

文章编号: 1000-5862(2014)02-0140-05

## 3 粒子 GHZ 态的量子远程克隆

徐 玮<sup>1</sup>, 王作栋<sup>1</sup>, 聂义友<sup>1,2\*</sup>

(1. 江西师范大学物理与通信电子学院, 江西 南昌 330022;

2. 江西光电子与通信重点实验室, 江西 南昌 330022)

**摘要:** 提出了一个能实现 3 粒子 GHZ 态  $1 \rightarrow 2$  的量子远程克隆方案: 运用 2 个 4 粒子纠缠态作为量子信道, 通过发送者的 2 次 Bell 测量、Hadamard 变换、单粒子测量及经典通信; 2 个接收者进行相应的幺正变换、引入附加粒子和通过 Toffoli 门, 就可以得到原未知态的近似拷贝, 此方案的保真度与输入态有关. 另外, 还推广了一种实现  $N$  粒子 GHZ 态  $1 \rightarrow 2$  的量子远程克隆方案.

**关键词:** GHZ 态; 量子远程克隆; 幺正变换; 保真度

**中图分类号:** O 431.2

**文献标志码:** A

## 0 引言

量子不可克隆原理<sup>[1]</sup>使得任意一个未知量子态不可以精确地克隆, 然而可以进行一个未知量子态的近似克隆<sup>[2]</sup>, 如量子态的近似克隆、概率克隆<sup>[3-4]</sup>、普适最优克隆<sup>[5]</sup>等方案. 近十几年来, 量子克隆成为了人们研究的热点. 文献[6]研究了单粒子量子态的普适远程克隆方案, 此方案是将一个未知的单粒子态传送给  $M$  个处于空间不同地点的接收者, 其保真度不依赖于输入态; 文献[7]则是上述方案的具体形式; 文献[8]研究了量子纠缠态的普适远程克隆方案, 此方案使用一个 4 粒子量子纠缠信道传送未知的量子纠缠态, 不仅节省了量子纠缠资源, 而且还提高了克隆的保真度; 文献[9]提出了通过局部运算实现远程隐形传态的方案, 此方案使用 2 个 4 粒子量子纠缠态作为量子信道, 把一个 2 粒子纠缠态传送给  $N$  个处于空间不同地点的接收者, 同时也给出了实现普适远程克隆所需的量子信道; 文献[10]研究了多量子比特态的非对称远程克隆方案, 此方案则实现了一个任意未知多量子比特态  $1 \rightarrow 2$  的远程克隆. 另外, 文献[11-12]分别从理论和实验上研究了单粒子态的量子远程克隆; 文献[13]用实验来研究高保真六光子纠缠态的远程克隆方案, 后来又有研究可控量子远程克隆的方案, 控制单比特量子纯态的远程克隆和翻转, 在没有控制者的

帮助下接收者无法接收到纯态的信息<sup>[14]</sup>.

本文首先提出一种能实现未知 3 粒子 GHZ 态  $1 \rightarrow 2$  的量子远程克隆方案, 此方案需要 2 个 4 粒子纠缠态作为量子信道, 这个量子信道与文献[9]中远程克隆 2 粒子纠缠态的量子信道一样, 选择合适的量子信道后通过量子测量、 $H$  变换、单粒子测量、经典通信以及相应的幺正变换和量子门, 从而得到可以最高 25/36 的输出态保真度. 3 粒子 GHZ 态  $1 \rightarrow 2$  的量子远程克隆文献[9]也提出过, 但本方案中的保真度远高于文献[9]中的保真度, 而且文献[9]使用了 3 个 4 粒子纠缠态作为量子信道, 本方案只用了 2 个 4 粒子纠缠态, 相对来说节约了纠缠资源. 此外, 本文还推广了  $N$  粒子 GHZ 态  $1 \rightarrow 2$  的量子远程克隆.

## 1 3 粒子 GHZ 态 $1 \rightarrow 2$ 的量子远程克

假设 Alice 持有一个未知 3 粒子 GHZ 态, 其态矢为  $|\varphi\rangle_{123} = \alpha|000\rangle_{123} + \beta|111\rangle_{123}$ ,  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ , Alice 想把这个态分别传送给处于不同地点的 2 个接受者 Bob 和 Charlie, 但粒子 1、2 和 3 始终留在 Alice 一方. 而实现该方案的关键是寻找并构造适当的量子信道, 并为发送者和接受者所共享. 为此, 选择发送者(Alice)和接受者(Bob 和 Charlie)共享如下 2 个 4 粒子纠缠态作为量子信道<sup>[9, 15]</sup>

$$|\psi\rangle_{TC} = \left( |0\rangle_{P_1} |\varphi_0\rangle_{A_1B_1C_1} + |1\rangle_{P_1} |\varphi_1\rangle_{A_1B_1C_1} \right) / \sqrt{2} \otimes$$

收稿日期: 2013-10-12

基金项目: 国家自然科学基金(61265001)和江西省自然科学基金(20122BAB202005)资助项目.

