第 37 卷 第 3 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 37 No. 3
2013 年 5 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) May 2013

文章编号:1000-5862(2013)03-0225-04

Min-Algebra 上矩阵的 μ 值

张廷海,甘爱萍

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要: 利用矩阵理论研究了一类特殊的半环-($R_{\min}$,$\oplus$,$\otimes$,∞)上的矩阵的秩、列秩和极大列秩之间的关系,得到了对于 min-algebra 上任意 $m\times n$ 矩阵,使这 3 类秩相等的最大整数,即矩阵的 μ 值的所有情形,扩展了已有的相关结论.

关键词: min-algebra; 秩; 列秩; 极大列秩; 线性相关; 线性无关

中图分类号: O 151.21 **文献标志码:** A

0 引言

有许多学者研究不同半环上矩阵的秩与列秩之间关系[1-3],还有一些学者研究不同半环上矩阵的秩与极大列秩之间关系[4-5].本文探讨了 min-algebra 上矩阵的秩、列秩和极大列秩之间的关系,给出了对 min-algebra 上任意 $m\times n$ 矩阵,使这 3 类秩相等的最大整数,即矩阵的 μ 值的所有情形,由此扩展了已有的相关结论[6-11].

设 S 是非空集合,称(S, +, ·,0,1) 为半环,如果满足

(ⅰ)(S, +,0) 是交换幺半群;

(ⅱ)(S, ·,1) 是幺半群;

(ⅲ)乘法关于加法具有分配律;

(ⅳ) $\forall s\in S, s\cdot 0=0\cdot s=0$.

令 $\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数,称($\mathbf{R}^+\cup\{\infty\}$,$\oplus$,$\otimes$,$\infty$)为 min-algebra,简记作 $R_{\min}$,其中 $\forall x,y\in R_{\min}$,$x\oplus y=\min\{x,y\}$(取 x 与 y 中较小者),$x\otimes y=xy$(x 与 y 的乘积).

$R_{\min}$ 上全体 $m\times n$ 矩阵的集合记作 $M_{m,n}(R_{\min})$,其中零矩阵是所有元素全取 ∞ 的矩阵,简记作 ∞. 令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是 $R_{\min}$ 上任意 $m\times n$ 矩阵,称 $\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{B}=(a_{ij}\oplus b_{ij})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和,$\lambda\boldsymbol{A}=(\lambda a_{ij})$ 为 λ 与 $\boldsymbol{A}$ 的数乘,其中 $\lambda\in R_{\min}$. 令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 分别是 $R_{\min}$ 上任意 $m\times p$,$p\times n$ 矩阵,称 $\boldsymbol{AB}=(\min\{a_{ik}b_{kj}\mid k=1,\cdots,p\})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的积. $\boldsymbol{A}^{\mathrm T}$,$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}$ 表示 $R_{\min}$ 上矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置.

设 U 是 $R_{\min}$ 上全体向量的集合 $(R_{\min})^n\equiv M_{n,1}(R_{\min})$ 的子集. 如果 $\exists\boldsymbol{\alpha}\in U$,它可由 U 中其余向量线性表示,则称 U 是线性相关的,否则,称 U 是线性无关的. 设 V 是 $(R_{\min})^n$ 的非空子集,如果它关于向量加法和数乘运算封闭,则称 V 是 $(R_{\min})^n$ 上的向量空间,并称可生成 V 且线性无关的向量组为 V 的一组基,其中元素个数最少的基所含元素个数称为向量空间 V 的维数.

定义 1 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $R_{\min}$ 上 $m\times n$ 矩阵,且 $\boldsymbol{A}\neq\infty$,若存在 $m\times k$ 矩阵 $\boldsymbol{F}$ 和 $k\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{G}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{FG}$,且 k 是满足该等式的最小整数,则称 k 是 $\boldsymbol{A}$ 的秩,记作 $r(\boldsymbol{A})$. 零矩阵 ∞ 的秩是 0.

由定义 1 易知 $0\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{m,n\}$,因为至少有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{IA}$,其中 $\boldsymbol{I}$ 是 $R_{\min}$ 上的单位矩阵.

定义 2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $R_{\min}$ 上 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的列秩是指由其列所生成的向量空间的维数,记作 $c(\boldsymbol{A})$.

