

文章编号: 1000-5862(2015)01-0055-04

3 维 Maxwell 方程局部 1 维多辛格式的能量恒等式

周文英¹ 孔令华^{1*} 王 兰¹ 符芳芳²

(1. 江西师范大学数学与信息科学学院, 江西 南昌 330022; 2. 南昌工学院基础部, 江西 南昌 330108)

摘要: 在理想导体边界条件下, 对 3 维 Maxwell 方程的局部 1 维多辛 Preissman 格式的能量守恒性质进行研究. 运用能量分析法推导了 2 个能量恒等式. 这些恒等式说明了给出的格式在所定义的离散范数下是能量守恒和无条件稳定的. 数值算例验证了结论的正确性.

关键词: 3 维 Maxwell 方程; LOD-MS; 能量恒等式; Preissman 格式

中图分类号: O 241.8 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2015.01.10

0 引言

Maxwell 方程是电磁学中最基本数学模型, 由于其精确解往往难以计算, 关于其数值解的研究是近年来的热点课题之一. 如 Yee 交错网格上的交替方向隐式法(ADI-FDTD)^[1-3]、能量守恒的分裂有限差分域法(EC-S-FDTD)^[4-7]、局部 1 维多辛格式(LOD-MS)^[8]、传统多辛算法^[9-11]. 在建立无耗散动力系统的数值格式时, 基本原则之一是尽可能保持其物理特性. 能量守恒与多辛结构守恒是 Maxwell 方程的一个重要特征. 多辛算法以其能够长时间保持原问题数值特征而颇受欢迎^[12-13], 但是多维数值计算却存在非常费时耗资源、计算效率不高等缺点^[13]. 为提高计算效率, 文献[8]研究了局部 1 维的多辛格式. 此种格式具有多辛格式的数值特征, 同时存在计算效率高、计算规模小等优点.

当电导率为 0 时, 在无源场的无损各向同性介质中, 3 维 Maxwell 方程为

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H}, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E}, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ 和 $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$ 分别表示电场和磁场, ε 和 μ 分别为介电常数和磁导率, $(x, y, z) \in \Omega, t \in (0, T], \Omega = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$. 在 $\partial\Omega \times (0, T]$ 上给出理想导体边界条件(PEC):

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ 或 } \mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

其中 \mathbf{n} 是空间区域 Ω 的外法向量, 则定解问题(1)

和(2)满足如下守恒律.

命题 1 若 $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ 、 $\mathbf{H}(x, y, z, t)$ 是 Maxwell 方程组(1)的解, 记 $u = x, y, z$, 则有

$$d(\|\mathbf{E}\|^2 + \|\mathbf{H}\|^2)/dt = 0, \quad (3)$$

$$d(\|\partial \mathbf{E} / \partial t\|^2 + \|\partial \mathbf{H} / \partial t\|^2)/dt = 0, \quad (4)$$

其中(3)式即是 Poynting 定理, 这说明 Maxwell 方程的解在 L^2 范数下是稳定的, (4)式说明 Maxwell 方程在 H^1 半范数下是能量守恒的. 由此可见, 在 H^1 范数下(1)式也是稳定的^[6].

本文主要用能量分析法, 对文献[8]构造的 Maxwell 方程的局部 1 维多辛 Preissman 格式进行分析, 得到它具有一些新的离散守恒律.

1 Maxwell 的多辛结构

辛算法是针对哈密顿系统提出的 1 类保结构算法, 在薛定谔方程的模拟中有着非常有效的应用^[12-15]. 分裂多辛算法具有效率较高、计算成本较低等特点^[8, 12, 14]. Maxwell 方程是 1 种典型的哈密顿系统, 其旋度形式(1)可以写成分量形式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} -E_x \\ -E_y \\ -E_z \\ H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\partial H_z / \partial y - \partial H_y / \partial z) / \varepsilon \\ (\partial H_x / \partial z - \partial H_z / \partial x) / \varepsilon \\ (\partial H_y / \partial x - \partial H_x / \partial y) / \varepsilon \\ (\partial E_z / \partial y - \partial E_y / \partial z) / \mu \\ (\partial E_x / \partial z - \partial E_z / \partial x) / \mu \\ (\partial E_y / \partial x - \partial E_x / \partial y) / \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

收稿日期: 2014-06-25

基金项目: 国家自然科学基金(11301234, 11271171), 江西省自然科学基金(20142BCB23009)和江西省教育厅基金(GJJ12174)资助项目.