通信作者: 聂义友(1963-), 男, 江西丰城人, 教授, 主要从事量子信息的研究.

$$\left( |0\rangle_{P_2} |\varphi_0\rangle_{A_2B_2C_2} + |1\rangle_{P_2} |\varphi_1\rangle_{A_2B_2C_2} \right) / \sqrt{2}, \quad (1)$$

其中  $|\varphi_0\rangle_{A_iB_iC_i} = \left( \sqrt{2/3} |0\rangle |0\rangle |0\rangle + \sqrt{1/6} |1\rangle \cdot |0\rangle |1\rangle + \sqrt{1/6} |1\rangle |1\rangle |0\rangle \right)_{A_iB_iC_i}$ ,  $|\varphi_1\rangle_{A_iB_iC_i} = \left( \sqrt{2/3} |1\rangle |1\rangle |1\rangle + \sqrt{1/6} |0\rangle |1\rangle |0\rangle + \sqrt{1/6} |0\rangle |0\rangle |1\rangle \right)_{A_iB_iC_i}$  ( $i = 1, 2$ ). 粒子  $P_1, P_2$  为 Alice 持有, 粒子  $B_1, B_2$  和粒子  $C_1, C_2$  分别由 Bob 和 Charlie 持有.  $A_1, A_2$  表示辅助粒子, 为方便起见, 假设在 Alice 一方.

待传送粒子和信道粒子所构成的总系统的初态为  $|\Psi_{\text{whole}}\rangle = |\varphi\rangle_{123} \otimes |\psi\rangle_{TC}$ .

首先, Alice 对粒子 ( $1, P_1$ ) 和 ( $2, P_2$ ) 进行 2 次 Bell 测量, 有如下 16 种可能的测量结果为

$$\begin{aligned} {}_{1P_1} \langle \phi^+ | {}_{2P_2} \langle \phi^+ | \Psi_{\text{whole}} \rangle &= {}_{1P_1} \langle \phi^- | {}_{2P_2} \langle \phi^- | \Psi_{\text{whole}} \rangle = \\ & \frac{1}{4} (\alpha |0\rangle_3 |\phi_0\rangle_{A_1B_1C_1} |\phi_0\rangle_{A_2B_2C_2} + \beta |1\rangle_3 |\phi_1\rangle_{A_1B_1C_1} \cdot \\ & |\phi_1\rangle_{A_2B_2C_2}); \\ {}_{1P_1} \langle \phi^+ | {}_{2P_2} \langle \phi^- | \Psi_{\text{whole}} \rangle &= {}_{1P_1} \langle \phi^- | {}_{2P_2} \langle \phi^+ | \Psi_{\text{whole}} \rangle = \\ & \frac{1}{4} (\alpha |0\rangle_3 |\phi_0\rangle_{A_1B_1C_1} |\phi_0\rangle_{A_2B_2C_2} - \beta |1\rangle_3 \cdot \\ & |\phi_1\rangle_{A_1B_1C_1} |\phi_1\rangle_{A_2B_2C_2}); \\ {}_{1P_1} \langle \phi^+ | {}_{2P_2} \langle \psi^+ | \Psi_{\text{whole}} \rangle &= {}_{1P_1} \langle \phi^- | {}_{2P_2} \langle \psi^- | \Psi_{\text{whole}} \rangle = \\ & \frac{1}{4} (\alpha |0\rangle_3 |\phi_0\rangle_{A_1B_1C_1} |\phi_1\rangle_{A_2B_2C_2} + \beta |1\rangle_3 \cdot \\ & |\phi_1\rangle_{A_1B_1C_1} |\phi_0\rangle_{A_2B_2C_2}); \\ {}_{1P_1} \langle \phi^+ | {}_{2P_2} \langle \psi^- | \Psi_{\text{whole}} \rangle &= {}_{1P_1} \langle \phi^- | {}_{2P_2} \langle \psi^+ | \Psi_{\text{whole}} \rangle = \\ & \frac{1}{4} (\alpha |0\rangle_3 |\phi_0\rangle_{A_1B_1C_1} |\phi_1\rangle_{A_2B_2C_2} - \beta |1\rangle_3 |\phi_1\rangle_{A_1B_1C_1} \cdot \end{aligned}$$

