第 39 卷 第 1 期
2015 年 1 月

江西师范大学学报(自然科学版)
Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)

Vol. 39 No. 1
Jan. 2015

文章编号:1000-5862(2015)01-0064-05

0-1 和多值可达矩阵的性质及应用

丁树良,罗　芬,汪文义,熊建华

(江西师范大学计算机信息工程学院,江西 南昌　330022)

摘要:讨论 0-1 可达阵的基本性质及其在认知诊断中的重要作用,证明可达阵导出的学生 Q 阵在先决关系下构成 1 个格,给出了多值可达阵的计算方法和基于多值可达阵的扩张算法,还给出已知属性最高水平下多值可达阵和 0-1 可达阵相互转换的膨胀和压缩算法,发现多值可达阵实质上是 0-1 可达阵的压缩形式,并讨论多值可达阵的性质及其在认知诊断中的应用.

关键词:可达矩阵;格;多值可达阵;多值 Q 阵

中图分类号:B 841.7;TP 301.6　**文献标志码**:A　**DOI**:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2015.01.12

0　引言

n 阶简单图结点之间的邻接关系可用邻接阵表示,无向图连通性可用连通矩阵表示,而有向图的可达性用可达矩阵表示. 邻接阵和可达阵都是 0-1 矩阵,或者称为布尔阵. 邻接矩阵表示结点之间的直接关系,即盖住关系[1],而可达矩阵表示结点之间直接或间接关系. 这里说结点 A 和 B 之间的间接关系是指 A 通过结点 C 可达 B,且 C 和 A 与 B 均不相同. 可达关系满足传递性,所以 1 个可达矩阵实际上又是结点的传递闭包对应的关系阵. 若 n 阶可达阵的对角元均为 1,则表明它对应的关系一定是自反关系. 用布尔并与交运算取代通常数的加与乘运算(简称为布尔矩阵的复合运算),则可达阵与自身的复合一定仍等于可达阵.

事实上,r 为传递关系,当且仅当 r 与 r 的复合包含在 r 中,即 $r\circ r\subseteq r$,而 $\forall x,y\in r$ 且若 r 自反,知 $\langle x,x\rangle\in r$,所以 $\langle x,y\rangle\in r\circ r$,故 r 对应的关系矩阵满足 $\boldsymbol{M}_r\circ\boldsymbol{M}_r=\boldsymbol{M}_r$;反之,若 $r=r\circ r$,则 r 传递,但 r 不一定自反. 以下如果不至于产生混乱时,关系和关系矩阵可能交互使用而不加区分.

本文前半部分讨论 0-1 可达矩阵的性质及其在认知诊断中的作用,后半部分介绍 Sun Jia′nan 等[2] 引进的多值可达阵,给出基于多值可达阵的扩张算法以及 0-1 可达阵和多值可达阵相互转换膨胀和压缩的方法,证明多值可达阵实质上是 0-1 可达阵的压缩,并且在某种评分规则下,证明 Sun Jia′nan 等[2] 给出的多值可达阵可以使期望反应模式与知识状态一一对应. 由于多值评分比 0-1 评分带来更加丰富的诊断信息,而使用多值 Q 矩阵表达多值认知诊断测验的测验蓝图设计有其方便之处,因此研究多值可达阵和多值 Q 矩阵很有意义.

在认知诊断中,结点称为属性,邻接阵表达属性之间直接先决关系(immediately prerequisite),而可达阵 $\boldsymbol{R}$ 表示属性之间直接或间接先决关系. 属性的先决关系是自反、反对称、传递的,即偏序关系.

在可达阵的基础上通过扩张算法[3-5],可以得到潜在 Q 阵 Q_p,Q_p 增加 1 个零列,从而得到学生 Q 阵 Q_s[6],有的文章将它们均称为 Q 矩阵. 其实可达阵是特殊的重要的 Q 矩阵.

本文 Q 矩阵的行表示属性,列表示项目(或者被试的知识状态,简称被试). 当测验 Q 阵 Q_t 以可达阵 $\boldsymbol{R}$ 为其子矩阵时,称 Q_t 为充要 Q 阵,若测验 Q 阵是充要 Q 阵且包含的列数最少,则称之为完备 Q 阵(perfect $\boldsymbol{Q}$ matrix)[7-8].

