文章编号:1000-5862(2013)05-0475-04

关于图的控制集划分

徐保根,赵利芬,操叶龙,康洪波
(华东交通大学基础科学学院,江西 南昌　330013)

摘要:通过分类归纳的方法,对图的控制集划分问题进行了研究,给出了控制划分数 $d(G)$ 和全控制划分数 $d_t(G)$ 的上界,并确定了 $d(P_m \times P_n)$ 的所有确切值和 $d(C_m \times P_n)$ 部分的确切值.

关键词:图;乘积图;控制数;控制划分数;全控制划分数
中图分类号:O 157.5　　　**文献标志码**:A

0　引言及定义

本文中所指的图均为无向简单图,未说明的符号和术语同于文献[1].

近年来,图的控制理论研究的内容越来越广泛,各类控制概念相继产生且研究成果不断丰富,T. W. Haynes 等[2] 综述了图的控制理论研究方面的主要研究成果,尤其是在图的点控制方面,提出了多种控制概念,但大多成果均是关于控制参数的估计,很少有关于控制集的划分问题的研究成果,E. J. Cockayne 等[3] 引入图的控制划分数概念.

设 $G = (V,E)$ 是 1 个图,$D \subseteq V$,如果 $\forall u \in V - D$,$\exists v \in D$ 使得 $uv \in E$,则称 D 为图 G 的 1 个控制集. 图 G 的最小控制集的容量称为图 G 的控制数,用 $\gamma(G)$ 表示.

定义 1　设 $G = (V,E)$ 是 1 个图,$\{D_1,D_2,\cdots,D_t\}$ 为 $V(G)$ 的 1 个划分,若使得每个 $D_i(i = 1,2,\cdots,t)$ 均为 G 的控制集,则称 G 有 1 个 t-控制集划分,图 G 的控制划分数定义为 $d(G) = \max\{t \mid$ 图 G 有 t-控制集划分$\}$.

由定义 1 可见,任何图 G 均有 1-控制集划分 $V(G) = D_1$,从而 $d(G)$ 都是存在的.

类似地可定义全控制数和全控制划分数如下.

设 $G = (V,E)$ 是 1 个无孤立点的图,$D \subseteq V$,如果 $\forall u \in V$,$\exists v \in D$ 使得 $uv \in E$,则称 D 为图 G 的 1 个全控制集. 图 G 的最小全控制集的容量称为图 G 的全控制数,用 $\gamma_t(G)$ 表示.

定义 2[4]　设 $G = (V,E)$ 是 1 个无孤立点的图,$\{D_1,D_2,\cdots,D_t\}$ 为 $V(G)$ 的 1 个划分,若使得每个 $D_i(i = 1,2,\cdots,t)$ 均为 G 的全控制集,则称 G 有 1 个 t-全控制集划分,图 G 的全控制划分数定义为 $d_t(G) = \max\{t \mid$ 图 G 有 t-全控制集划分$\}$.

值得注意的是,当 G 包含无孤立点时,G 的全控制集不存在,从而 $d_t(G)$ 不存在.

为了方便,若 $u,v \in V(G)$,则用 $u \sim v$ 表示 u 和 v 在 G 中邻接,$N(v)$ 表示 v 点在 G 中的邻域,用 P_n 表示 n 阶路,C_m 表示 m 阶圈,其中 $m \geqslant 3$.

定义 3　设 $G_1 = (V_1,E_1)$ 和 $G_2 = (V_2,E_2)$ 为 2 个不交的图,则 G_1 与 G_2 的 Cartesian 积图(或称为乘积图)$G_1 \times G_2$ 定义为
$V(G_1 \times G_2) = V_1 \times V_2$,$E(G_1 \times G_2) = \{(u_1,v_1)(u_2,v_2) \mid u_1 = u_2$ 且 $v_1 \sim v_2$ 或者 $v_1 = v_2$ 且 $u_1 \sim u_2\}$.