定义 3 设 $\boldsymbol{A}\in M_{m,n}(R_{\min})$,$\boldsymbol{A}$ 的极大列秩是指 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关列向量组中具有极大列数的向量组所含列数,记作 $mc(\boldsymbol{A})$. 零矩阵的列秩和极大列秩均为 0.

引理 1 $\forall\boldsymbol{A}\in M_{m,n}(R_{\min})$,则 $0\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant c(\boldsymbol{A})\leqslant mc(\boldsymbol{A})\leqslant n$.

事实上,$R_{\min}$ 上矩阵的列秩可能大于其秩,极大列秩可能大于其列秩.

例 1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&\infty&1\\\infty&\infty&1&1\\\infty&1&1&\infty\end{pmatrix}\in M_{3,4}(R_{\min})$,

收稿日期:2013-02-20

基金项目:国家自然科学基金(11261021)资助项目.

作者简介:张廷海(1974-),男,江西永修人,讲师,硕士,主要从事半环理论的研究.

则 $c(\boldsymbol{A})=4$,但它的秩不可能大于其行数 3,因此 $c(\boldsymbol{A})>r(\boldsymbol{A})$.

例 2 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\infty & 1 & \infty & \infty & 1\\ \infty & \infty & 1 & 1 & \infty\\ 1 & \infty & \infty & 1 & 1\\ \infty & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

则 $c(\boldsymbol{A})=3$,因为 A 的前 3 列线性无关且它们可生成 A 的列向量空间,然而 $mc(\boldsymbol{A})=4$,因为 A 的后 4 列也线性无关,因此 $mc(\boldsymbol{A})>c(\boldsymbol{A})$.

1 有关引理

对 $R_{\min}$ 上所有 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$,如果 $r(\boldsymbol{A})\leqslant k$,称满足 $r(\boldsymbol{A})=c(\boldsymbol{A})=mc(\boldsymbol{A})$ 的最大整数 k 为 $R_{\min}$ 上 $m\times n$ 矩阵的 μ 值,记作 $\mu(R_{\min},m,n)$. 由引理 1 知,$r(\boldsymbol{A})=c(\boldsymbol{A})=mc(\boldsymbol{A})$ 等价于 $r(\boldsymbol{A})=mc(\boldsymbol{A})$. 一般地,$0\leqslant\mu(R_{\min},m,n)\leqslant\min\{m,n\}$.

引理 2 $\forall \boldsymbol{A}\in M_{m,n}(R_{\min})$,$r(\boldsymbol{A})=1$ 当且仅当 $mc(\boldsymbol{A})=1$.

证 若 $r(\boldsymbol{A})=1$,则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}(y_1,y_2,\cdots,y_n)=$$

$$\begin{pmatrix}x_1y_1 & \cdots & x_1y_j & \cdots & x_1y_n\\ x_2y_1 & \cdots & x_2y_j & \cdots & x_2y_n\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ x_my_1 & \cdots & x_my_j & \cdots & x_my_n\end{pmatrix},$$

对任意 2 列 $i,j(i\neq j)$,若 y_i 和 y_j 至少有 1 个等于 ∞,则该 2 列线性相关. 若 y_i 和 y_j 均不等于 ∞,由 $y_i=\dfrac{y_i}{y_j}y_j$ 可知,该 2 列也线性相关. 因此,A 的任意 2 列线性相关,即 $mc(\boldsymbol{A})=1$.

反过来,若 $mc(\boldsymbol{A})=1$,由引理 1 有 $r(\boldsymbol{A})=1$.

引理 3 设矩阵 $A\in M_{m,n}(R_{\min})$,若从 A 中删去某些行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$,则 $c(\boldsymbol{B})\leqslant c(\boldsymbol{A})$.

类似地,可以得到 $mc(\boldsymbol{B})\leqslant mc(\boldsymbol{A})$.

引理 4 对 $R_{\min}$ 上任意 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $p\times q$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$,有

$$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \infty\\ \infty & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}).$$

证 设 $r(\boldsymbol{A})=k$,$r(\boldsymbol{B})=t$,且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}_{m,k}\boldsymbol{G}_{k,n}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}_{p,t}\boldsymbol{D}_{t,q}$,则有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{m,n} & \infty_{m,q}\\ \infty_{p,n} & \boldsymbol{B}_{p,q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}_{m,k} & \infty_{m,t}\\ \infty_{p,k} & \boldsymbol{C}_{p,t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{G}_{k,n} & \infty_{k,q}\\ \infty_{t,n} & \boldsymbol{D}_{t,q}\end{pmatrix},$$