在认知诊断中,由先决关系导出的可达矩阵 $\boldsymbol{R}$ 有重要作用. 下面给出几个可达阵 $\boldsymbol{R}$ 用于认知诊断的一些结果.

引理 1[9]　在 0-1 评分条件下,属性之间无补偿作用且只有掌握了项目中所有属性才能正确反应(连接性),则期望反应模式和知识状态一一对应的

收稿日期:2014-12-28

基金项目:国家自然科学基金(30860084,31160203,31100756,31360237)和江西省教育厅科技计划(GJJ13207,GJJ13206,GJJ13227,GJJ133208,GJJ13209)资助项目.

作者简介:丁树良(1949-),男,江西樟树人,教授,主要从事计算机辅助教学及教育和心理测量方面的研究.

充要条件是可达矩阵作为测验 Q 阵的子矩阵.

引理 2[10] 当 Q_t 为充要 Q 阵时，使用 K. K. Tatsuoka[11-12] 引入的对 Q_t 的行逐对比较，能够获得真实的属性层级结构.

引理 3[10,13] 对偏序关系对应的可达阵 R，可以用清洗算法或对 R 的行逐对比较的方法获得偏序关系的 Hasse 图.

1　学生 Q 阵上引布尔并交形成格

以下用认知诊断中的术语进行叙述，设属性集合为$\{A_1,A_2,\cdots,A_K\}$，$\boldsymbol{R}=(r_{ij})=(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_K)$ 为 K 阶可达阵. $\boldsymbol{R}$ 的第 i 行中非零元素表示以属性 A_i 为起点，A_i 可以达到的属性集合，即 A_i 是这个集合中所有属性的先决属性，也就是 A_i 是路的起点，$i=1,2,\cdots,K$；$\boldsymbol{R}$ 的第 j 列中的所有非零元表示 A_j 为终点的路，即可到达属性 A_j 的先决属性，$j=1,2,\cdots,K$.

注意，偏序关系的自反和反对称性，不失一般性，总可以假设可达阵 $\boldsymbol{R}$ 是对角元为 1 的上三角阵. 设 $\boldsymbol{R}$ 的第 j 列 $\boldsymbol{r}_j=(r_{1j},r_{2j},\cdots,r_{Kj})^{\mathrm{T}}$，$j=1,2,\cdots,K$，设 $r_{i_1j}=r_{i_2j}=\cdots=r_{i_tj}=1$，而其他 $r_{ij}=0$，并且设 $1\leqslant i_1<i_2\cdots<i_t\leqslant K$. 由 $\boldsymbol{R}$ 是对角元全为 1 的上三角阵的假设可知，$r_{i_tj}=r_{jj}=1$，即 $i_t=j$，于是$\{A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_j\}$ 是 1 条长度为 $t-1$ 的路，而$\{A_{i_1}\}$，$\{A_{i_1},A_{i_2}\}$，$\{A_{i_1},A_{i_2},A_{i_3}\}$，$\cdots$ 分别为从 A_{i_1} 出发的(以 A_{i_1} 为始点)长度为 $0,1,2,\cdots,t-1$ 的路. 有序符号串 $B_1,B_2,\cdots,A_h$ 的子串 $B_1,B_1B_2,\cdots,B_1B_2\cdots B_n$ 分别称为 $B_1,B_2,\cdots,B_h$ 的长度为 $1,2,\cdots,h$ 的前缀. 而每个前缀对应的序列仍然是路，故每个前缀仍然对应 $\boldsymbol{R}$ 中的列. 显然，如果 A_i 是 A_j 的先决，那么 A_i 的所有先决都是 A_j 的先决，否则和先决关系的传递性矛盾. 因此，A_i 的所有前缀都是 A_j 的前缀.

注意到 $\boldsymbol{R}$ 表达了属性集$\{A_1,A_2,\cdots,A_K\}$ 中所有直接或间接的关系，即属性之间直接先决关系(长度为 1 的路)或间接先决关系(长度至少为 2 的路).