通信作者: 孔令华(1977-), 男, 江西石城人, 教授, 博士, 主要从事偏微分方程数值解法的研究.

令 $G = (H_x H_y H_z E_x E_y E_z)^T$ 则(5)式可写成多辛 Hamiltonian 系统:

$$KG_t + L_1 G_x + L_2 G_y + L_3 G_z = 0, \quad (6)$$

其中 K, L_1, L_2, L_3 都是反对称矩阵. 对(6)式分裂得到 3 个局部 1 维的子系统:

$$\begin{cases} KG_t/3 + L_1 G_x = 0, \\ KG_t/3 + L_2 G_y = 0, \\ KG_t/3 + L_3 G_z = 0, \end{cases} \quad (7)$$

(7) 式写成电场、磁场分量的形式, 即

$$\begin{cases} -(\partial E_y / \partial t) / 2 - (\partial H_z / \partial x) / \varepsilon = 0, \\ -(\partial E_z / \partial t) / 2 + (\partial H_y / \partial x) / \varepsilon = 0, \\ (\partial H_y / \partial t) / 2 - (\partial E_z / \partial x) / \mu = 0, \\ (\partial H_z / \partial t) / 2 + (\partial E_y / \partial x) / \mu = 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} -(\partial E_x / \partial t) / 2 + (\partial H_z / \partial y) / \varepsilon = 0, \\ -(\partial E_z / \partial t) / 2 - (\partial H_x / \partial y) / \varepsilon = 0, \\ (\partial H_x / \partial t) / 2 + (\partial E_z / \partial y) / \mu = 0, \\ (\partial H_z / \partial t) / 2 - (\partial E_x / \partial y) / \mu = 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} -(\partial E_x / \partial t) / 2 - (\partial H_y / \partial z) / \varepsilon = 0, \\ -(\partial E_y / \partial t) / 2 + (\partial H_x / \partial z) / \varepsilon = 0, \\ (\partial H_x / \partial t) / 2 - (\partial E_y / \partial z) / \mu = 0, \\ (\partial H_y / \partial t) / 2 + (\partial E_x / \partial z) / \mu = 0, \end{cases} \quad (10)$$

容易验证分裂后的子系统(8)~(10)也保持局部 1 维的多辛结构.

对区域 $\Omega \times (0, T]$ 进行一致网格分割: $\Delta x = a/I, \Delta y = b/J, \Delta z = c/K, \sigma = T/N$ 则可记 $x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, z_k = k\Delta z, i = 0, 1, \dots, I, j = 0, 1, \dots, J, k = 0, 1, \dots, K$. 对每个子系统, 运用多辛 Preissman 格式进行离散得

