(A)\leqslant\sup_{i\in I}\{\sup_{A\in J_i}\nu_\tau(A)\}$，从而(2)式成立.

因此 w_τ 为直觉权.

2 直觉模糊化拓扑

定义 4 令 $\varphi=\{J\mid J$ 为 X 上的拓扑$\}$, $\varphi(A)=\{J\mid J\in\varphi, A\in J\}$ 为包含 A 的拓扑，由 $w:\varphi\to L$，$J\mapsto w(J)=(\alpha_w^J,\beta_w^J)$，令 $\mu_{\tau_w}(A)=\sup\{\alpha_w^J\mid J\in\varphi(A)\}$, $\nu_{\tau_w}(A)=\inf\{\beta_w^J\mid J\in\varphi(A)\}$，定义

$$\tau_w(A)=(\mu_{\tau_w}(A),\ \nu_{\tau_w}(A)).$$

引理 3 τ_w 为直觉模糊化拓扑.

证 (i) $\tau_w(A\cap B)\geqslant\tau_w(A)\wedge\tau_w(B)$，即

$\mu_{\tau_w}(A\cap B)\geqslant\mu_{\tau_w}(A)\wedge\mu_{\tau_w}(B)$，

$\nu_{\tau_w}(A\cap B)\leqslant\nu_{\tau_w}(A)\wedge\nu_{\tau_w}(B)$.

若 $\mu_{\tau_w}(A\cap B)<\mu_{\tau_w}(A)\wedge\mu_{\tau_w}(B)$，则 $\exists t\in[0,1]$ 使 $\mu_{\tau_w}(A\cap B)<t<\mu_{\tau_w}(A)\wedge\mu_{\tau_w}(B)$，于是 $\mu_{\tau_w}(A)=\sup\{\alpha_w^J\mid J\in\varphi(A)\}>t, \mu_{\tau_w}(B)=\sup\{\alpha_w^J\mid J\in\varphi(B)\}>t$，所以 $\exists J_A\in\varphi(A)$ 使 $\alpha_w^{J_A}>t$，$\exists J_B\in\varphi(B)$ 使 $\alpha_w^{J_B}>t$，故 $\alpha_w^{J_A}\wedge\alpha_w^{J_B}>t$.

令 $J_1=\langle J_A\cup J_B\rangle$，则由 $A\in J_A\subseteq J_1, B\in J_B\subseteq J_1$ 知，$A\cap B\in J_1$，于是 $J_1\in\varphi(A\cap B)$.

由于 $w(J_1)\geqslant w(J_A)\wedge w(J_B)$，所以 $\alpha_w^{J_1}\geqslant\alpha_w^{J_A}\wedge\alpha_w^{J_B}>t$,于是

$$\mu_{\tau_w}(A\cap B)=\sup\{\alpha_w^J\mid J\in\varphi(A\cap B)\}\geqslant\alpha_w^{J_1}>t,$$

矛盾，所以 $\mu_{\tau_w}(A\cap B)\geqslant\mu_{\tau_w}(A)\wedge\mu_{\tau_w}(B)$ 成立.

若 $\nu_{\tau_w}(A\cap B)>\nu_{\tau_w}(A)\wedge\nu_{\tau_w}(B)$，则 $\exists t\in[0,1]$，使 $\nu_{\tau_w}(A\cap B)>t>\nu_{\tau_w}(A)\wedge\nu_{\tau_w}(B)$, 于是 $\inf\{\beta_w^J\mid J\in\varphi(A)\}<t$, $\inf\{\beta_w^J\mid J\in\varphi(B)\}<t$，所以 $\forall J_A\in\varphi(A)$ 有 $\beta_w^{J_A}<t$, $\forall J_B\in\varphi(B)$ 有 $\beta_w^{J_B}<t$，

令 $J_2=\langle J_A\cup J_B\rangle$，则由 $A\in J_A\subseteq J_2, B\in J_B\subseteq J_2$ 知，$A\cap B\in J_2$，于是 $J_2\in\varphi(A\cap B)$，所以 $\beta_w^{J_2}\leqslant\beta_w^{J_A}\vee\beta_w^{J_B}$，则 $\nu_{\tau_w}(A\cap B)=\sup\{\beta_w^J\mid J\in\varphi(A\cap B)\}\leqslant\beta_w^{J_2}\leqslant\beta_w^{J_A}\vee\beta_w^{J_B}<t$, 矛盾，于是

$$\nu_{\tau_w}(A\cap B)\leqslant\nu_{\tau_w}(A)\wedge\nu_{\tau_w}(B).$$

综上所述有 $\tau_w(A\cap B)\geqslant\tau_w(A)\wedge\tau_w(B)$.