记 $A_{i_t}=A_j$，当$\{A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_j\}$ 是 1 条长度为 $t-1$ 的路且 $t\geqslant 2$ 时，$\{A_{i_1},A_{i_2}\}$，$\{A_{i_1},A_{i_2},A_{i_3}\}$，$\cdots$ 都是这个属性集的直接或间接关系. 用 $\boldsymbol{e}_l$ 表示 K 阶单位阵第 l 列，由上面关于 $\boldsymbol{r}_j$ 中非零元对应的属性集以及属性下标之间的顺序的叙述可知，$\boldsymbol{e}_{i_1}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的列，$\boldsymbol{e}_{i_1}+\boldsymbol{e}_{i_2}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的列，$\cdots$，$\sum_{h=1}^{t}\boldsymbol{e}_{i_h}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的列，且称 $\sum_{h=1}^{l}\boldsymbol{e}_{i_h}$($l=1,2,\cdots,t-1,t$)是 $\boldsymbol{r}_j$ 的顺序子向量，它们均是 $\boldsymbol{R}$ 的列. 也可以说它们分别是以 A_{i_1} 为起点，A_{i_l} 为终点的路，而 $\sum_{h=1}^{l}\boldsymbol{e}_{i_h}$ 中非零元对应属性是 A_j 的长度为 l 的前缀，$l=1,2,\cdots,t$.

设 $\boldsymbol{r}_i$，$\boldsymbol{r}_j$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的列，$\boldsymbol{r}_i\wedge\boldsymbol{r}_j$ 是 $\boldsymbol{r}_i$ 与 $\boldsymbol{r}_j$ 对应分量取最小值得到的向量，称之为 $\boldsymbol{r}_i$ 与 $\boldsymbol{r}_j$ 的布尔交.

引理 4 $\boldsymbol{r}_i\wedge\boldsymbol{r}_j=0$，或者 $\boldsymbol{r}_i\wedge\boldsymbol{r}_j$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的列.

证 若 $\boldsymbol{r}_i\wedge\boldsymbol{r}_j\neq 0$，则 $\boldsymbol{r}_i\wedge\boldsymbol{r}_j$ 表示既可以达到属性 A_i 又可以到达属性 A_j 的路的公共部分，即 $\boldsymbol{r}_i\wedge\boldsymbol{r}_j$ 既是 $\boldsymbol{r}_i$ 的顺序子向量，又是 $\boldsymbol{r}_j$ 的顺序子向量，从而它是 $\boldsymbol{r}_i$ 与 $\boldsymbol{r}_j$ 的公共的顺序子向量，也就是这 2 者的公共前缀，故 $\boldsymbol{r}_i\wedge\boldsymbol{r}_j$ 仍是 $\boldsymbol{R}$ 的列.

$\boldsymbol{r}_i\vee\boldsymbol{r}_j$ 称为 $\boldsymbol{r}_i$ 与 $\boldsymbol{r}_j$ 的布尔并，它是 $\boldsymbol{r}_i$ 与 $\boldsymbol{r}_j$ 对应分量取最大值得到的向量. 这实际上是扩张算法[3-5] 中规定的布尔并运算规则($0\vee 0=0$，$0\vee 1=1\vee 0=1\vee 1=1$)的等价表达，事实上，这个布尔运算规则可以表示为 $\max(x,y)$，但是这样表达以后，它对下文中由 Sun Jia´nan 等[2] 提出的多值可达阵导出多值的潜在 Q 矩阵很有用.

扩张算法实际上表示可达阵中列的布尔并是潜在 Q 阵(Q_p)的列[14]，而 Q_p 再添加零列以后，得到学生 Q 阵 $\boldsymbol{Q}_s$.

定理 1 Q_s 的列在布尔交和布尔并 2 种运算下是封闭的，即形成格.