引理 1　对任何 n 阶图 G,$\Delta = \Delta(G)$ 和 $\delta = \delta(G)$ 分别为图 G 的最大度和最小度,则

$$(\text{i})\ \gamma(G) \geqslant \frac{n}{\Delta + 1};(\text{ii})\ \left\lceil \frac{n}{n - \delta} \right\rceil \leqslant d(G) \leqslant \delta + 1.$$

引理 2　对任何无孤立顶点的 n 阶图 G,$\Delta = \Delta(G)$ 和 $\delta = \delta(G)$ 分别为 G 的最大度和最小度,则

$$(\text{i})\ \gamma_t(G) \geqslant \frac{n}{\Delta};(\text{ii})\ \left\lceil \frac{n}{n - \delta + 1} \right\rceil \leqslant d_t(G) \leqslant \delta.$$

由定义 1 可见,若图 G 是图 H 的 1 个生成子图,则图 G 的任何 1 个 t-控制集划分也是图 H 的 1 个 t-控制集划分,因此有如下引理.

引理 3　设 G 是图 H 的任何 1 个生成子图,则 $d(G) \leqslant d(H)$.

收稿日期:2013-05-16
基金项目:国家自然科学基金(11061014,11361024),江西省自然科学基金(20114BAB201010)和江西省教育厅科技课题(GJJ12295)资助项目.
作者简介:徐保根(1963-),男,江西南昌人,教授,主要从事图论及应用方面的研究.

由定义 1 可见,1 个 n 阶图 G 的控制数 $\gamma(G)$ 与控制划分数 $d(G)$ 之间的关系,类似于点独立数 $\beta(G)$ 与点色数 $\chi(G)$ 的关系,不难看出 $\gamma(G)\,d(G)\leqslant n$,$\beta(G)\chi(G)\geqslant n$. 近年来,学者们似乎更注重于研究图的控制数 $\gamma(G)$ 和色数 $\chi(G)$,而不注重研究图的控制划分数 $d(G)$ 和独立数 $\beta(G)$. 文献[5]给出了控制数与控制划分数之和的 1 个上界,文献[6-8]研究了控制划分数与连通度之间的关系,文献[9]将控制划分数称为图的集控制数,值得注意的是,文献[4]中提出的 1 个公开问题:如何确定 $\gamma(P_m\times P_n)$ 的确切值?这是一个至今未解决的难题,具体可参见文献[10]的综述内容.

本文探讨了图的控制集划分问题,1 个图 G 的顶点集至多能划分为多少个不交的控制集?本文主要有 2 个目的:一个是分别给出 $d(G)$ 和 $d_t(G)$ 的 1 个上界,另一个是确定所有 $d(P_m\times P_n)$ 的确切值和部分 $d(C_m\times P_n)$ 的确切值. 这 2 类乘积图 $P_m\times P_n$ 和 $C_m\times P_n$ 的控制集划分问题,也与一类所谓的"实验田"问题有关(种植类型数),在此不作详述.

1 控制划分数与全控制划分数的上界

定理 1 对任何 1 个 n 阶图 G,$|E(G)|=m$,$\Delta=\Delta(G)$ 为图 G 的最大度,则有

$$d(G)\leqslant\frac{n+\sqrt{n^2+8m(\Delta+1)n}}{2n},$$

并且此上界是可达的.

证 (i)当 $d(G)=1$ 时,定理 1 显然成立.

(ii)当 $d(G)=t\geqslant 2$ 时,故存在图 G 的 1 个控制集划分 $\{D_1,D_2,\cdots,D_t\}$. 由于 D_i 均为图 G 的 1 个控制集,由控制数的性质知 $|D_i|\geqslant n/(\Delta+1)$. $\forall D_i,D_j(1\leqslant i\neq j\leqslant t)$,考虑 D_i 和 D_j 之间的边数. 令 $E_{ij}=\{e=uv\in E(G)\mid u\in D_i,v\in D_j\}$,$m_{ij}=|E_{ij}|$.