$$\begin{cases} E_y^*_{i+1/2, j, k} + \frac{\tau}{2\varepsilon} \delta_x H_z^*_{i, j, k} = E_y^n_{i+1/2, j, k} - \frac{\tau}{2\varepsilon} \delta_x H_z^n_{i, j, k}, \\ H_z^*_{i+1/2, j, k} + \frac{\tau}{2\mu} \delta_x E_y^*_{i, j, k} = H_z^n_{i+1/2, j, k} - \frac{\tau}{2\mu} \delta_x E_y^n_{i, j, k}, \\ E_z^*_{i+1/2, j, k} - \frac{\tau}{2\varepsilon} \delta_x H_y^*_{i, j, k} = E_z^n_{i+1/2, j, k} + \frac{\tau}{2\varepsilon} \delta_x H_y^n_{i, j, k}, \\ H_y^*_{i+1/2, j, k} - \frac{\tau}{2\mu} \delta_x E_z^*_{i, j, k} = H_y^n_{i+1/2, j, k} + \frac{\tau}{2\mu} \delta_x E_z^n_{i, j, k}, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} E_x^*_{i, j+1/2, k} - \frac{\tau}{2\varepsilon} \delta_y H_z^{n+1}_{i, j, k} = E_x^n_{i, j+1/2, k} + \frac{\tau}{2\varepsilon} \delta_y H_z^*_{i, j, k}, \\ H_z^{n+1}_{i, j+1/2, k} - \frac{\tau}{2\mu} \delta_y E_x^*_{i, j, k} = H_z^*_{i, j+1/2, k} + \frac{\tau}{2\mu} \delta_y E_x^n_{i, j, k}, \\ E_z^{n+1}_{i, j+1/2, k} + \frac{\tau}{2\varepsilon} \delta_y H_x^*_{i, j, k} = E_z^*_{i, j+1/2, k} - \frac{\tau}{2\varepsilon} \delta_y H_x^n_{i, j, k}, \\ H_x^*_{i, j+1/2, k} + \frac{\tau}{2\mu} \delta_y E_z^{n+1}_{i, j, k} = H_x^n_{i, j+1/2, k} - \frac{\tau}{2\mu} \delta_y E_z^*_{i, j, k}, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} E_x^{n+1}_{i, j, k+1/2} + \frac{\tau}{2\varepsilon} \delta_z H_y^{n+1}_{i, j, k} = E_x^*_{i, j, k+1/2} - \frac{\tau}{2\varepsilon} \delta_z H_y^*_{i, j, k}, \\ H_y^{n+1}_{i, j, k+1/2} + \frac{\tau}{2\varepsilon} \delta_z E_x^{n+1}_{i, j, k} = H_y^*_{i, j, k+1/2} - \frac{\tau}{2\varepsilon} \delta_z E_x^*_{i, j, k}, \\ E_y^{n+1}_{i, j, k+1/2} - \frac{\tau}{2\varepsilon} \delta_z H_x^{n+1}_{i, j, k} = E_y^*_{i, j, k+1/2} + \frac{\tau}{2\varepsilon} \delta_z H_x^*_{i, j, k}, \\ H_x^{n+1}_{i, j, k+1/2} - \frac{\tau}{2\varepsilon} \delta_z E_y^{n+1}_{i, j, k} = H_x^*_{i, j, k+1/2} + \frac{\tau}{2\varepsilon} \delta_z E_y^*_{i, j, k}, \end{cases} \quad (13)$$

其中 $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ 分别表示空间方向的标准向前差分算子.

2 能量恒等式

接下来, 推导格式(11)~(13)的能量恒等式.

记 $u = x$ 或 $u = y$ 或 $u = z, V = E$ 或 $V = F$ 则可以

定义修正的离散能量范数 $\| \delta_x V_u^n \|^2 = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \alpha \cdot (\delta_x V_{u, i+1/2, j, k})^2 \Delta v$, 其中 $\Delta v = \Delta x \Delta y \Delta z$, 且 $\alpha = \varepsilon$ 或 $\alpha = \mu$. $\| \delta_x V^n \|^2 = \| \delta_x V_x^n \|^2 + \| \delta_x V_y^n \|^2 + \| \delta_x V_z^n \|^2$, $\| V^n \|^2_1 = \| \delta_x V^n \|^2 + \| \delta_y V^n \|^2 + \| \delta_z V^n \|^2$, $\| \delta_1 \delta_x V^n \|^2 = \| \delta_z \delta_x V_x^n \|^2 + \| \delta_z \delta_x V_y^n \|^2 + \| \delta_y \delta_x V_z^n \|^2$, $\| \delta_2 \delta_x V^n \|^2 = \| \delta_y \delta_x V_x^n \|^2 + \| \delta_x \delta_x V_y^n \|^2 + \| \delta_x \delta_x V_z^n \|^2$.