证 Q_s 中的任 2 列 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$(即 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{Q}_s$，$\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{Q}_s$)，若 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$，此时 $\boldsymbol{\alpha}\vee\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}\in\boldsymbol{Q}_s$，对于布尔交运算，$\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}\in\boldsymbol{Q}_s$. 若 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$，则由扩张算法知 $\boldsymbol{\alpha}=\bigvee_{t=1}^{h}\boldsymbol{r}_{i_t}$ 或 $\boldsymbol{\beta}=\bigvee_{l=1}^{w}\boldsymbol{r}_{i_l}$，$\boldsymbol{r}_{i_t}$，$\boldsymbol{r}_{i_l}\in\boldsymbol{R}$，于是 $\boldsymbol{\alpha}\vee\boldsymbol{\beta}=\bigvee_{t=1}^{h}\bigvee_{l=1}^{w}(\boldsymbol{r}_{i_t}\vee\boldsymbol{r}_{i_l})\in\boldsymbol{Q}_s$，对于布尔交运算，或者 $\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}\in\boldsymbol{Q}_s$，或者 $\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}=(\bigvee_{t=1}^{h}\boldsymbol{r}_{i_t})\wedge(\bigvee_{l=1}^{w}\boldsymbol{r}_{i_l})=\bigvee_{t=1}^{h}\bigvee_{l=1}^{w}(\boldsymbol{r}_{i_t}\wedge\boldsymbol{r}_{i_l})$，由引理 4 知 $\boldsymbol{r}_{i_t}\wedge\boldsymbol{r}_{i_l}=\boldsymbol{0}$，或 $\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{r}_{i_t}\wedge\boldsymbol{r}_{i_l}\in\boldsymbol{R}$，故由扩张算法知，当 $\boldsymbol{r}_{i_t}\wedge\boldsymbol{r}_{i_l}\neq\boldsymbol{0}$ 时，

$$\bigvee_{t=1}^{h}\bigvee_{l=1}^{w}(\boldsymbol{r}_{i_t}\wedge\boldsymbol{r}_{i_l})\in\boldsymbol{Q}_s.$$

因此，Q_s 的列在布尔交和布尔并 2 种运算下是封闭的，而布尔交和并这 2 个 2 元运算满足交换性，结合性和吸收性，即形成格[1].

注意 Q_s 的列数不一定可以写成 2 的幂，故 Q_s 的列在布尔交、布尔并运算下并不一定构成布尔格[4]，而只是格[1]，因此这个结论与 K. K. Tatsuoka[11-12] 的结论不同，K. K. Tatsuoka 认为 Q_s 的列在并、交运算下构成布尔格，这个结论只是对任何 2 个属性之间不存在先决关系的属性集合，即独立型层级结构才成立，否则不一定成立[3-4].

汪文义等[15]提出的项目属性在线辅助标定的创新做法 — 交差方法. 定理 1 给出了交差方法的理论基础. 因为格是一个特殊的偏序集,格中任 2 个元素均有上确界和下确界. 于是在理想作答情况下,原始题(未标属性的项目)中的属性集合 x 一定是答对该原始题的被试的知识状态对应的属性集的子集. 如果将答对该原始题的所有被试的知识状态中的属性作成的集合的交记为集合 y,由定理 1 知,$y \in Q_s - \{0\} = Q_p$ 必定有 $x \subseteq y$. 而所有未能答对原始题的被试其知识状态 z 和 x 的交集合一定是 x 的真子集. 将包含在 y 内的那些所有不等于空集的 z 和 x 的交集的集合 z 做并运算,得到集合 w,则 w 是 x 的子集合,即 $w \subseteq x, x \subseteq y$. 这时候,原始题的属性集合 x 的范围缩小了很多.

但是要注意,上面是从理想作答入手进行分析导出的结果,但是观察反应都可能带有随机性,所以制定项目属性计算机辅助标定时,必须考虑随机性[15].

2 多值可达阵及其性质

将元素仅取 0-1 的可达阵 $\boldsymbol{R}$ 称为 2 值可达阵,并记为 $\boldsymbol{R}_2$,相仿可以定义 2 值 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵,并记为 $\boldsymbol{Q}_2$. Sun Jia´nan 等[2]在创建多值认知诊断模型时引入多值可达阵(ploytomous $\boldsymbol{R}$ matrix)和多值 $\boldsymbol{Q}$ 阵. 将多值可达阵和多值 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵分别记为 $\boldsymbol{R}_p$ 和 $\boldsymbol{Q}_m$,$\boldsymbol{R}_p$ 或 $\boldsymbol{Q}_m$ 的元素是非负整数,当 2 值或多值可依上文确定而不致混淆时,$\boldsymbol{R}_2$,$\boldsymbol{Q}_2$ 和 $\boldsymbol{R}_p$ 中的 2,p 就可以省略.

