第 37 卷 第 5 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 37 No. 5
2013 年 9 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Sep. 2013

文章编号:1000-5862(2013)05-0441-04

由偏序关系的可达阵导出 Hasse 图的有效算法
——兼谈其在认知诊断中的作用

丁树良,罗 芬
(江西师范大学计算机信息工程学院,江西 南昌 330022)

摘要:假设 0-1 矩阵 Q 的行表示属性,对矩阵 Q 采用行逐对比较方法导出表示属性层级关系的 Hasse 图. 然而,这个 Hasse 图和由可达矩阵 R 导出的 Hasse 图可能不一致. 证明了包含 R 的 Q 阵的行逐对比较的方法与 R 导出的 Hasse 图是一致的,由此得出由偏序关系的可达矩阵导出 Hasse 图的一个有效算法,并讨论其在认知诊断中的应用.

关键词:偏序关系;可达阵;Hasse 图;认知诊断
中图分类号:B 841.7;TP 301.6 **文献标志码:**A

0 引言

设 $S=\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$ 是一个有限集合. r 是集合 S 上的偏序关系,即自反、反对称、传递关系,r 对应的关系矩阵为 $\boldsymbol{M}_r=(m_{ij})$,则显然对所有 i、j、k,有 $m_{ii}=1$,若 $i\neq j$ 时,$m_{ij}\times m_{ji}=0$ 以及若 $m_{ij}\times m_{jk}=1$,则必有 $m_{ik}=1$. 通过计算每个结点可达其他结点数,并且对这个数按照从大到小(不增)排序,依次安排结点的下标(即调整 S 中元素的下标),总可以使 $\boldsymbol{M}_r$ 成为一个对角线全为 1 的上三角阵,为方便记,不失一般性,下文中的 $\boldsymbol{M}_r$ 均采用上三角阵这种形式,故 $\boldsymbol{M}_r$ 的行列式等于 1.

丁树良等[1-2] 给出了画偏序关系 Hasse 图的清洗算法,为了讨论的完整性,将这个算法列在这里:

Procedure 求哈斯图对应关系阵($\boldsymbol{M}$:$n\times n$ 偏序关系阵)

```
U: = M - I
for i: = 1 to n
    for j: = 1 to n
        for k: = 1 to n
            u_ik = u_ik - u_ik × u_ij × u_jk
        end
    end
end{U = (u_ij)为 Hasse 图对应的关系阵}.
```

上述算法有 $2n^3$ 个乘法运算和 n^3 个减法运算,由于 $u_{ij}\in\{0,1\}$,故 $u_{ik}\times u_{ij}\times u_{jk}$ 也可以用“逻辑与”表示. 显然,Hasse 图对应的关系阵实际上是 S 中结点的邻接矩阵,它反自反,反对称,反传递.

认知诊断是统计测量领域的一个重要研究方向. 本文首先讨论认知诊断中探查认知属性(结点)层级关系(hierarchical relation)方法的正确性,然后应用这个方法改进上述清洗算法,使得只要对 n 维向量经过 n^2 次比较就可以揭示出这 n 个结点的层级关系.

1 认知诊断的背景知识

在认知诊断中,结点称为属性(attribute),表达项目(item)和考察的属性之间关联关系 0-1 矩阵称为属性项目的关联矩阵(incidence matrix),简称关联阵,一般用 Q 表示,称之为 Q 矩阵. $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$,$q_{ij}=1$ 表示项目 j 中包含属性 i,否则 $q_{ij}=0$;属性之间的层级关系表示认知加工的顺序,如果学习者掌握属性 A_j 必须先掌握属性 A_i,则称 A_i 为 A_j 的先决属性(prerequisite attribute),而 A_j 称为 A_i 的后裔. 如不会计算公倍数(A),就不会做异分母加减运算(B),这里 A 就是 B 的先决属性. 先决关系就是所谓的层级关系. 属性之间的先决关系是一个偏序关系. 如果属性 A_i 是 A_j 的先决属性,并且属性 A_i 盖住属性 A_j,即不存在一个既不是 A_i、又不是 A_j 的属性 A_k,使得 A_i 是 A_k 的先决属性,而 A_k 又是 A_j 的先决属性,则称属