定理 1 令 $E^n = (E_{xi, j, k}^n, E_{yi, j, k}^n, E_{zi, j, k}^n)^T, H^n = (H_{xi, j, k}^n, H_{yi, j, k}^n, H_{zi, j, k}^n)^T$ 是格式(11)~(13)的解, 则有能量恒等式

$$\| \delta_u E^{n+1} \|^2 + \| \delta_u H^{n+1} \|^2 + R_u^{n+1} =$$

$$\| \delta_u E^n \|^2 + \| \delta_u H^n \|^2 + \tilde{R}_u^n, \quad (14)$$

其中 2 阶能量扰动项为

$$R_u^{n+1} = \tau^2 (\| \delta_1 \delta_u H^{n+1} \|^2 + \| \delta_2 \delta_u H^{n+1/2} \|^2) / (4\varepsilon^2) + \tau^2 (\| \delta_1 \delta_u E^{n+1} \|^2 + \| \delta_2 \delta_u E^{n+1/2} \|^2) / (4\mu^2),$$

$$\tilde{R}_u^n = \tau^2 (\| \delta_2 \delta_u H^n \|^2 + \| \delta_1 \delta_u H^{n+1/2} \|^2) / (4\varepsilon^2) + \tau^2 (\| \delta_2 \delta_u E^n \|^2 + \| \delta_1 \delta_u E^{n+1/2} \|^2) / (4\mu^2). \quad (15)$$

证 对(11)式两端同时作用差分算子 δ_x 后分别平方, 将得到的 4 个式子分别乘以 $\varepsilon, \mu, \varepsilon, \mu$, 再关于指标 i, j, k 求和得

$$\begin{aligned} & \| \delta_x E_y^* \|^2 + \tau^2 \| \delta_x \delta_x H_z^* \|^2 / (4\varepsilon^2) + \\ & \tau \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \delta_x E_y^* \delta_x \delta_x H_z^* \Delta v = \| \delta_x E_y^n \|^2 + \\ & \tau^2 \| \delta_x \delta_x H_z^n \|^2 / (4\varepsilon^2) - \tau \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \delta_x E_y^n \delta_x \delta_x H_z^n \Delta v, \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \| \delta_x H_z^* \|^2 + \tau^2 \| \delta_x \delta_x E_y^* \|^2 / (4\mu^2) + \\ & \tau \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \delta_x H_z^* \delta_x \delta_x E_y^* \Delta v = \| \delta_x H_z^n \|^2 + \tau^2 \cdot \\ & \| \delta_x \delta_x E_y^n \|^2 / (4\mu^2) + \tau \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \delta_x H_z^n \delta_x \delta_x E_y^n \Delta v, \quad (17) \end{aligned}$$

$$\| \delta_x E_z^* \|^2 + \tau^2 \| \delta_x \delta_x H_y^* \|^2 / (4\varepsilon^2) -$$

$$\begin{aligned} & \tau \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \delta_x E_z^* \delta_x \delta_x H_y^* \Delta v = \|\delta_x E_z^n\|^2 + \tau^2 \cdot \\ & \|\delta_x \delta_x H_y^n\|^2 / (4\varepsilon^2) + \tau \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \delta_x E_z^n \delta_x \delta_x H_y^n \Delta v, \quad (18) \\ & \|\delta_x H_y^*\|^2 + \tau^2 \|\delta_x \delta_x E_z^*\|^2 / (4\mu^2) - \\ & \tau \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \delta_x H_y^* \delta_x \delta_x E_z^* \Delta v = \|\delta_x H_y^n\|^2 + \tau^2 \cdot \\ & \|\delta_x \delta_x E_z^n\|^2 / (4\mu^2) + \tau \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \delta_x H_y^n \delta_x \delta_x E_z^n \Delta v, \quad (19) \end{aligned}$$