2.1 $\boldsymbol{R}_p$ 的计算

依照 Sun Jia´nan 等[2]给出的方法,设有 K 个属性 $A_1, A_2, \cdots, A_k$,属性 A_i 的最高水平为 w_i,$w_i (\geqslant 1)$ 为整数,$i = 1,2,\cdots,K$. 先依照属性及其层级关系给出 $K \times K$ 的 2 值可达阵 $\boldsymbol{R}_2$,然后对 $\boldsymbol{R}_2$ 的 (i,i) 元,扩充为 1 个 w_i 维行向量 $(1,2,\cdots,w_i)$,$i = 1,2,\cdots,K$,于是将 $K \times K$ 的 $\boldsymbol{R}_2$ 矩阵"膨胀"为 1 个 $K \times (\sum_{i=1}^{K} w_i)$ 的多值阵,Sun Jia´nan 等称之为多值可达阵,并记之为 $\boldsymbol{R}_p$.

2.2 基于 $\boldsymbol{R}_p$ 扩张出多值潜在 $\boldsymbol{Q}$ 阵

由多值可达阵,通过的扩张算法,可以获得多值潜在 $\boldsymbol{Q}$ 阵,若对多值潜在 $\boldsymbol{Q}$ 增加 1 个全零列,则得到多值学生 $\boldsymbol{Q}$ 阵. 多值学生 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵是 $K \times (\sum_{i=1}^{K}(w_i + 1))$ 阵.

例 1 设有 3 个独立属性 A_1, A_2, A_3,且 A_i 最高水平为 i,$i = 1,2,3$,则

$$\boldsymbol{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{R}_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

对 $\boldsymbol{R}_p$ 用扩张算法如下:

$$\begin{array}{ccccccc} & j=1 & j=2 & j=3 & j=4 & j=5 & j=6 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccccc|ccccc|cccccc|cccccc|c|c|c} 1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&1& & & \\ 0&1&2&0&0&0&1&2&0&0&0&1&1&1&1&1&1&2&2&2&2&2&2& & & \\ 0&0&0&1&2&3&0&0&1&2&3&1&2&3&1&2&3&1&2&3&1&2&3& & & \end{array}\right),$$

故多值潜在 $\boldsymbol{Q}$ 阵为 3×23 的矩阵,而多值潜在学生阵为 3×24 的矩阵(仅比多值潜在 $\boldsymbol{Q}$ 阵多 1 个零列). 在所给条件下,多值潜在学生阵的所有列表示了所有被试的知识状态(或者称为属性掌握模式).

2.3 在一定条件下,R_p 可以保证知识状态与期望反应模式集合一一对应

Sun Jia´nan 等[2]指出 $\boldsymbol{R}_p$ 可以保证知识状态集合与期望反应模式集合之间一一对应,但未给出证明. 本文在特殊的期望得分条件下给出其证明.

2.3.1 **一个启发式例子** 因为记号上比较复杂,先看一个例子,建立起直观印象.

例 2 3 个属性 A_1, A_2, A_3,其层级关系如图 1 所示,且属性 A_1 最高水平为 2,属性 A_2 最高水平为 1,属性 A_3 最高水平为 3.

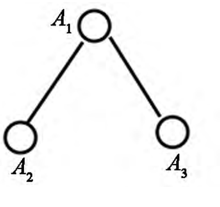

图 1 3 个属性的层级

图 1 对应的 2 值可达阵 $\boldsymbol{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,多值可达阵 $\boldsymbol{R}_p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

对于 $\boldsymbol{R}_p$,将其改写成 0-1 阵(下文称之为多值变为 0-1 的膨胀算法)

$$M=\left(\begin{array}{cc:c:c:ccc}1&1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0&0\\\hdashline 0&0&1&0&0&0\\\hdashline 0&0&0&1&1&1\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&1\end{array}\right),$$

因为属性 1，2，3 的最高水平分别为 2，1，3，所以 M 为 $(2+1+3)$ 阶方阵. R_p 的第 1 行的第 1，2 列的 2 个元素对应第 1 属性，将 R_p 第 1 行 (1 2 1 1 1 1) 扩充为 2 行，R_p 的第 1 行中的元素 2 改为 $(1\ 1)^T$，而相应的 1 改为 $(1\ 0)^T$；属性 2 最高水平为 1，将 R_p 第 2 行的行保留；属性 3 最高水平为 3，将 R_p 第 3 行 (0 0 0 1 2 3) 扩充为 3 行，且 R_p 第 3 行中元素 1，2，3 分别化为 3 维列向量 $(1\ 0\ 0)^T$，$(1\ 1\ 0)^T$，$(1\ 1\ 1)^T$，其他 3 个 0，化为 $(0\ 0\ 0)^T$. 这些列向量形成 0-1 上三角矩阵，称之为 J 矩阵. 这种对角子块 J 位于 M 的对角子块位置，J 的阶数即相应属性的最高水平数.