收稿日期:2013-04-22
基金项目:国家自然科学基金(30860084,31160203,31100756,31360237,31300876),国家社会科学基金(12BYY055)和江西省教育厅科技计划(GJJ13207,GJJ13226,GJJ13227,GJJ13208,GJJ13209)资助项目.
作者简介:丁树良(1949-),男,江西樟树人,教授,博士生导师,主要从事计算机辅助教学、应用及教育和心理测量方面的研究.

性 A_i 是属性 A_j 的直接先决(immediately prerequisite)属性. 若项目所包含的属性与属性层级关系相符,则该项目称为有效对象[3]. 有效对象全体构成的属性与项目关联阵称为潜在 Q 阵,记为 Q_p. Q_p 是一种重要的关联矩阵,因为它包含了所有潜在的项目类型;如果 Q_p 再添加一个零列(记为 Q_s,称为学生 Q 阵),则 Q_s 对应所有可能的知识状态(knowledge states)类型. 潜在 Q 阵描述了相应层级关系对应的图的深度优先算法的所有路径.

K. K. Tatsuoka[4-7] 认为,关联阵 Q 的行在布尔加与乘之下构成布尔代数,并且认为在布尔代数中,行的包含关系与属性的先决关系等价. 她表示在布尔代数中,集合的包含关系等价于相应的 2 个属性的先决关系. 于是她通过对一般的关联阵 Q 的任意两行的比较,导出属性之间的先决关系. 如上所述,用数学符号表示,就是如果用 $\boldsymbol{q}_{(i)}$、$\boldsymbol{q}_{(j)}$ 表示 Q 的第 i、j 两行,$\boldsymbol{q}_{(i)}-\boldsymbol{q}_{(j)}$ 的元素非负,则表示第 i 行包含第 j 行[8],即属性 i 是属性 j 的先决,由此确定属性之间的层级关系.

K. K. Tatsuoka 的研究很有意义,因为期望反应模式是认知诊断中一个重要概念,给定测验蓝图(即测验 Q 矩阵 Q_t)和潜在 Q 矩阵就可以计算出期望反应模式集合. 对于未指定测验蓝图的现有测验数据,要想获得期望反应模式集合的前提是经过若干转换得到测验蓝图和潜在 Q 阵[8].

然而,K. K. Tatsuoka 认为 Q 的行在元素的布尔加与布尔乘之下构成布尔代数(布尔格)是错误的[2,9]. 在这个错误的前提之下,她的这种抽取属性之间层级关系的方法是否正确? 答案是肯定的,其实她给出的前提是多余的、错误的. 没有这个前提,这种抽取属性之间层级关系的方法的正确性的证明其实很简单. 事实上,对于有限集合 $S=\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$,这个集合的任意子集可以用一个 n 维 0-1 向量表示,如果 S_j 是这个子集合的元素,那么这个 n 维 0-1 向量的第 j 个分量等于 1,否则等于 0. 对于 S 的任意 2 个子集合,它们分别用 2 个 n 维 0-1 向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示,根据集合包含关系的定义,如果 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的每一个分量都非负,那么 $\boldsymbol{a}$ 对应的集合就包含 $\boldsymbol{b}$ 对应的集合. 下文中称这个判断一个集合是否是另一个集合的子集合的方法为逐对比较的方法.