将 (16) ~ (19) 式相加, 用分部求和公式 (见文献 [6] 中的引理 3.1) 把乘积项消去得

$$\begin{aligned} & \|\delta_x E_y^*\|^2 + \|\delta_x E_z^*\|^2 + \|\delta_x H_y^*\|^2 + \|\delta_x H_z^*\|^2 + \\ & \tau^2 (\|\delta_x \delta_x H_z^*\|^2 + \|\delta_x \delta_x H_y^*\|^2) / (4\varepsilon^2) + \\ & \tau^2 (\|\delta_x \delta_x E_y^*\|^2 + \|\delta_x \delta_x E_z^*\|^2) / (4\mu^2) = \\ & \|\delta_x E_y^n\|^2 + \|\delta_x E_z^n\|^2 + \|\delta_x H_y^n\|^2 + \|\delta_x H_z^n\|^2 + \\ & \tau^2 (\|\delta_x \delta_x H_z^n\|^2 + \|\delta_x \delta_x H_y^n\|^2) / (4\varepsilon^2) + \\ & \tau^2 (\|\delta_x \delta_x E_y^n\|^2 + \|\delta_x \delta_x E_z^n\|^2) / (4\mu^2). \quad (20) \end{aligned}$$

同理, 由 (12) ~ (13) 式得 2 个类似 (20) 式的等式, 将这 3 个式子相加得

$$\begin{aligned} & \|\delta_x E^{n+1}\|^2 + \|\delta_x H^{n+1}\|^2 + \tau^2 (\|\delta_1 \delta_x H^{n+1}\|^2 + \\ & \|\delta_2 \delta_x H^{n+1/2}\|^2) / (4\varepsilon^2) + \tau^2 (\|\delta_1 \delta_x E^{n+1}\|^2 + \\ & \|\delta_2 \delta_x E^{n+1/2}\|^2) / (4\mu^2) = \|\delta_x E^n\|^2 + \|\delta_x H^n\|^2 + \\ & \tau^2 (\|\delta_2 \delta_x H^n\|^2 + \|\delta_1 \delta_x H^{n+1/2}\|^2) / (4\varepsilon^2) + \\ & \tau^2 (\|\delta_2 \delta_x E^n\|^2 + \|\delta_1 \delta_x E^{n+1/2}\|^2) / (4\mu^2). \end{aligned}$$

由扰动项 (15) 式知, 当 $u = x$ 时上式就是 (14) 式. 同理易证 $u = y$ 或 $u = z$ 情形, 事实上, 只需将作用的算子改为 δ_y 或 δ_z , 再重复以上步骤即可, 定理 1 得证. 定理 1 说明给出的 Maxwell 方程的 Preissman 格式在离散 H^1 半范数下是能量守恒的.

定理 2 若 $E^n = (E_{xi}^n, E_{yi}^n, E_{zi}^n)_{i,j,k}$, $H^n = (H_{xi}^n, H_{yi}^n, H_{zi}^n)_{i,j,k}$ ($n > 0$) 是格式 (11) ~ (13) 的解, 则有能量恒等式

$$\begin{aligned} & \|E^{n+1}\|_1^2 + \|H^{n+1}\|_1^2 + \sum_u R_u^{n+1} = \\ & \|E^n\|_1^2 + \|H^n\|_1^2 + \sum_u \hat{R}_u^n. \quad (21) \end{aligned}$$

将 (8) 式中 u 取不同值的 3 个式子与作用算子 $\delta_u = I$ 得到的恒等式相加即得到能量恒等式 (21), 该式说明在离散 H^1 范数下格式也是能量守恒的.

3 数值实验

本部分将通过数值算例检验上述守恒量 (只考察守恒量的保持情况), 即验证能量恒等式 (14) 和 (21). 由于篇幅所限, 数值解的误差在此将不作讨论, 具体可以参见文献 [8].