$$|\phi_0\rangle_{A_2B_2C_2}),$$

$${}_{1P_1} \langle \psi^+ | {}_{2P_2} \langle \phi^+ | \Psi_{\text{whole}} \rangle =$$

$${}_{1P_1} \langle \psi^- | {}_{2P_2} \langle \phi^- | \Psi_{\text{whole}} \rangle =$$

$$\frac{1}{4} (\alpha |0\rangle_3 |\phi_1\rangle_{A_1B_1C_1} |\phi_0\rangle_{A_2B_2C_2} + \beta |1\rangle_3 \cdot$$

$$|\phi_0\rangle_{A_1B_1C_1} |\phi_1\rangle_{A_2B_2C_2}),$$

$${}_{1P_1} \langle \psi^+ | {}_{2P_2} \langle \phi^- | \Psi_{\text{whole}} \rangle = {}_{1P_1} \langle \psi^- | {}_{2P_2} \langle \phi^+ | \Psi_{\text{whole}} \rangle =$$

$$\frac{1}{4} (\alpha |0\rangle_3 |\phi_1\rangle_{A_1B_1C_1} |\phi_0\rangle_{A_2B_2C_2} - \beta |1\rangle_3 \cdot$$

$$|\phi_0\rangle_{A_1B_1C_1} |\phi_1\rangle_{A_2B_2C_2}),$$

$${}_{1P_1} \langle \psi^+ | {}_{2P_2} \langle \psi^+ | \Psi_{\text{whole}} \rangle = {}_{1P_1} \langle \psi^- | {}_{2P_2} \langle \psi^- | \Psi_{\text{whole}} \rangle =$$

$$\frac{1}{4} (\alpha |0\rangle_3 |\phi_1\rangle_{A_1B_1C_1} |\phi_1\rangle_{A_2B_2C_2} + \beta |1\rangle_3 \cdot$$

$$|\phi_0\rangle_{A_1B_1C_1} |\phi_0\rangle_{A_2B_2C_2}),$$

$${}_{1P_1} \langle \psi^+ | {}_{2P_2} \langle \psi^- | \Psi_{\text{whole}} \rangle = {}_{1P_1} \langle \psi^- | {}_{2P_2} \langle \psi^+ | \Psi_{\text{whole}} \rangle =$$

$$\frac{1}{4} (\alpha |0\rangle_3 |\phi_1\rangle_{A_1B_1C_1} |\phi_1\rangle_{A_2B_2C_2} - \beta |1\rangle_3 \cdot$$

$$|\phi_0\rangle_{A_1B_1C_1} |\phi_0\rangle_{A_2B_2C_2}),$$

其中

$$|\varphi^\pm\rangle = (|00\rangle \pm |11\rangle) / \sqrt{2},$$

$$|\psi^\pm\rangle = (|01\rangle \pm |10\rangle) / \sqrt{2}.$$

其次, Alice 对粒子 3 进行 Hadamard 变换 ( $H$  变换), 变换后再对粒子 3 在  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  基下进行测量, 并把所有的测量结果通过经典信道发送给 2 个接收者 Bob 和 Charlie. Bob 和 Charlie 根据收到的经典信息分别对其拥有的粒子  $B_1, B_2$  和粒子  $C_1, C_2$  进行相应的么正变换. Alice 的测量结果与对应的么正变换如表 1 所示, 其中  $I, \sigma_z, \sigma_x$  和  $i\sigma_y$  是泡利算符.