(ii)下证 $\tau_w(\bigcup_{t\in T}A_t)\geqslant\inf_{t\in T}\tau_w(A_t)$，即

$$\mu_{\tau_w}(\bigcup_{t\in T}A_t)\geqslant\inf_{t\in T}\mu_{\tau_w}(A_t),\ \nu_{\tau_w}(\bigcup_{t\in T}A_t)\leqslant\sup_{t\in T}\nu_{\tau_w}(A_t).$$

若 $\mu_{\tau_w}(\bigcup_{t\in T}A_t)<\inf_{t\in T}\mu_{\tau_w}(A_t)$，则 $\exists\alpha\in[0,1]$, 使得 $\mu_{\tau_w}(\bigcup_{t\in T}A_t)<t<\inf_{t\in T}\mu_{\tau_w}(A_t)$, 由 $\inf_{t\in T}\mu_{\tau_w}(A_t)>\alpha$ 知, $\forall t\in T$, $\mu_{\tau_w}(A_t)>\alpha$，而 $\mu_{\tau_w}(A_t)=\sup\{\alpha_w^J\mid J\in\varphi(A_t)\}>\alpha$，于是 $\forall t\in T, \exists J_t\in\varphi(A_t)$，使 $\alpha_w^{J_t}>\alpha$.

令 $J^*=\langle\bigcup_{t\in T}J_t\rangle$，则由 $A_t\in J_t\subseteq J^*$ 知, $\bigcup_{t\in T}A_t\in J^*$，即 $J^*\in\varphi(\bigcup_{t\in T}A_t)$, $\mu_{\tau_w}(\bigcup_{t\in T}A_t)=\sup\{\alpha_w^J\mid J\in\varphi(\bigcup_{t\in T}A_t)\}\geqslant\alpha_w^{J^*}=\inf_{t\in T}\alpha_w^{J_t}>\alpha$，矛盾，其中 $w(J^*)=(\alpha_w^{J^*},\beta_w^{J^*})$，所以 $\mu_{\tau_w}(\bigcup_{t\in T}A_t)\geqslant\inf_{t\in T}\mu_{\tau_w}(A_t)$.

若 $\nu_{\tau_w}(\bigcup_{t\in T} A_t) > \sup_{t\in T}\nu_{\tau_w}(A_t)$，则 $\exists\alpha\in[0,1]$，使得 $\nu_{\tau_w}(\bigcup_{t\in T} A_t) > \alpha > \sup_{t\in T}\nu_{\tau_w}(A_t)$，由 $\sup_{t\in T}\nu_{\tau_w}(A_t)<\alpha$，则 $\forall t\in T$，$\nu_{\tau_w}(A_t)<\alpha$，$\forall t\in T$，$\inf\{\beta_w^J \mid J\in\varphi(A_t)\}<\alpha$，$\forall t\in T$，$\exists J_t\in\varphi(A_t)$，$\beta_w^{J_t}<\alpha$；记 $J^*=\langle\bigcup_{t\in T} J_t\rangle$，则由 $A_t\in J_t\subseteq J^*$ 知，$\bigcup_{t\in T}A_t\in J^*$，即 $J^*\in\varphi(\bigcup_{t\in T}A_t)$，$\nu_{\tau_w}(\bigcup_{t\in T}A_t)=\inf\{\beta_w^J \mid J\in\varphi(\bigcup_{t\in T}A_t)\}<\beta_w^{J^*}=\sup_{t\in T}\beta_w^{J_t}<\alpha$，矛盾，所以 $\nu_{\tau_w}(\bigcup_{t\in T}A_t)\leqslant\sup_{t\in T}\nu_{\tau_w}(A_t)$．

综上所述有 τ_w 为 X 上的直觉模糊化拓扑．

称 τ_w 为由 X 上的权 w 导出的 X 上的直觉模糊化拓扑．

3　直觉权与直觉模糊化拓扑的关系

定理 1　w 为 X 上的直觉权，τ 为 X 上的直觉模糊化拓扑，则

(i) $w_{\tau_w}=w$；(ii) $\tau_{w_\tau}=\tau$．

证　(i) $\forall J$ 为 X 上的拓扑，下证 $w_{\tau_w}(J)=w(J)$ 成立.

$$w_{\tau_w}(J)=(\inf_{A\in J}\mu_{\tau_w}(A),\sup_{A\in J}\nu_{\tau_w}(A)),$$

其中 $\mu_{\tau_w}(A)=\sup\{\alpha_w^L \mid L\in\varphi(A)\}$，$\nu_{\tau_w}(A)=\inf\{\beta_w^L \mid L\in\varphi(A)\}$，$w(J)=(\alpha_w^J,\beta_w^J)$．只须证 $\inf_{A\in J}\{\sup\{\alpha_w^L \mid L\in\varphi(A)\}\}=\alpha_w^J$，$\sup_{A\in J}\{\inf\{\beta_w^L \mid L\in\varphi(A)\}\}=\beta_w^J$ 即可．