因为 D_j 为图 G 的控制集,故 $\forall v\in D_i$,均有 $|N(v)\cap D_j|\geqslant 1$,从而 $m_{ij}=|E_{ij}|=\sum\limits_{v\in D_i}|N(v)\cap D_j|\geqslant|D_i|\geqslant n/(\Delta+1)$,因此,

$$m=|E(G)|\geqslant\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant t}m_{ij}\geqslant\frac{n}{\Delta+1}\binom{t}{2}=\frac{nt(t-1)}{2(\Delta+1)},$$

从而

$$d(G)=t\leqslant\frac{n+\sqrt{n^2+8m(\Delta+1)n}}{2n},$$

且当 G 为完全图时,等号成立. 定理 1 证毕.

定理 2 对任何 1 个无孤立顶点的 n 阶图 G,$|E(G)|=m$,$\Delta=\Delta(G)$ 为图 G 的最大度,则

$$d_t(G)\leqslant\frac{n+\sqrt{n^2+4\Delta(2m-n)n}}{2n}.$$

证 由于图 G 无孤立顶点,即最小度 $\delta\geqslant 1$,故 $\exists d_t(G)$ 使得 $2m=\sum\limits_{v\in V}d(v)\geqslant n$. 当 $d_t(G)=1$ 时,定理 2 显然成立. 以下设 $d_t(G)=t\geqslant 2$,故存在图 G 的 1 个全控制集划分 $\{D_1,D_2,\cdots,D_t\}$,对于每个 $i(1\leqslant i\leqslant t)$,由于 D_i 均为图 G 的 1 个全控制集,由全控制数的性质知 $|D_i|\geqslant n/\Delta$. $\forall D_i,D_j(1\leqslant i\neq j\leqslant t)$,现考虑 D_i 和 D_j 之间的边数. 令 $E_{ij}=\{e=uv\in E(G)\mid u\in D_i,v\in D_j\}$,$m_{ij}=|E_{ij}|$.

因为 D_j 为图 G 的全控制集,故 $\forall v\in D_i$,均有 $|N(v)\cap D_j|\geqslant 1$,从而 $m_{ij}=|E_{ij}|=\sum\limits_{v\in D_i}|N(v)\cap D_j|\geqslant|D_i|\geqslant n/\Delta$.

又由全控制集的定义知,每个 D_j 在 G 中的导出子图 $G[D_j]$ 无孤立顶点,故对每个 $j=1,2,\cdots,t$,均有 $m_j=|E(G[D_j])|\geqslant|D_j|/2$. 注意到 $\sum\limits_{j=1}^{t}|D_j|=n$,因此,

$$m=|E(G)|\geqslant\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant t}m_{ij}+\sum_{j=1}^{t}m_j\geqslant\frac{n}{\Delta}\binom{t}{2}+\frac{n}{2}=\frac{nt(t-1)}{2\Delta}+\frac{n}{2},$$

这导出

$$d_t(G)=t\leqslant\frac{n+\sqrt{n^2+4\Delta(2m-n)n}}{2n}.$$

定理 2 证毕.

2 两类乘积图的控制划分数

本部分主要确定 2 类乘积图的控制划分数,即给出 $d(P_m\times P_n)$ 的确切值和部分 $d(C_m\times P_n)$ 的确切值. 类似的方法也可用来确定其全控制划分数. 不过,由引理 2 即得下面的引理 4.

引理 4 设 m 和 n 均为整数,且 $m\geqslant n\geqslant 2$,则

$$d_t(P_m\times P_n)=2.$$

定理 3 设 m 和 n 均为整数,且 $m\geqslant n\geqslant 2$,则

(i)当 $(m,n)=(2,2)$ 或 $(m,n)=(4,2)$ 时,

$$d(P_m\times P_n)=2;$$

(ii)当 $(m,n)\neq(2,2)$ 且 $(m,n)\neq(4,2)$ 时,

$$d(P_m\times P_n)=3.$$

证 记 $G=P_m\times P_n$,为了方便,记 $V(G)=\{(i,j)\mid 1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n\}$,其中
$E(G)=\{(i,j)(i+1,j)\mid 1\leqslant i\leqslant m-1,1\leqslant j\leqslant$

$n\} \cup \{(i,j)(i,j+1) \mid 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n-1\}$.