既然她的方法可以使用,当然可以直接用于可达矩阵. 虽然潜在 Q 矩阵和可达矩阵(R)有紧密联系(参见下文中扩张算法),但是并不是所有 Q 矩阵都和可达矩阵有这么紧密的联系. 笔者想讨论根据 Q 矩阵和根据 R 挖掘出来的层级关系是否具有一致性,以及达到一致性的条件. 之所以追究这种一致性,是因为由可达矩阵导出的属性层级关系(邻接矩阵)是对属性层级的真实描写,而由关联矩阵导出的层级关系可能受到某种程度的“污染”,即不够真实.

在以下讨论中,潜在 Q 矩阵 Q_p 和可达矩阵 R 之间的关系十分重要. 联系这 2 个矩阵的是扩张算法[2,9-10] 和缩减算法[11].

如果给出欲诊断的范围领域,则可以通过一定的途径(比如文献调查、专家讨论、学生出声思维等),抽出影响学生正确反应的属性(技能,或者知识点)以及这些属性的层级关系,它是偏序关系. 由属性及其层级关系,可以导出属性的邻接矩阵,进而得到可达矩阵.

扩张算法揭示了这样的事实,即潜在 Q 矩阵的所有列均可以由可达矩阵的列通过布尔加法得到[2-3,9-10]. 为了和 K. K. Tatsuoka[8] 的充分 Q 矩阵相区别,丁树良等[12] 将包含可达矩阵的 Q 矩阵称为充分必要 Q 矩阵,本文简称为充要 Q 矩阵. 显然 Q_p 为充要 Q 阵,但是充要 Q 矩阵不一定是 Q_p.

所谓缩减算法是指 Q 矩阵的某一列 q 如果能够被 Q 矩阵中其他列的布尔和表示,则将 q 从 Q 矩阵中删除,这个过程一直进行下去,直到 Q 中每一列均不能由其他列的布尔和表示为止. 这个算法称为缩减算法. 显然,这个算法是扩张算法的逆. 通过缩减算法,可以将潜在 Q 阵 Q_p 缩减为可达阵 R[11]. 事实上,任何充要 Q 矩阵通过缩减算法均可以得到可达矩阵.

2 K. K. Tatsuoka 寻找属性层级关系方法的正确性讨论

设 R 为可达矩阵 $R=(r_{ij})=(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n)=(\boldsymbol{r}_{(1)},\boldsymbol{r}_{(2)},\cdots,\boldsymbol{r}_{(n)})^{\mathrm{T}}$,第 2 个等号右边是 R 按列分块,而第 3 个等号右边是 R 按行分块.

如果 Q 阵不是充要 Q 阵(下面有反例说明),使用 Q 的行向量两两比较的方法提取出来的属性包含关系 H_1 和使用同样方法从可达矩阵提取出来的属性层级关系 H_2 不一定相同;但如果 Q 是充要 Q 阵,则两者提取出来的层级关系完全一致. 为此先证明如下定理 1.

定理 1 属性之间可达阵 R 的行的逐对比较可以导出属性之间的先决关系.

证 设认知诊断测验包含 n 个属性,其层级结构为 H,对应的邻接矩阵为 A,可达阵为 R,可知先决关系是偏序关系. 不失一般性,可设 R 是对角元为 1 的上三角阵. R 的第 i 行中非零元的对应着属性 i 可达的属性,如果 R 的第 i 行 $\boldsymbol{r}_{(i)}$ 减去第 j 行的 $\boldsymbol{r}_{(j)}$ 的差向量中每个元素均非负(记为 $\boldsymbol{r}_{(i)}\geqslant\boldsymbol{r}_{(j)}$),则由于 $r_{ii}=r_{jj}=1$,知属性 i 可达 j,且属性 j 可达的属性,属性 i 均可达,于是属性 i 是属性 j 的先决属性.

用 $\boldsymbol{q}_{(i)}$、$\boldsymbol{r}_{(i)}$ 分别记 Q_p、$\boldsymbol{R}$ 的第 i 行，则有定理 2.