例 3　对于例 2 的 M 中第 1，2 行相加作为新矩阵第 1 行，第 4，5，6 行相加作为新矩阵第 3 行. 这样得到的新矩阵便是多值可达阵. 称这种方法为压缩算法.

2.3.2　多值可达阵和 0-1 可达阵的对应　一般来说，膨胀算法可以表述为：假设 R_p 的第 j 行等于 $(r_{j1}, r_{j2}, \cdots, r_{j\sum_{j=1}^{K} w_j})$，若属性 j 的最高水平为 w_j，则 R_p 的第 j 行改写成为 w_j 行，$(w_1+w_2+\cdots+w_K)$ 列的 0-1 矩阵，它是 M 的子矩阵，这个子矩阵第 h 列是 w_j 维列向量，其中前面 r_{jh} 个元素为 1，后面 w_j-r_{jh} 个元素等于 0.

注意到 M 矩阵通过布尔矩阵的乘法运算有 $M \circ M = M$. 故知 M 仍为可达阵，即 M 实际上是可达矩阵 R.

对上述 M 施行扩张算法，得到 2 值 Q_p，进而导出 Q_s，可用这个 M 导出潜在 Q 阵 Q_p 和学生 Q 阵 Q_s. 假设被试知识状态不小于题目属性向量（即差向量的每个分量均非负），则在理想条件下能够对该项目正确反应，那么以 M 为测验 Q 阵，Q_s 中的列导出的 ERP（期望反应模式）与 Q_s 的列一一对应[9,16]. 如果以 M 的列和作为 M 的列对应的题目的满分值，那么就是 Sun Jia´nan 等[2] 提出的特殊的理想反应计分方式，即掌握题目中 1 个属性增加 1 分.

另一方面，对于上面导出的 Q_p，使用缩减算法[17]，可以导出可达阵 M. 而将 M 按照如下方法进行压缩，使之成为 R_p：按照给定的各个属性的最高水平的已知条件进行分块，比如第 j 个属性的最高水平为 w_j，$j=1,2,\cdots,K$，依次将 M 的行剖分成为 K 子块，第 j 子块包含 w_j 行，然后将这 w_j 行相加，得到 R_p 的第 j 行，$j=1,2,\cdots,K$. 称这种方法为压缩方法.

这样使用膨胀算法由 R_p 可以导出唯一的 0-1 可达阵 M，使用压缩方法由 M 可以导出唯一的多值可达阵 R_p. 故 R_p 与 M 是可以一一对应的.

值得注意的是，显然由多值知识状态和 0-1 知识状态通过膨胀和压缩算法可以互换.

3　结论与讨论

本文给出了可达阵的一些基本性质，由此得到学生 Q 阵在先决关系下构成 1 个格的结论，然后给出了基于多值可达阵的扩张算法. 通过多值矩阵和 0-1 矩阵的相互转化，应用 0-1 矩阵获得的结果，证明含多值可达阵的测验，在掌握题目中 1 个属性期望得分（理想得分）便增加 1 分的特殊计分方式下，仍可以使期望反应模式和知识状态一一对应.

本文的结果说明多值可达阵（Q 矩阵）通过膨胀算法可以导出 0-1 可达阵（Q 矩阵），而多值可达阵（Q 矩阵）本质上都可以通过某一个 0-1 可达阵（Q 矩阵）通过压缩算法导出.

根据给出的计算多值可达阵和多值 Q 阵的算法知，Sun Jia´nan 等[2] 中表 7 的线型（linear）和收敛型（convergent）的多值可达阵中本来应该是 7 列，但表 7 却列出了 11 列，后面 4 列可以由前面 7 列扩张出来. 事实上，如果有 K 个属性，属性 A_j 的最高水平为 w_j，则多值可达阵的列数为 $\sum_{j=1}^{K} w_j$，行数为 K，Sun Jia´nan 等[2] 给出的线性和收敛型的 3 个属性的最高水平分别为 1，2，4. 故多值可达阵为 3 行 7（$7=1+2+4$）列，由于可达阵在测验编制中有重要作用[3] 且测验有时不能安排太多题目（比如课堂评估），所以分辨 1 个列是不是可达阵的列有一定意义.