当$(m,n)=(2,2)$或$(m,n)=(4,2)$时,不难验证$V(G)$至多能划分为2个不交的控制集,即定理3中(ⅰ)成立.

当$(m,n) \neq (2,2)$且$(m,n) \neq (4,2)$时,首先,由引理1知,$d(G) \leqslant \delta(G)+1=3$,下面将$V(G)$划分成图$G$的3个不交的控制集即可.

令$f: V \to \{1,2,3\}$,$D_i=\{v \in V(G) \mid f(v)=i\}(i=1,2,3)$. 显然,1个函数(映射)$f$对应$V(G)$的1个划分$V(G)=D_1 \cup D_2 \cup D_3$,下面分4种情况定义函数$f$,只需验证在$f$下对应的每个$D_i(i=1,2,3)$均为图$G$的控制集.

情况1　当$n=2$且m为奇数时,对$V(G)$中每个点$(i,j)(1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant 2)$,定义

$$f(2k,1)=f(2k,2)=3, k=1,2,\cdots,\frac{m-1}{2};$$

$$f(4k+1,1)=1, f(4k+3,1)=2, f(4k+1,2)=2, f(4k+3,2)=1, k=0,1,2,\cdots,$$

不难验证:$D_i=\{v \in V(G) \mid f(v)=i\}(i=1,2,3)$均为图$G$的控制集.

情况2　当$n=2$且m为偶数时,由(ⅰ)知只需考虑偶数$m \geqslant 6$的情形.

(a)$f(1,1)=1, f(1,2)=2, f(2,1)=f(2,2)=3, f(3,1)=2, f(3,2)=1, f(4,1)=1, f(4,2)=2$;

(b)$f(2k+1,1)=f(2k+1,2)=3, 2 \leqslant k \leqslant \frac{m}{2}-1$;

(c)$f(4k+2,1)=1, f(4k+2,2)=2, f(4k,1)=2, f(4k,2)=1, k \geqslant 2$,

同样不难验证:每个$D_i=\{v \in V(G) \mid f(v)=i\}(i=1,2,3)$均为图$G$的控制集.

情况3　当$n \geqslant 3$且奇数$m \geqslant 3$时,将情况1中的函数f拓广如下:

$$f(i,j)=\begin{cases} f(i,1), j \equiv 1(\bmod 2), \\ f(i,2), j \equiv 0(\bmod 2), \end{cases}$$

其中$i \geqslant j \geqslant 3$.

情况4　当$n \geqslant 3$且偶数$m \geqslant 4$时,注意到$m \geqslant n$.

(a)当$(m,n)=(4,3)$时,令$f(i,2)=2(i=1,2,3,4)$, $f(1,1)=f(3,1)=f(2,3)=f(4,3)=1$, $f(1,3)=f(3,3)=f(2,1)=f(4,1)=2$;

(b)当$(m,n)=(4,4)$时,将情况4(a)定义的函数f扩充定义

$$f(1,4)=f(4,4)=2, f(2,4)=1, f(3,4)=3;$$

(c)当$n \geqslant 3$且$m \geqslant 6$为偶数时,将情况2中的函数f同样拓广如下:

$$f(i,j)=\begin{cases} f(i,1), j \equiv 1(\bmod 2), \\ f(i,2), j \equiv 0(\bmod 2), \end{cases}$$

其中$i \geqslant j \geqslant 3$. 同样不难验证:每个$D_i=\{v \in V(G) \mid f(v)=i\}(i=1,2,3)$均为图$G$的控制集.

综上所述,当$(m,n) \neq (2,2)$或$(m,n) \neq (4,2)$时,$V(G)$可划分成图G的3个不交的控制集,即$d(P_m \times P_n)=3$. 定理3证毕.