定理 2　设关联矩阵 Q 是充要的，且 Q 和 $\boldsymbol{R}$ 均按行剖分，则任给 i,j，$\boldsymbol{q}_{(i)} \geqslant \boldsymbol{q}_{(j)}$ 当且仅当 $\boldsymbol{r}_{(i)} \geqslant \boldsymbol{r}_{(j)}$.

证　因 Q 是充要 Q 矩阵，则可写成 $Q=(\boldsymbol{R} \mid Q_0)$，$Q_0$ 是由可达阵 $\boldsymbol{R}$ 扩张出来的部分. 若 $\boldsymbol{q}_{(i)} \geqslant \boldsymbol{q}_{(j)}$，则由于 $\boldsymbol{r}_{(i)}$，$\boldsymbol{r}_{(j)}$ 分别为 $\boldsymbol{q}_{(i)}$，$\boldsymbol{q}_{(j)}$ 的前 n 维子向量，故有 $\boldsymbol{r}_{(i)} \geqslant \boldsymbol{r}_{(j)}$；反之，如果 $\boldsymbol{r}_{(i)} \geqslant \boldsymbol{r}_{(j)}$，要证 $\boldsymbol{q}_{(i)} \geqslant \boldsymbol{q}_{(j)}$，若不然，$\exists h$，使 $q_{ih} < q_{jh}$，由 $\boldsymbol{r}_{(i)} \geqslant \boldsymbol{r}_{(j)}$，有 $r_{ip} \geqslant r_{jp}$，$p=1,2,\cdots,n$，故 $h \geqslant n+1$.

由于 $\boldsymbol{q}_j$ 是 Q 中第 h 列，$h \geqslant n+1$. 故 $\boldsymbol{q}_j$ 是经由 $\boldsymbol{R}$ 扩张出来的. 先设 $\boldsymbol{q}_j = \boldsymbol{r}_s \vee \boldsymbol{r}_t$，$1 \leqslant s, t \leqslant n$，且 $\boldsymbol{r}_s \vee \boldsymbol{r}_t$ 是 $\boldsymbol{r}_s$ 与 $\boldsymbol{r}_t$ 中对应分量的布尔加（取最大值）运算.

由 $q_{ih} < q_{jh}$，知 $q_{ih} = r_{is} \vee r_{it} < r_{js} \vee r_{jt} = q_{jh}$，这与 $\boldsymbol{r}_{(i)} \geqslant \boldsymbol{r}_{(j)}$ 矛盾，于是知由 $\boldsymbol{r}_{(i)} \geqslant \boldsymbol{r}_{(j)}$ 必有 $\boldsymbol{q}_{(i)} \geqslant \boldsymbol{q}_{(j)}$.

对于 $\boldsymbol{q}$ 等于 $\boldsymbol{R}$ 中多个列的布尔和的情形，仿上同样可以证明.

3　由偏序关系的可达阵导出邻接阵的算法

由定理 1 和定理 2，可得 K. K. Tatsuoka 介绍的使用 Q 中逐对比较两行的方法，只要 Q 是充要的，就可以导出属性之间的先决关系. 同时也由定理 1，可得由可达阵导出邻接阵（Hasse 图）的一个算法.

算法 1　设 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times n}$ 是偏序关系 $\boldsymbol{r}$ 的可达阵，且假设 $\boldsymbol{R}$ 的行是由行和 s_i（$s_i = \sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}$）从大到小排列. 寻找属性的先决关系的算法为

for i: $=1$ to n

　for j: $=i+1$ to n

　　if $\boldsymbol{r}_{(i)} \geqslant \boldsymbol{r}_{(j)}$ then 属性 j 是属性 i 的后裔，记录属性 i 的所有后裔结点的集合 p_i（用 n 维 0-1 向量表示）

　end

end.

以下还要设计找出直接先决（即盖住关系）的算法.