由秩的定义可知

$$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \infty\\ \infty & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\leqslant k+t=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}).$$

引理 5 对任意矩阵 $A\in M_{m,n}(R_{\min})$,有

$$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \infty\\ \infty & \infty\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A}),\ c\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \infty\\ \infty & \infty\end{pmatrix}=c(\boldsymbol{A}),$$

$$mc\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \infty\\ \infty & \infty\end{pmatrix}=mc(\boldsymbol{A}).$$

证 由引理 4 知

$$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \infty\\ \infty & \infty\end{pmatrix}\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\infty)=r(\boldsymbol{A}).$$

反之,令 $r(\boldsymbol{A})=k$,即 k 是满足 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$ 的最小整数,其中 $\boldsymbol{B}\in M_{m,k}(R_{\min})$,$\boldsymbol{C}\in M_{k,n}(R_{\min})$,则

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{m,n} & \infty_{m,q}\\ \infty_{p,n} & \infty_{p,q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{m,k}\\ \infty_{p,k}\end{pmatrix}(\boldsymbol{C}_{k,n}\quad \infty_{k,q})$$

并且 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \infty\\ \infty & \infty\end{pmatrix}$ 不存在其它左因子列数小于 k 的分解,否则与 $r(\boldsymbol{A})=k$ 矛盾. 因此 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \infty\\ \infty & \infty\end{pmatrix}\geqslant k=r(\boldsymbol{A})$,从而 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \infty\\ \infty & \infty\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})$. 由引理 3 知

$$c\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \infty\\ \infty & \infty\end{pmatrix}\geqslant c(\boldsymbol{A}\quad \infty)=c(\boldsymbol{A}),$$

$$mc\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \infty\\ \infty & \infty\end{pmatrix}\geqslant mc(\boldsymbol{A}\quad \infty)=mc(\boldsymbol{A}).$$

另一方面,由于 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \infty\\ \infty & \infty\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \infty\end{pmatrix}(\boldsymbol{I}\quad \infty)$,即 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \infty\\ \infty & \infty\end{pmatrix}$ 的列向量空间可由 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \infty\end{pmatrix}$ 的基所生成,因此

$$c\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \infty\\ \infty & \infty\end{pmatrix}\leqslant c\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \infty\end{pmatrix}=c(\boldsymbol{A}),$$

$$mc\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \infty\\ \infty & \infty\end{pmatrix}\leqslant mc\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \infty\end{pmatrix}=mc(\boldsymbol{A}).$$

所以

$$c\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \infty\\ \infty & \infty\end{pmatrix}=c(\boldsymbol{A}),\ mc\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \infty\\ \infty & \infty\end{pmatrix}=mc(\boldsymbol{A}).$$

命题 1 若存在某个 $p\times q$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$,有 $mc(\boldsymbol{A})>r(\boldsymbol{A})$,则对所有 $m\geqslant p$ 且 $n\geqslant q$ 的 $m\times n$ 矩阵,有 $\mu(R_{\min},m,n)<r(\boldsymbol{A})$.

证 因为存在某个 $A_{p,q}\in M_{p,q}(R_{\min})$,使得 $mc(\boldsymbol{A})>r(\boldsymbol{A})$,由矩阵 μ 值定义可知

$$\mu(R_{\min},p,q)<r(\boldsymbol{A}).$$

令 $B=\begin{pmatrix} A & \infty \\ \infty & \infty \end{pmatrix}$ 是 $m\times n$ 矩阵. 由引理 5 得

$$r(B)=r(A)<mc(A)=mc(B).$$

因此,对所有 $m\geqslant p, n\geqslant q$ 的 $m\times n$ 矩阵,有 $\mu(R_{\min},m,n)<r(B)=r(A)$.

引理 6　$\forall A\in M_{2,n}(R_{\min})$ 且 $n\geqslant 2$, $r(A)=2$ 当且仅当 $mc(A)=2$.