定理4　设m和n均为整数,$m \geqslant 3$,则

(ⅰ)当$m \equiv 0(\bmod 4)$,$n \geqslant 2$时,$d(C_m \times P_n)=4$;

(ⅱ)当$m \in \{3,5,6,7\}$,$n \geqslant 2$时,$d(C_m \times P_n)=3$;

(ⅲ)当$m \equiv 1,2,3(\bmod 4)$时,$d(C_m \times P_2)=3$.

证　记$H=C_m \times P_n$,$G=P_m \times P_n$与定理3的证明中所给出的相同,G作为图H的1个生成子图. $V(H)=V(G)$,$E(H)=E(G) \cup \{(m,i)(1,i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$,其中$V(G)$和$E(G)$同于定理3的证明中所给出的.

情况1　当$m \equiv 0(\bmod 4)$时,对任意整数x,定义$[x]_4$为满足$x \equiv [x]_4(\bmod 4)$和$1 \leqslant [x]_4 \leqslant 4$的正整数. 对于$1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$,下面对图$H$的所有点$v=(i,j)$定义函数$f(v)$的值. 当$j$为奇数时,令$f(i,j)=[i]_4$;当$j$为偶数时,令$f(i,j)=[i+2]_4$.

不难验证:每个$D_i=\{v \in V(G) \mid f(v)=i\}(i=1,2,3,4)$均为图$H$的控制集,故$V(H)$可被划分成4个不交的控制集,即$d(H) \geqslant 4$. 另一方面,由引理1知$d(H) \leqslant \delta(H)+1=4$,因此,$d(H)=4$,定理4中(ⅰ)成立.

情况2　当$m \equiv 1,2,3(\bmod 4)$时,由于$m \geqslant 3$,此时$m \neq 2$且$m \neq 4$.

图$G=P_m \times P_n$作为H的生成子图,由引理1,引理3及定理3(ⅱ)得

$$3=d(G) \leqslant d(H) \leqslant \delta(H)+1=4.$$

下面用反证法证明$d(H) \neq 4$即可.

假设$d(H)=4$,即$V(H)=D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$被划分成4个不交的控制集.

为了方便,称D_i中的点为i号点(或称标号为i的点).

记$V_k=\{(i,k) \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}(k=1,2,\cdots,n)$,并称$V_k$在$H$中的导出圈$C^k=H[V_k] \cong C_n$为第$k$圈$(k=1,2,\cdots,n)$. 将$H=C_m \times P_n$嵌入平面内,使内部面为$C^1$,外部面为$C^n$.

由于V_1中点任意点v在H中的度$d_H(v)=3$,v点在H中的闭邻域$N_H[v]$均包含4个点,且它们为相互不同号的点,即分别在不同的控制集$D_i(i=1,2,3,4)$中,且$\forall u \in V(H)$,$N_H[u]$中必包含4种不

同标号的点. 故 V_2 中的点的标号由 V_1 中的点标号唯一确定.

(a) 当 $m=3$ 时,V_1 中只有 3 个点,故至少缺少 1 个标号 $j\in\{1,2,3,4\}$,由于 D_j 为控制集,故 V_2 中的点的标号均为 j(即相同),即 $\forall u\in V_2$,$N_H[u]$ 中的点至多只有 3 种不同的标号,矛盾.

当 $m=5$ 时,V_1 中必有 2 个相同号点,且其在 C^1 中的距离不超过 2,即 $\exists v\in V_1$,使得 $N_H[v]$ 中的点至多只包含 3 种不同的标号,矛盾.

当 $m\in\{6,7\}$ 时,存在 1 个标号 $j\in\{1,2,3,4\}$,使得标号为 j 的点在 V_1 中至多只有 1 个点,从而在 V_2 中至少 3 个标号为 j 的点 u、v 和 w,使得 $uv\in E(H)$ 且 $vw\in E(H)$,这表明 $N_H[v]$ 中的点至多只有 3 种不同的标号,矛盾. 因此,定理 4 中(ⅱ)成立.