如果 j 满足 $p_i \geqslant p_j$，且(i) p_j 中仅含 1 个元素，则 i 是 j 的直接先决；或(ii) p_j 中至少有 2 个元素，但 j 是满足 $p_i \geqslant p_j$ 中最大下标者；否则属性 i 和 j 独立.

显然这个可达阵中逐对两行比较的算法，只要进行 $(n-1)+(n-2)+\cdots+2=\sum\limits_{j=2}^{n-1} j=(n-1+2)\cdot(n-2)/2=(n-2)(n+1)/2$ 次比较. 但是，当关联阵不是充要 Q 阵时，下面例子显示定理 2 不成立，如图 1 所示 5 个属性构成的层级关系.

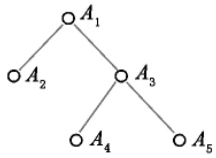

图 1　5 个属性的一个结构图

图 1 对应的邻接阵 $\boldsymbol{A}$ 和可达阵 $\boldsymbol{R}$ 分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},$$

它所对应图 1 的层级结构，由扩张算法得

$$\begin{array}{c}\qquad\qquad\qquad\qquad j=2 \qquad\quad j=3 \quad j=4\\ Q_p=\left[\begin{array}{ccccc|ccc|c|cc}1&1&1&1&1&1&1&1&&1&1\\0&1&0&0&0&1&1&1&&0&1\\0&0&1&1&1&1&1&1&&1&1\\0&0&0&1&0&0&1&0&&0&1\\0&0&0&0&1&0&0&1&&1&1\end{array}\right].\end{array}$$

如果删除 Q_p 中第 2 列，所得 Q 不是充要 Q 阵，对 Q 阵用缩减算法，导出 Q_1

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&1&1&1&0&1\\0&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&0&1&0&0&1&0&1&1\\0&0&0&1&0&0&1&1&1\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&0&0&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}_1,$$

$\boldsymbol{Q}$ 的第 6 ~ 9 列满足 $\boldsymbol{q}_9=\boldsymbol{q}_7 \vee \boldsymbol{q}_8$，$\boldsymbol{q}_8=\boldsymbol{q}_3 \vee \boldsymbol{q}_4$，$\boldsymbol{q}_7=\boldsymbol{q}_4 \vee \boldsymbol{q}_5$，$\boldsymbol{q}_6=\boldsymbol{q}_3 \vee \boldsymbol{q}_5$，故可以缩减 $\boldsymbol{Q}$ 的 6，7，8，9 列而得到 $\boldsymbol{Q}_1$. 对 $\boldsymbol{Q}_1$ 中两行相比较得到 A_1 是属性 A_2，A_3，A_4，A_5 的先决属性，而 A_3 是 A_2，A_4，A_5 的先决. 注意 $\boldsymbol{Q}_1$ 和 $\boldsymbol{R}$ 不相同. 由 $\boldsymbol{Q}_1$ 导出的属性层级关系如图 2 所示. 显然，$\boldsymbol{Q}$ 的第 3 行减去第 2 行的差向量中所有分量均非负，而可达矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的第 3 行减去第 2 行的差向量不可能满足所有分量均非负的要求.

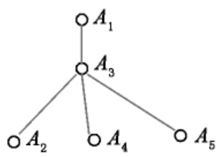

图 2　一个被“污染”的 5 个属性的结构图

由这个例子可以看到 K. K. Tatsuoka 介绍的方法是在关联阵 Q 满足一定要求(Q 必须可达阵 R 为子矩阵)时才可能使得从 Q 中挖掘的属性层级和从可达矩阵挖掘出来的层级是一致的.