考虑当 $\varepsilon = \mu = 1$, $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

时的 3 维 Maxwell 方程 (1), 取初始条件为

$$E_{x_0} = \cos(2\pi(x + y + z)), \quad E_{y_0} = -2E_{x_0},$$

$$E_{z_0} = E_{x_0}, \quad H_{x_0} = -H_{z_0} = \sqrt{3}E_{x_0}, \quad H_{y_0} = 0,$$

取 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.02$, $\tau = 0.01$, 令

$$Q_u^{n+1} = \|\delta_u E^{n+1}\|^2 + \|\delta_u H^{n+1}\|^2 + R_u^{n+1}, \quad Q_u^n =$$

$$\|\delta_u E^n\|^2 + \|\delta_u H^n\|^2 + \hat{R}_u^n, \quad Q^{n+1} = \|E^{n+1}\|_1^2 +$$

$$\|H^{n+1}\|_1^2 + \sum_u R_u^{n+1}, \quad Q^n = \|E^n\|_1^2 + \|H^n\|_1^2 + \sum_u \hat{R}_u^n,$$

得到能量残差图 (见图 1 ~ 图 4).

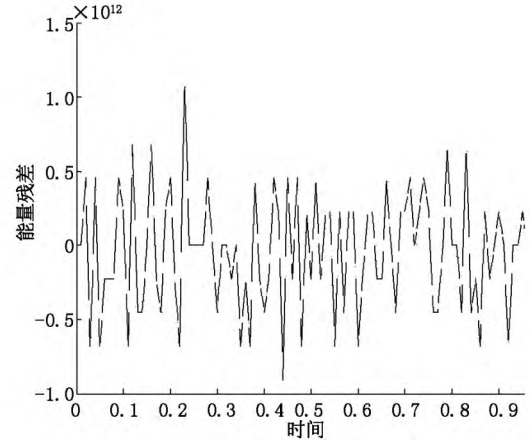


图 1 $u = x$ 的能量残差图

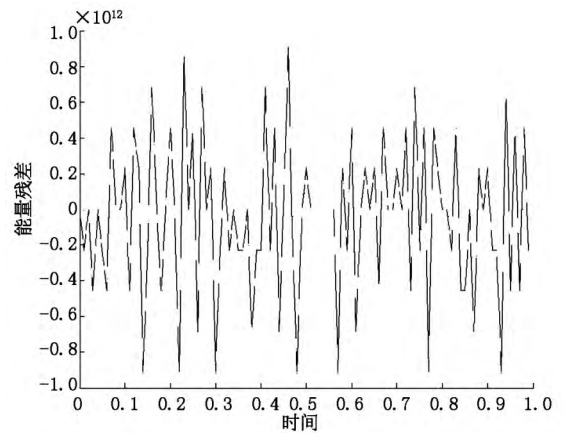


图 2 $u = y$ 的能量残差图

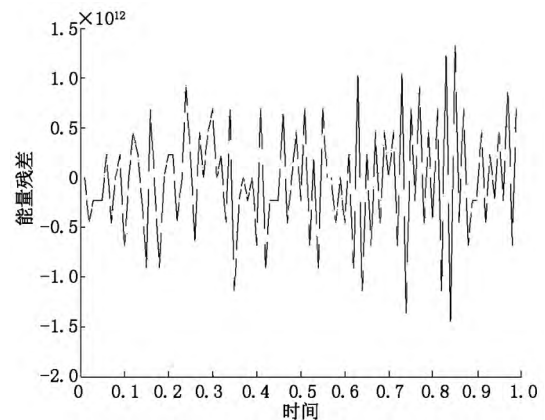


图 3 $u = z$ 的能量残差图

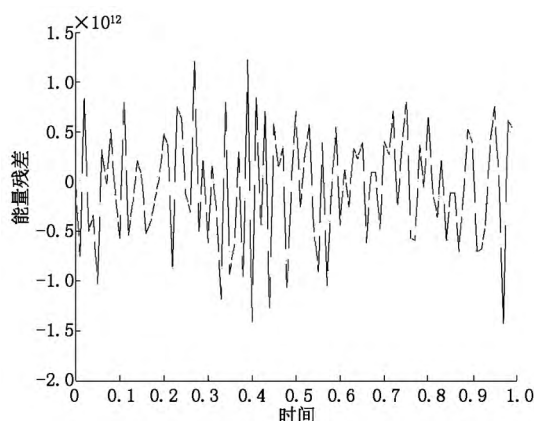


图4 能量 Q 的残差图

由图1~图4可以看到3维Maxwell方程(1)的Preissman格式(11)~(13)满足离散的能量恒等式(14)和(21),这一结果与理论分析结论是一致的。