事实上，显然当 $A\in J$ 时，$\sup\{\alpha_w^L \mid L\in\varphi(A)\}\geqslant\alpha_w^J$，所以

$$\inf_{A\in J}\{\sup\{\alpha_w^L \mid L\in\varphi(A)\}\}\geqslant\alpha_w^J,$$

若“$>$”成立，则 $\exists t\in[0,1]$ 使 $\inf_{A\in J}\{\sup\{\alpha_w^L \mid L\in\varphi(A)\}\}>t>\alpha_w^J$．于是 $\forall A\in J$，$\sup\{\alpha_w^L \mid L\in\varphi(A)\}>t>\alpha_w^J$；$\forall A\in J$，$\exists L_A\in\varphi(A)$ 使 $\alpha_w^{L_A}>t$，又 $J\subseteq\langle\bigcup_{A\in J}L_A\rangle\in\varphi(A)$，从而 $w(L)\geqslant w(\langle\bigcup_{A\in J}L_A\rangle)$，所以 $\alpha_w^J\geqslant\inf\alpha_w^{L_A}\geqslant t$ 矛盾．故

$$\inf_{A\in J}\{\sup\{\alpha_w^L \mid L\in\varphi(A)\}\}=\alpha_w^J.$$

同理可证 $\sup_{A\in J}\{\inf\{\beta_w^L \mid L\in\varphi(A)\}\}=\beta_w^J$．所以 $w_{\tau_w}=w$．

(ii) $\forall A\in J,\tau_{w_\tau}(A)=(\mu_{\tau_{w_\tau}}(A),\nu_{\tau_{w_\tau}}(A))$，$\tau(A)=(\mu_\tau(A),\nu_\tau(A))$，即证

$$\mu_{\tau_{w_\tau}}(A)=\mu_\tau(A),\ \nu_{\tau_{w_\tau}}(A)=\nu_\tau(A).$$

$\mu_{\tau_{w_\tau}}(A)=\sup\{\alpha_w^L \mid L\in\varphi(A)\}=\sup\{\inf_{B\in J}\mu_\tau(B) \mid J\in\varphi(A)\}$，由于 $\inf_{B\in J}\{\mu_\tau(B) \mid J\in\varphi(A)\}\leqslant\mu_\tau(A)$，所以 $\sup\{\inf_{B\in J}\mu_\tau(B) \mid J\in\varphi(A)\}\leqslant\mu_\tau(A)$．

若“$<$”成立，则 $\exists t\in[0,1]$，使

$$\sup\{\inf_{B\in J}\mu_\tau(B) \mid J\in\varphi(A)\}<t<\mu_\tau(A)\},\tag{5}$$

于是 $\forall J\in\varphi(A)$ 有 $\inf_{B\in J}\{\mu_\tau(B) \mid J\in\varphi(A)\}<t$，$\forall J\in\varphi(A)$，$\exists B_0\in J$ 使 $\mu_\tau(B_0)<t$．

令 $J_t=\{C\subseteq X \mid \mu_\tau(C)>t\}$，则 J_t 为 X 上的拓扑.

事实上，(a)若 $A\in J_t$，则 $\mu_\tau(A)>t$，$B\in J_t$，则 $\mu_\tau(B)>t$，$\mu_\tau(A\cap B)\geqslant\mu_\tau(A)\wedge\mu_\tau(B)>t$，于是 $A\cap B\in J_t$．

(b) $A_t\in J_t, t\in T$，则 $\mu_\tau(A_t)>t$，所以 $\mu_\tau(\bigcup_{t\in T}A_t)\geqslant\inf_{t\in T}\mu_\tau(A_t)>t$，所以 $\bigcup_{t\in T}A_t\in J_t$．

(c) $\mu_\tau(X)=1\geqslant t,\mu_\tau(\varnothing)=1\geqslant t$，所以 $X,\varnothing\in J_t$，从而 J_t 为 X 上的拓扑．

由(5)式知，$A\in J_t$，则 $J_t\in\varphi(A)$，即 $\exists B_0'\in J_t$，使 $\mu_\tau(B_0')<t$，这与 J_t 中的定义矛盾，所以 $\mu_{\tau_{w_\tau}}(A)=\mu_\tau(A)$；同理 $\nu_{\tau_{w_\tau}}(A)=\nu_\tau(A)$，故 $\tau_{w_\tau}=\tau$．

4　参考文献

[1] Chang C L. Fuzzy topological spaces [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1968, 24(1): 182-190.

[2] 王国俊. L-fuzzy 拓扑空间论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 1998: 51-104.

[3] 刘锋, 张超. R_G-模糊化拓扑的导集和闭包 [J]. 辽宁师范大学学报: 自然科学版, 2005, 28(1): 19-22.

[4] 周旭. 布尔值 L-fuzzy 拓扑空间的紧性与分离性 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2001, 25(2): 107-111.

[5] 姜金平, 王小霞, 侯延仁. L-fuzzy 上(下)δ–几乎半连续多值映射及其性质 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2011, 35(3): 302-304.

[6] 韩刚, 吉智方. I-Fuzzy 拓扑空间中的 $\theta\_$ 连续函数 [J]. 模糊系统与数学, 2007, 21(3): 9-15.

[7] 李宁. 模糊拓扑空间中分离公理的研究 [D]. 济南: 山东大学, 2008.

(下转第 382 页)