证　设 $r(A)=2$,若 $n=2$,则由引理 1 有 $mc(A)\leqslant 2$. 再由引理 2 有 $mc(A)=2$. 现假设 $n\geqslant 3$,并设 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ 是矩阵 A 中任意 3 列,则

(ⅰ) 集合 $\{x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2\}$ 中至少有 2 个元素是 ∞,则显然这 3 列线性相关;

(ⅱ) 集合 $\{x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2\}$ 中仅有 1 个元素是 ∞,不妨设 $x_2=\infty$ 且 $\min\{\frac{y_1}{y_2},\frac{z_1}{z_2}\}=\frac{z_1}{z_2}$,则

$$\frac{z_1}{x_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \infty \end{pmatrix}\oplus\frac{z_2}{y_2}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_1\oplus\frac{z_2}{y_2}y_1 \\ z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

因此这 3 列线性相关;

(ⅲ) 集合 $\{x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2\}$ 中不含元素 ∞,且不妨设 $\frac{x_1}{x_2}\leqslant\frac{y_1}{y_2}\leqslant\frac{z_1}{z_2}$,则

$$\frac{y_1}{x_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\oplus\frac{y_2}{z_2}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1\oplus\frac{z_1}{z_2}y_2 \\ \frac{x_2}{x_1}y_1\oplus y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

因此这 3 列线性相关.

由上述讨论可知 $mc(A)\leqslant 2$,进一步由引理 2 有 $mc(A)=2$. 反过来,当 $mc(A)=2$ 时,由引理 1 和引理 2 知 $r(A)=2$.

2　主要结果

定理 1　对任意矩阵 $A\in M_{m,n}(R_{\min})$,其中 $m\geqslant 2, n\geqslant 2$, $r(A)=2$ 当且仅当 $mc(A)=2$.

证　若 $r(A)=2$,则存在 $m\times 2$ 矩阵 $F=(\alpha,\beta)$ 和 $2\times n$ 矩阵 G,使得 $A=FG$ 且 $r(F)=r(G)=2$. 如果 $n=2$,则由引理 1 有 $mc(A)=2$. 如果 $n\geqslant 3$,则 A 的任一列具有形式 $x_1\alpha\oplus x_2\beta$,其中 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 为矩阵 G 的列向量. 设 $x_1\alpha\oplus x_2\beta$, $y_1\alpha\oplus y_2\beta$, $z_1\alpha\oplus z_2\beta$ 是矩阵 A 的任意 3 列,则 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ 是矩阵 G 中对应 3 列. 由于 $G\in M_{2,n}(R_{\min})$ 且 $n\geqslant 2$, $r(G)=2$,因此,由引理 6 可知矩阵 G 的这 3 列线性相关. 可以考虑 3 种完全类似于引理 6 的情形. 但仅需考虑集合 $\{x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2\}$ 中不含元素 ∞ 的情形即可. 从引理 6 可知,

$$y_1=\frac{y_1}{x_1}x_1\oplus\frac{y_2}{z_2}z_1, y_2=\frac{y_1}{x_1}x_2\oplus\frac{y_2}{z_2}z_2,$$

由此有

$$y_1\alpha\oplus y_2\beta=\left(\frac{y_1}{x_1}x_1\oplus\frac{y_2}{z_2}z_1\right)\alpha\oplus\left(\frac{y_1}{x_1}x_2\oplus\frac{y_2}{z_2}z_2\right)\beta=\frac{y_1}{x_1}(x_1\alpha\oplus x_2\beta)\oplus\frac{y_2}{z_2}(z_1\alpha\oplus z_2\beta),$$

因此,A 的任意 3 列线性相关. 所以 $mc(A)\leqslant 2$. 再由引理 2 有 $mc(A)=2$.

当 $mc(A)=2$ 时,由引理 1 和引理 2 知

$$r(A)=2.$$

例 3　令 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 1 & 1 \\ \infty & 1 & 1 & \infty \end{pmatrix}\in M_{3,4}(R_{\min})$,则 $r(A)\leqslant 3$,但 $mc(A)=4$. 因此,由引理 2 和定理 1 有 $r(A)\geqslant 3$. 从而 $r(A)=3$. 这表明 $\mu(R_{\min},3,4)\leqslant 2$.

定理 2　min-algebra 上任意 $m\times n$ 矩阵的 μ 值满足

$$\mu(R_{\min},m,n)=\begin{cases} 1, \min\{m,n\}=1, \\ 3, m\geqslant 3, n=3, \\ 2, \text{其它}. \end{cases}$$

证　现通过讨论以下情形来证明此结果.

(ⅰ) 当 $\min\{m,n\}=1$ 时,由引理 2 有

$$\mu(R_{\min},m,n)\geqslant 1.$$

另外有

$$\mu(R_{\min},m,n)\leqslant\min\{m,n\}=1.$$

因此,$\mu(R_{\min},m,n)=1$.