4 讨论

上面的例子介绍了使用缩减算法,可以判断由关联矩阵 Q 是否可以导出可达矩阵 R,若不能导出 R,则 Q 质量不行[11],因为这时候 Q 不能代表属性之间的关系,即不能代表所讨论对象的全体;反之 Q 便可以代表所讨论对象的全体. 由充要 Q 矩阵挖掘出来的属性层级关系和由可达矩阵挖掘出来的层级关系完全一致. 但是,对于非充要的关联矩阵,也有可能从 Q 矩阵挖掘出正确的层级结构. 比如对于 3 个独立属性(所有属性之间互相没有先决关系,则称这些属性的层级关系为独立的),可达矩阵是 3 阶单位矩阵. 设 $Q=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$,由行向量两两比较,知 3 个属性相互独立,而这个 Q 矩阵并不是充要 Q 矩阵,因为它不包含可达矩阵.

偏序关系的可达矩阵挖掘出属性(结点)的层级关系,进而画出 Hasse 图,在形式概念分析中 Hasse 图也十分重要[13].

5 参考文献

[1] 丁树良,罗芬. 求偏序关系 Hasse 图的算法[J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2005,29(2):150-152.

[2] Ding Shuliang,Luo Fen,Cai Yan,et al. Complement to Tatsuoka's Q matrix theory[C]. Tokyo:Universal Academy Press,2008:417-424.

[3] 杨淑群,丁树良. 有效对象的判定理论与方法[J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2011,35(1):1-4.

[4] Tatsuoka K K. Item construction and psychometric models appropriate for constructed responses[R]. Princeton:Educational Testing Services,1991.

[5] Tatsuoka K K. Item construction and psychometric models appropriate for constructed responses[C]. Hillsdale:Lawrence Erbaum Associates,1993:107-134.

[6] Tatsuoka K K. Architecture of knowledge structures and cognitive diagnosis:a statistical pattern classification approach[C]. Erlbaum:Hillsdale,1995:327-359.

[7] Tatsuoka K K. Cognitive assessment:an introduction to the rule space method[M]. New York:Taylor & Francis Group,2009.

[8] 涂冬波,蔡艳,丁树良. 认知诊断理论、方法与应用[M]. 北京:北京师范大学出版社,2012:128-147.

[9] 丁树良,祝玉芳,林海菁,等. Tatsuoka Q 矩阵理论的修正[J]. 心理学报,2009,41(2):175-181.

[10] 杨淑群,蔡声镇,丁树良,等. 求解简化 Q 矩阵的扩张算法[J]. 兰州大学学报:自然科学版,2008,44(3):87-91,96.

[11] 丁树良,毛萌萌,汪文义,等. 教育认知诊断测验与认知模型一致性的评估[J]. 心理学报,2012,44(11):1535-1546.

[12] 丁树良,杨淑群,汪文义. 可达矩阵在认知诊断测验编制中的重要作用[J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2010,34(5):490-495.

[13] Ganter B,Wille R. 形式概念分析[M]. 马垣,张学东,迟呈英,等译. 北京:科学出版社,2007.

An Efficient Algorithm of Deriving Hasse Diagram from the Reachibility Matrix of a Partial Order Relation
——Together with Its Application to Cognitive Diagnosis

DING Shu-liang,LUO Fen

(College of Computer Information Engineering,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract:Suppose that the rows of a 0-1 matrix $\boldsymbol{Q}$ represent the attributes,the attribute hierarchy from the matrix, $\boldsymbol{Q}$,could be derived through comparing pair of the rows of the $\boldsymbol{Q}$ matrix. But the hierarchy derived from $\boldsymbol{Q}$ matrix may not be coincidental with that derived from the reachibility matrix $\boldsymbol{R}$. When the matrix $\boldsymbol{R}$ is included in $\boldsymbol{Q}$ matrix,the coincidence of the two hierarchies derived from $\boldsymbol{Q}$ and $\boldsymbol{R}$ must be kept. Application of the method to the reachibility matrix corresponding to the partial order relation,an efficient algorithm of deriving the Hasse diagram is proposed,and its application to cognitive diagnosis is discussed.

Key words:partial order relation;reachibility matrix;Hasse diagram;cognitive diagnosis

(责任编辑:冉小晓)