表 1 发送者的测量结果和 2 个接受者对其粒子相应的么正变换

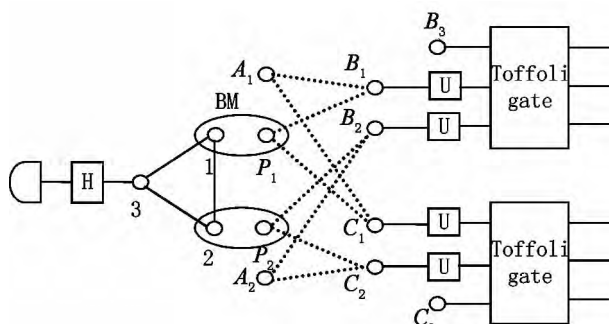
Alice 的 2 次 Bell 测量结果	对粒子 3 的测量结果	Bob 和 Charlie 对粒子 $B_1$ ( $C_1$ ) 和 $B_2$ ( $C_2$ ) 的变换	Alice 的 2 次 Bell 测量结果	对粒子 3 的测量结果	Bob 和 Charlie 对粒子 $B_1$ ( $C_1$ ) 和 $B_2$ ( $C_2$ ) 的变换
$ \varphi^+\rangle_{1P_1}  \varphi^+\rangle_{2P_2}$	$ 0\rangle_3$	$I_{B_1(C_1)} \otimes I_{B_2(C_2)}$	$ \psi^+\rangle_{1P_1}  \varphi^+\rangle_{2P_2}$	$ 0\rangle_3$	$(\sigma_x)_{B_1(C_1)} \otimes I_{B_2(C_2)}$
$ \varphi^+\rangle_{1P_1}  \varphi^+\rangle_{2P_2}$	$ 1\rangle_3$	$I_{B_1(C_1)} \otimes (\sigma_z)_{B_2(C_2)}$	$ \psi^+\rangle_{1P_1}  \varphi^+\rangle_{2P_2}$	$ 1\rangle_3$	$(\sigma_x)_{B_1(C_1)} \otimes (\sigma_z)_{B_2(C_2)}$
$ \varphi^+\rangle_{1P_1}  \varphi^-\rangle_{2P_2}$	$ 0\rangle_3$	$I_{B_1(C_1)} \otimes (\sigma_z)_{B_2(C_2)}$	$ \psi^+\rangle_{1P_1}  \varphi^-\rangle_{2P_2}$	$ 0\rangle_3$	$(\sigma_x)_{B_1(C_1)} \otimes (\sigma_z)_{B_2(C_2)}$
$ \varphi^+\rangle_{1P_1}  \varphi^-\rangle_{2P_2}$	$ 1\rangle_3$	$I_{B_1(C_1)} \otimes I_{B_2(C_2)}$	$ \psi^+\rangle_{1P_1}  \varphi^-\rangle_{2P_2}$	$ 1\rangle_3$	$(\sigma_x)_{B_1(C_1)} \otimes I_{B_2(C_2)}$
$ \varphi^-\rangle_{1P_1}  \varphi^+\rangle_{2P_2}$	$ 0\rangle_3$	$I_{B_1(C_1)} \otimes (\sigma_z)_{B_2(C_2)}$	$ \psi^-\rangle_{1P_1}  \varphi^+\rangle_{2P_2}$	$ 0\rangle_3$	$(\sigma_x)_{B_1(C_1)} \otimes (\sigma_z)_{B_2(C_2)}$
$ \varphi^-\rangle_{1P_1}  \varphi^+\rangle_{2P_2}$	$ 1\rangle_3$	$I_{B_1(C_1)} \otimes I_{B_2(C_2)}$	$ \psi^-\rangle_{1P_1}  \varphi^+\rangle_{2P_2}$	$ 1\rangle_3$	$(\sigma_x)_{B_1(C_1)} \otimes I_{B_2(C_2)}$
$ \varphi^-\rangle_{1P_1}  \varphi^-\rangle_{2P_2}$	$ 0\rangle_3$	$I_{B_1(C_1)} \otimes I_{B_2(C_2)}$	$ \psi^-\rangle_{1P_1}  \varphi^-\rangle_{2P_2}$	$ 0\rangle_3$	$(\sigma_x)_{B_1(C_1)} \otimes I_{B_2(C_2)}$