4 参考文献

- [1] Yee K S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media [J]. IEEE Trans Antennas Propagat, 1966, 14(3): 302-307.
- [2] Namiki T. Investigation of numerical errors of the two-dimensions ADI-FDTD method [J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech 2000 48(10): 1950-1956.
- [3] Zheng Fenghua, Chen Zhizhang, Zhang Jiazong. Toward the development of a three-dimensional unconditionally stable finite difference time-domain method [J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech 2000 48(9): 1550-1558.
- [4] Chen Wenbin, Li Xingjie, Liang Dong. Energy-conserved splitting FDTD schemes for Maxwell's equations [J]. Numer Math 2008 108(3): 445-485.
- [5] Chen Wenbin, Li Xiang, Liang Dong. Symmetric energy-conserved splitting FDTD scheme for the Maxwell's equations [J]. Commun Comput Phys 2009 6(4): 804-825.
- [6] Chen Wenbin, Li Xingjie, Liang Dong. Energy-conserved splitting finite difference time-domain methods for Maxwell's equation in three dimensions [J]. SIAM J Numer Anal 2010 48(4): 1530-1554.
- [7] Gao Liping, Zhang Bo, Liang Dong. The splitting-difference time-domain methods for Maxwell's equations in two dimensions [J]. J Comput Appl Math 2007 205(1): 207-230.
- [8] Kong Linghua, Hong Jialin, Zhang Jingjing. Splitting multi-symplectic integrators for Maxwell's equation [J]. J Comput Phys 2010 229(11): 4259-4278.
- [9] Wang Yushun, Hong Jialin. Multi-symplectic algorithms for Hamiltonian partial differential equation [J]. Commun Appl Math Comput 2013 27(2): 163-230.
- [10] Cai Wenjun, Wang Yushun, Song Yongzhong. Numerical dispersion analysis of a multi-symplectic scheme for the three dimensional Maxwell's equation [J]. J Comput Phys 2013 234: 330-352.
- [11] Cai Jiaxiang, Wang Yushun, Qiao Zhonghua. Multisymplectic Preissman scheme for the time-domain Maxwell's equation [J]. J Math Phys 2009 50(3): 1-17.
- [12] 黄红, 王兰. 薛定谔方程的局部一维多辛格式 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版 2011 35(5): 455-458.
- [13] 王兰, 陈静. 二维 Schrödinger 方程的多辛格式 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版 2010 34(6): 599-603.
- [14] 童慧, 孔令华, 王兰. Dirac 方程的紧致分裂多辛格式 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版 2014 38(5): 521-525.
- [15] Gao Liping, Zhang Bo. Optimal error estimates and modified energy conservation identities of the ADI-FDTD scheme on staggered grids for 3D Maxwell's equations [J]. Sci China Math 2013 56(8): 1705-1726.

The Energy Identities of the Local One-Dimensional Multisymplectic Scheme for 3-D Maxwell's Equation

ZHOU Wenying¹, KONG Linghua^{1*}, WANG Lan¹, FU Fangfang²

(1. College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China;

2. Department of Basic Teaching, Nanchang Institute of Science and Technology, Nanchang Jiangxi 330108, China)

Abstract: The energy conservation properties of the local one-dimensional multisymplectic (LOD-MS) Preissman scheme is mainly concerned, which is a scheme for solving the 3-dimensional Maxwell's equation under the perfectly electric conducting (PEC) boundary condition. Energy analysis method is applied to obtain two energy conservation identities which suggest that the LOD-MS Preissman scheme is unconditionally stable under the new discrete modified energy norms. Experimental results show the correctness of this conclusion.

Key words: three-dimensional Maxwell's equation; LOD-MS; energy conservation identity; Preissman scheme

(责任编辑: 曾剑锋)