(ⅱ) 若 $A\in M_{2,n}(R_{\min})$ 且 $n\geqslant 2$ 或者 $A\in M_{m,2}(R_{\min})$ 且 $m\geqslant 3$,则由引理 2 和定理 1 有 $\mu\geqslant 2$. 又由

$$\mu(R_{\min},m,n)\leqslant\min\{m,n\}$$

有 $\mu\leqslant 2$. 所以 $\forall n\geqslant 2$ 有 $\mu(R_{\min},2,n)=2$ 或 $\forall m\geqslant 3$ 有 $\mu(R_{\min},m,2)=2$.

(ⅲ) 若 $A\in M_{m,n}(R_{\min})$,其中 $m\geqslant 3$ 且 $n\geqslant 4$,则由例 3 和命题 1 可知 $\mu(R_{\min},m,n)\leqslant 2$. 又由定理 1 有 $\mu(R_{\min},m,n)\geqslant 2$. 因此 $\forall m\geqslant 3$ 且 $\forall n\geqslant 4$ 有 $\mu(R_{\min},m,n)=2$.

(ⅳ) 若 $A\in M_{m,3}(R_{\min})$ 且 $m\geqslant 3$,则由引理 1,

$r(\boldsymbol{A})=3$蕴含着$mc(\boldsymbol{A})=3$，又由引理2和定理1知，$mc(\boldsymbol{A})=3$也蕴含着$r(\boldsymbol{A})=3$. 因此$\mu(R_{\min},m,3)\geqslant 3$. 又由$\mu(R_{\min},m,n)\leqslant \min\{m,n\}$知，

$$\mu(R_{\min},m,3)\leqslant 3.$$

所以$\forall m\geqslant 3$且$n=3$有$\mu(R_{\min},m,3)=3$.

由上述讨论可知，min-algebra上所有类型矩阵的μ值完全确定.

3 参考文献

[1] Beasley L B，Pullman N J. Semiring rank versus column rank [J]. Linear Algebra Appl，1988，101(1)：33-48.

[2] Beasley L B，Song S Z. A comparison of nonnegative real ranks and their preservers [J]. Linear and Multilinear Algebra，1992，31(1/2/3/4)：37-46.

[3] Song S Z. Linear operators that preserve column rank of Boolean matrices [J]. Proceedings of the American Mathematical Society，1993，119(4)：1085-1088.

[4] Hwang S G，Kim S J，Song S Z. Linear operators that preserve maximal column rank of Boolean matrices [J]. Linear and Multilinear Algebra，1994，36(4)：305-313.

[5] Song S Z，Yang S D，Hong S M，et al. Linear operators preserving maximal column ranks of nonbinary Boolean matrices [J]. General Algebra and Application 2000，20(2)：255-265.

[6] Beasley L B，Guterman A E. Rank inequalities over semiring [J]. J Korean Math Soc，2005，42(2)：223-241.

[7] Song S Z，Kang K T. Rank and perimeter preserver of rank-1 matrices over max algebra [J]. Discuss Math Gen Algebra Appl，2003，23(2)：125-137.

[8] Kang K T，Song S Z，Beasley L B. Linear preservers of term ranks of matrices over semiring [J]. Linear Algebra Appl，2012，436(7)：1850-1862.

[9] Song S Z. On spanning column rank of matrices over semirings [J]. Bull Korean Math Soc，1995，32(2)：337-342.

[10] 任苗苗，邵勇，赵宪忠. 保持两类特殊半环上矩阵{1}-逆的线性算子 [J]. 西北大学学报：自然科学版，2012，42(1)：7-11.

[11] 秦松，甘爱萍. 加法半群为半格的半环上Green-关系 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2012，36(2)：151-154.

The Value of μ of Matrices over the Min-Algebra

ZHANG Ting-hai，GAN Ai-ping

(College of Mathematics and Informatics，Jiangxi Normal University，Nanchang Jiangxi 330022，China)

Abstract: The relationships between the rank，column rank and maximal column rank of matrices over a special semiring-($R_{\min}$，$\oplus$，$\otimes$，∞) are investigated by the theory of matrices. The largest integers of the three types of ranks equaling for all m by n matrices over the min-algebra are obtained. So the related results are extended.

Key words: min-algebra; rank; column rank; maximal column rank; linearly dependent; linearly independent

(责任编辑：曾剑锋)