续表 1

Alice 的 2 次 Bell 测量结果	对粒子 3 的测量结果	Bob 和 Charlie 对粒子 $B_1(C_1)$ 和 $B_2(C_2)$ 的变换	Alice 的 2 次 Bell 测量结果	对粒子 3 的测量结果	Bob 和 Charlie 对粒子 $B_1(C_1)$ 和 $B_2(C_2)$ 的变换
$ \varphi^-\rangle_{1P_1} \varphi^-\rangle_{2P_2}$	$ 1\rangle_3$	$I_{B_1(C_1)} \otimes (\sigma_z)_{B_2(C_2)}$	$ \psi^-\rangle_{1P_1} \varphi^-\rangle_{2P_2}$	$ 1\rangle_3$	$(\sigma_x)_{B_1(C_1)} \otimes (\sigma_z)_{B_2(C_2)}$
$ \varphi^+\rangle_{1P_1} \psi^+\rangle_{2P_2}$	$ 0\rangle_3$	$I_{B_1(C_1)} \otimes (\sigma_x)_{B_2(C_2)}$	$ \psi^+\rangle_{1P_1} \psi^+\rangle_{2P_2}$	$ 0\rangle_3$	$(\sigma_x)_{B_1(C_1)} \otimes (\sigma_x)_{B_2(C_2)}$
$ \varphi^+\rangle_{1P_1} \psi^+\rangle_{2P_2}$	$ 1\rangle_3$	$(\sigma_z)_{B_1(C_1)} \otimes (\sigma_x)_{B_2(C_2)}$	$ \psi^+\rangle_{1P_1} \psi^+\rangle_{2P_2}$	$ 1\rangle_3$	$(\sigma_x)_{B_1(C_1)} \otimes (i\sigma_y)_{B_2(C_2)}$
$ \varphi^+\rangle_{1P_1} \psi^-\rangle_{2P_2}$	$ 0\rangle_3$	$(\sigma_z)_{B_1(C_1)} \otimes (\sigma_x)_{B_2(C_2)}$	$ \psi^+\rangle_{1P_1} \psi^-\rangle_{2P_2}$	$ 0\rangle_3$	$(\sigma_x)_{B_1(C_1)} \otimes (i\sigma_y)_{B_2(C_2)}$
$ \varphi^+\rangle_{1P_1} \psi^-\rangle_{2P_2}$	$ 1\rangle_3$	$I_{B_1(C_1)} \otimes (\sigma_x)_{B_2(C_2)}$	$ \psi^+\rangle_{1P_1} \psi^-\rangle_{2P_2}$	$ 1\rangle_3$	$(\sigma_x)_{B_1(C_1)} \otimes (\sigma_x)_{B_2(C_2)}$
$ \varphi^-\rangle_{1P_1} \psi^+\rangle_{2P_2}$	$ 0\rangle_3$	$(\sigma_z)_{B_1(C_1)} \otimes (\sigma_x)_{B_2(C_2)}$	$ \psi^-\rangle_{1P_1} \psi^+\rangle_{2P_2}$	$ 0\rangle_3$	$(\sigma_x)_{B_1(C_1)} \otimes (i\sigma_y)_{B_2(C_2)}$
$ \varphi^-\rangle_{1P_1} \psi^+\rangle_{2P_2}$	$ 1\rangle_3$	$I_{B_1(C_1)} \otimes (\sigma_x)_{B_2(C_2)}$	$ \psi^-\rangle_{1P_1} \psi^+\rangle_{2P_2}$	$ 1\rangle_3$	$(\sigma_x)_{B_1(C_1)} \otimes (\sigma_x)_{B_2(C_2)}$
$ \varphi^-\rangle_{1P_1} \psi^-\rangle_{2P_2}$	$ 0\rangle_3$	$I_{B_1(C_1)} \otimes (\sigma_x)_{B_2(C_2)}$	$ \psi^-\rangle_{1P_1} \psi^-\rangle_{2P_2}$	$ 0\rangle_3$	$(\sigma_x)_{B_1(C_1)} \otimes (\sigma_x)_{B_2(C_2)}$
$ \varphi^-\rangle_{1P_1} \psi^-\rangle_{2P_2}$	$ 1\rangle_3$	$(\sigma_z)_{B_1(C_1)} \otimes (\sigma_x)_{B_2(C_2)}$	$ \psi^-\rangle_{1P_1} \psi^-\rangle_{2P_2}$	$ 1\rangle_3$	$(\sigma_x)_{B_1(C_1)} \otimes (i\sigma_y)_{B_2(C_2)}$

最后 2 个接收者 Bob 和 Charlie 分别引入初态为  $|0\rangle$  的附加粒子  $B_3$  和  $C_3$ , 并分别把粒子 ( $B_1, B_2, B_3$ ) 和 ( $C_1, C_2, C_3$ ) 经过 Toffoli 门<sup>[16]</sup>, 便分别得到了

一个初始态的近似拷贝, 至此 3 粒子纠缠 GHZ 态的量子远程克隆已完成. 其整个过程如图 1 所示.



注: 实线表示原量子态之间的纠缠, 虚线表示发送者接收者共享的量子信道之间的纠缠, H 为 Hadamard 变换, BM 为 Bell 测量, U 为幺正变换.