(b) 当 $m\equiv 1,2,3(\mathrm{mod}4)$ 时,由于定理 4 中(ⅱ)成立,故可设 $m\geqslant 9$.

由于 V_1 中标号相同的任何 2 个点在 C^1 中的距离至少为 3(否则与情形(a)中一样产生矛盾),因此存在标号相同(不妨设标号为 i)的 2 个点 u 和 v,使得 u 和 v 在 C^1 中的距离 $s=d_{C_1}(u,v)\neq 4$(且这条长度为 s 的路 P_{s+1} 上无其它标号为 i 的点),否则有 $m\equiv 0(\mathrm{mod}4)$,这与条件矛盾.

若 $s=d_{C_1}(u,v)=3$,由于 $P_{s+1}=P_4$ 上的 4 个点中 u 点和 v 点的标号相同,故 P_4 上缺少一种标号. 若 $s=d_{C_1}(u,v)\geqslant 5$,显然也有 C^1 上存在缺少 1 个标号的 P_4,且 P_4 的 2 个端点标号相同,P_4 的 2 个非端点相邻的 V_2 中的点标号相同(即为 P_4 所缺少的标号). 从而 C^2 中存在 2 个相邻点具有相同的标号,矛盾. 定理 4 证毕.

最后提出 1 个自然的问题如下:

问题 1 对所有的整数 $m\geqslant 3$ 和 $n\geqslant 2$,如何确定所有 $d(C_m\times P_n)$ 的确切值?

定理 3 给出了所有 $d(P_m\times P_n)$ 的确切值,定理 4 给出了当 $m\leqslant 8$ 或者 $n=2$ 或者 $m\equiv 0(\mathrm{mod}4)$ 时 $d(C_m\times P_n)$ 的确切值. 但对于一般情况,这仍是一个未解决的问题. 现猜测:当 $n\geqslant 4$ 且 m 较大时,$d(C_m\times P_n)=4$,即 $V(C_m\times P_n)$ 可划分为 4 个不交的控制集.

3 参考文献

[1] 帮迪 J A,默蒂 USR. 图论及其应用[M]. 吴望名,李念祖,吴兰芳,等译. 北京:科学出版社,1984.

[2] Haynes T W,Hedetniemi S T,Slater P J B. Domination in graphs:advanced topics[M]. New York:Marcel Dekker Inc,1998.

[3] Cockayne E J,Hedetniemi S T. Towards a theory of domination in graphs[J]. Networks,1977,7(3):247-261.

[4] 徐保根. 图的控制理论[M]. 北京:科学出版社,2008.

[5] XuBaogen,Cockayne E J,Haynes T W,et al. Extremal graphs for inequalities involving domination parameters[J]. Discrete Math,2000,216(1/2/3):1-10.

[6] Zelinka B. Some remarks on domatic numbers of graphs[J]. Casop Pest Mat,1981,106(4):373-375.

[7] Zelinka B. Adomatic and idiomatic numbers of graphs[J]. Math Slovaca,1983,33(1):99-103.

[8] 徐保根,丁宗鹏,喻卫. 几类图的符号星 k 控制数[J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2012,36(5):516-518.

[9] 徐保根,罗茜,丁宗鹏. 关于图的集控制数[J]. 华东交通大学学报,2011,28(5):1-4.

[10] 徐保根. 图的控制与染色理论[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2013.

On the Partitions of the Dominating Set in Graphs

XU Bao-gen,ZHAO Li-fen,CAO Ye-long,KANG Hong-bo

(School of Basic Science,East China Jiaotong University,Nanchang Jiangxi 330013,China)

Abstract: The problem of dominating set partition is studied by using the method of the partition and induction. An upper bound of domatic number $d(G)$ and total domatic number $d_t(G)$ of G are given. And the all exact value of $d(P_m\times P_n)$ and partial exact value of $d(C_m\times P_n)$ are determined.

Key words: graph;product graph;domination number;domatic number;total domatic number

(责任编辑:曾剑锋)