图 1 3 粒子 GHZ 态的量子远程克隆图

为了使整个过程更清楚, 举个例子加以说明: 假设 Alice 对粒子 ( $1, P_1$ ) 和 ( $2, P_2$ ) 的 Bell 测量结果分别是  $|\psi^+\rangle_{1P_1}$  和  $|\varphi^+\rangle_{2P_2}$ , 则粒子 3、 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1$  和  $C_2$  的变为  ${}_{1P_1}\langle\psi^+| {}_{2P_2}\langle\varphi^+| \Psi_{\text{whole}}\rangle =$

$$\frac{1}{4} \left( \alpha |0\rangle_3 | \varphi_1 \rangle_{A_1 B_1 C_1} | \varphi_0 \rangle_{A_2 B_2 C_2} + \beta |1\rangle_3 | \varphi_0 \rangle_{A_1 B_1 C_1} \cdot | \varphi_1 \rangle_{A_2 B_2 C_2} \right).$$

然后, 对粒子 3 进行 Hadamard 变换得到

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \alpha \left( |0\rangle_3 + |1\rangle_3 \right) | \varphi_1 \rangle_{A_1 B_1 C_1} | \varphi_0 \rangle_{A_2 B_2 C_2} +$$

$$\beta \left( |0\rangle_3 - |1\rangle_3 \right) | \varphi_0 \rangle_{A_1 B_1 C_1} | \varphi_1 \rangle_{A_2 B_2 C_2}.$$

接着, Alice 对粒子 3 在  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  基下进行测量,

$$\text{如果测得为 } |0\rangle \text{ 则得到 } \frac{1}{4\sqrt{2}} \left( \alpha | \varphi_1 \rangle_{A_1 B_1 C_1} | \varphi_0 \rangle_{A_2 B_2 C_2} + \beta | \varphi_0 \rangle_{A_1 B_1 C_1} | \varphi_1 \rangle_{A_2 B_2 C_2} \right).$$

Alice 把所有的测量结果通过经典信道传送给 Bob 和 Charlie. Bob 和 Charlie 根据收到的经典信息分别对自己拥有的粒子  $B_1, B_2$  和  $C_1, C_2$  进行  $(\sigma_x)_{B_1(C_1)} \otimes I_{B_2(C_2)}$  幺正变换, 得到  $|\Psi_{\text{final}}\rangle_{A_1 B_1 C_1 A_2 B_2 C_2} =$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \left( \alpha | \varphi_0 \rangle_{A_1 B_1 C_1} | \varphi_0 \rangle_{A_2 B_2 C_2} + \beta | \varphi_1 \rangle_{A_1 B_1 C_1} | \varphi_1 \rangle_{A_2 B_2 C_2} \right).$$

最后, Bob 和 Charlie 分别引入初始为  $|0\rangle$  附加粒子  $B_3$  和粒子  $C_3$ , 并且他们让自己拥有的粒子分别经过一个 Toffoli 门, 便分别得到了一个初始态的近似拷贝, 到此完成了 3 粒子纠缠 GHZ 态的远程克隆.

接受者 Bob 和 Charlie 获得的约化密度矩阵<sup>[17-20]</sup>

$$\begin{aligned} \text{为 } \rho_{B_1 B_2 B_3} &= \rho_{C_1 C_2 C_3} = \frac{24|\alpha|^2 + 1}{36} |000\rangle \langle 000| + \\ &\frac{24|\beta|^2 + 1}{36} |111\rangle \langle 111| + \frac{5}{36} (|010\rangle \langle 010| + |100\rangle \langle 100| + \\ &|101\rangle \langle 101| + \frac{4\alpha\beta}{9} |000\rangle \langle 111| + \frac{4\alpha\beta}{9} |111\rangle \langle 000|). \end{aligned}$$

根据保真度的定义 Bob 和 Charlie 可得

$$F_B = {}_{123} \langle \varphi | \rho_{B_1 B_2 B_3} | \varphi \rangle_{123} = F_C = {}_{123} \langle \varphi | \rho_{C_1 C_2 C_3} | \varphi \rangle_{123} = 25 - 16|\alpha|^2 |\beta|^2 / 36.$$

因为  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ , 所以保真度  $F$  的范围为:  $21/36 \leq F \leq 25/36$ ; 当  $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$  时左边的等式成立, 当  $|\alpha|^2 = 0$  或  $|\beta|^2 = 0$  时右边的等式成立. 从图 2 看出, 保真度  $F$  与输入态有关, 所以这个方案不是普适过程.

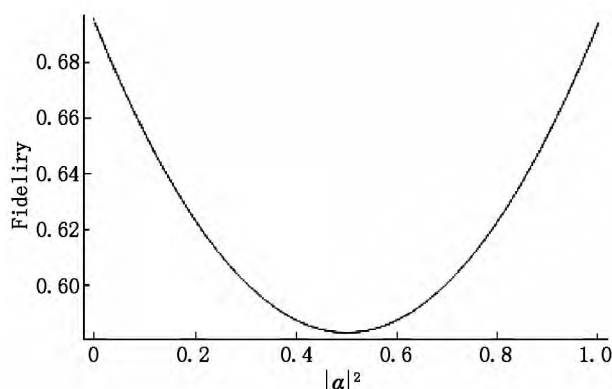


图2 3 粒子 GHZ 态的量子远程克隆的保真度

## 2 $N$ 粒子 GHZ 态 $1 \rightarrow 2$ 的量子远程克隆

运用同样的方法来远程克隆  $N$  粒子的 GHZ 态给 2 个接收者. Alice 持有一个未知的  $N$  ( $N \geq 4$ ) 粒子 GHZ 态为  $|\varphi\rangle_{1,2,\dots,N} = \alpha |00\dots 0\rangle_{1,2,\dots,N} + \beta |11\dots 1\rangle_{1,2,\dots,N}$ ,  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Alice、Bob 和 Charlie 共享与 (1) 式一样的纠缠态作为量子信道.

Alice 分别是对粒子 (1  $P_1$ ) 和 (2  $P_2$ ) 进行 Bell 测量, 并对剩下的粒子做相应的量子测量或变换. 若  $N$  是奇数, 则先对粒子 3 到  $N-1$  中每 2 个组合进行 Bell 测量, 再对粒子  $N$  进行 Hadamard 变换, 并对其进行单粒子测量; 若  $N$  是偶数, 则对粒子 3 到  $N$  中每 2 个组合进行 Bell 测量. 之后把所有的测量结果通过经典通道告诉接受者 Bob 和 Charlie. Bob 和 Charlie 根据他们收到的经典信息进行相应的么正变换, 然后分别引入初始处于  $|0\rangle$  的  $(N-2)$  个附加粒子, 并分别把自己手中的粒子 ( $B_1, B_2, \dots, B_N$ ) 和 ( $C_1, C_2, \dots, C_N$ ) 经过多量子比

特受控非门<sup>[16]</sup> (其中  $B_1, B_2$  和  $C_1, C_2$  为控制比特,  $B_3, B_4, \dots, B_N$  和  $C_3, C_4, \dots, C_N$  为目标比特), 便分别得到了一个初始  $N$  粒子的 GHZ 态的近似拷贝. 到此就完成了未知  $N$  粒子 GHZ 态的量子远程克隆.

## 3 结束语

本文详细地描述了利用 2 个 4 粒子纠缠态作为量子信道, 实现未知 3 粒子 GHZ 态  $1 \rightarrow 2$  的量子远程克隆方案. 发送者分别对粒子 (1  $P_1$ ) 和 (2  $P_2$ ) 进行 2 次 Bell 测量, 并对粒子 3 进行 Hadamard 变换, 再对其进行单粒子测量, 把所有的测量结果通过经典信道传送给接收者. 接收者则对其拥有的粒子  $B_1, B_2$  和粒子  $C_1, C_2$  进行相应的么正变换, 并引入初态为  $|0\rangle$  的附加粒子  $B_3$  和  $C_3$ . 最后 2 个接收者使用 Toffoli 门分别作用于粒子 ( $B_1, B_2, B_3$ ) 和 ( $C_1, C_2, C_3$ ), 便可得到一个原始未知态的近似拷贝, 其最高保真度为  $25/36$ . 此外, 还推广了  $N$  粒子 GHZ 态  $1 \rightarrow 2$  的量子远程克隆, 其共享的量子信道与 3 粒子 GHZ 态远程克隆的量子信道一样, 不需要增加纠缠资源, 只需引入多个初态为  $|0\rangle$  的附加粒子.

本方案所进行的操作都在现有的量子信息处理技术范围内, 所以在实验上是可以实现的. 并且该方案的提出有助于量子通信的发展.

## 4 参考文献

- [1] Wootters W K, Zurek W H. A single quantum cannot be cloned [J]. Nature, 1982, 299: 802-803.
- [2] Scarani V, Blaisdir S, Gisin N. Quantum cloning [J]. Rev Mod Phys, 2005, 77(4): 1225-1256.
- [3] Duan Luming, Guo Guangcan. Probabilistic cloning and identification of linearly independent quantum states [J]. Phys Rev Lett, 1998, 80(22): 4999-5002.
- [4] Zhang Chuanwei, Wang Ziyang, Li Chuanfeng et al. Realizing probabilistic identification and cloning of quantum states via universal quantum logic gates [J]. Phys Rev A, 2000, 61(6): 62310.
- [5] Bru D, DiVincenzo D P, Ekert A et al. Optimal universal and state-dependent quantum cloning [J]. Phys Rev A, 1998, 57(4): 2368-2378.
- [6] Murao M, Jonathan D, Plenio M B et al. Quantum telecloning and multiparticle entanglement [J]. Phys Rev A, 1999, 59(1): 156-161.
- [7] 李艳玲, 冯健, 孟祥国 等. 量子比特的普适远程翻转和克隆 [J]. 物理学报, 2007, 56(10): 5591-5596.
- [8] Li Yanling, Feng Jian, Yu Yafei. Universal telecloning of

- quantum entangled states [J]. *Acta Phys Sin* 2007 56(12): 6797-6802.
- [9] Wen Haidan, Li Chuanfeng, Guo Guangcan. Telebroadcasting of a cat-like state via local operations [J]. *Chin Phys Lett*, 2001 18(9): 1159.
- [10] Chen Lin, Chen Yixin. Asymmetric quantum telecloning of multiqubit states [J]. *Quant Inf Comput* 2007 7: 716.
- [11] Zheng Shibiao. Simplified scheme for cloning and telecloning quantum states near a given state [J]. *Chin Phys Lett* 2003, 20(3): 325.
- [12] Tan Jia, Fang Maofa. Practical protocol for telecloning quantum states [J]. *Chin Phys Lett* 2006 23(2): 283-286.
- [13] Rådmark M, Żukowski M, Bourennane M. Experimental high fidelity six-photon entangled state for telecloning protocols [J]. *New J Phys* 2009 11(10): 103016.
- [14] Zhan Xiaogui, Zhang Dengyu, Gao Feng et al. Controlled telecloning and teleflipping for one-qubit pure states [J]. *Commun Theor Phys* 2009 51(6): 1023-1026.
- [15] Yan Lihua, Gao Yunfeng, Zhao Jiangang. A proposal of telecloning for a three-particle entangled W state [J]. *Int J Theor Phys* 2009 48: 2445-2453.
- [16] Nielsen M A, Chuang I L. Quantum computation and quantum information [M]. Beijing: Higher Education Press, 2003: 29-30, 177-185.
- [17] 戴宏毅. 约化密度矩阵及其在量子信息处理中的应用 [J]. *大学物理* 2010 29(2): 31.
- [18] Ghiu I. Asymmetric quantum telecloning of  $d$ -level systems and broadcasting of entanglement to different locations using the "many-to-many" communication protocol [J]. *Phys Rev A* 2003 67(1): 12323.
- [19] 杨幼凤, 叶志清. 基于 4 粒子团簇态实现量子态的双向通信 [J]. *江西师范大学学报: 自然科学版* 2013 37(5): 497-499.
- [20] 吴柳雯, 叶志清. 用 4 粒子纠缠态实现多粒子隐形传态 [J]. *江西师范大学学报: 自然科学版* 2013 37(6): 561-564.

## The Quantum Telecloning of a Three-Particle GHZ State

XU Wei<sup>1</sup>, WANG Zuo-dong<sup>1</sup>, NIE Yi-you<sup>1, 2\*</sup>

(1. College of Physics & Communication Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang, Jiangxi 330022, China;

2. Key Laboratory of Photo Electronic & Telecommunication of Jiangxi Province, Nanchang, Jiangxi 330022, China)

**Abstract:** A scheme for  $1 \rightarrow 2$  quantum telecloning of a three-particle GHZ state using two four-particle entangled state as the quantum channel. After the sender's two Bell measurements, Hadamard transformation, single particle measurement and classical communication, the two receiver perform proper unitary operation and introduce auxiliary particles, then let their particles through a Toffoli gate respectively, the receivers can get the approximate copy of the original unknown state. The fidelity of this scheme is related to the input state. In addition, we generalized the  $1 \rightarrow 2$  quantum telecloning scheme of three-particle GHZ state to the situation of  $N$ -particle GHZ state.

**Key words:** GHZ state; quantum telecloning; unitary operation; fidelity

(责任编辑: 冉小晓)