不论是 0-1 可达阵还是多值可达阵，均可用扩张算法导出潜在 Q 阵，潜在 Q 阵在题库建设中的作用是可以保证任何一种知识状态的被试都可以找到合适的题目，即做到量体裁衣，缺少其中一列都使该题库不完整，这意味着具有某些知识状态的被试难以比较准确地测量.

定理 1 的证明，也可以使用杨淑群等[14] 的方法，该文使用的工具是形式概念分析. 其实文献[14] 对扩张算法进行了证明，但是没有明确地表达出来. 如果纯粹使用多级可达矩阵，如何证明多值的扩张算法，使用本文提出的多值与 0-1 矩阵的互换

是否可以达到目的,这是一个有趣的问题.

对于 Sun Jia´nan 等[2] 给出的一般计分方式,多值可达阵是否可以使知识状态和期望反应模式一一对应,值得进一步讨论. 可否使用本文给出的方法,将其转换为 0-1 矩阵证明,值得继续探讨.

对于 0-1 矩阵的情况,学生 Q 矩阵的列定义布尔交和布尔并之后,构成 1 个格. 扩张算法表明 Q 矩阵的列,可以表成为可达阵的列的布尔并,这种表达不一定唯一,结合这些结果,这个格有什么性质,它们在认知诊断中有什么意义,值得深入研究.

4 参考文献

[1] 左孝凌,李为鑑,刘永才. 离散数学[M]. 上海: 上海科学技术文献出版社,1982.

[2] Sun Jia´nan,Xin Tao,Zhang Shumei,et al. A polytomous extension of the generalized distance discriminating method[J]. Applied Psychological Measurement,2013,37(7):503-521.

[3] Ding Shuliang,Luo Fen,Cai Yan,et al. Complement to Tatsuoka´s Q matrix theory[C]//Shigemasu K,Okada A,Imaizumi T,et al. New trends in psychometrics[A]. Tokyo: Universal Academy Press,2008:417-423.

[4] 丁树良,祝玉芳,林海菁,等. Tatsuoka Q 矩阵理论的修正[J]. 心理学报,2009,41(2):175-181.

[5] 杨淑群,蔡声镇,丁树良,等. 求解简化 Q 矩阵的扩张算法[J]. 兰州大学学报: 自然科学版,2008,44(3):87-91,96.

[6] 丁树良,罗芬,汪文义. Q 矩阵理论的扩展[J]. 心理学探新,2012,32(5):410-422.

[7] 丁树良,罗芬,汪文义. 多级评分认知诊断测验蓝图的设计: 独立型和收敛型结构[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2014,38(3):265-269.

[8] 丁树良,汪文义,罗芬. 多级评分认知诊断测验蓝图的设计: 根树型结构[J],江西师范大学学报: 自然科学版,2014,38(2):111-118.

[9] 丁树良,杨淑群,汪文义. 可达矩阵在认知诊断测验编制中的重要作用[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2010,34(5):490-495.

[10] 丁树良,罗芬. 由偏序关系的可达阵导出 Hasse 图的有效算法[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2013,37(5):441-444.

[11] Tatsuoka K K. Architecture of knowledge structures and cognitive diagnosis: a statistical pattern classification approach,In Cognitively Diagnostic Assessments[D]. Erlbaum: Hillsdale,1995:327-359.

[12] Tatsuoka K K. Cognitive assessment: an introduction to the rule space method[M]. New York: Taylor & Francis Group,2009.

[13] 丁树良,罗芬. 求偏序关系 Hasse 图的算法[J]; 江西师范大学学报: 自然科学版,2005,29(2):150-152.

[14] 杨淑群,丁树良. 有效对象的判定理论与方法[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2011,35(1):1-4.

[15] 汪文义,丁树良,游晓锋. 计算机化自适应诊断测验中原始题的属性标定[J]. 心理学报,2011,43(8):964-976.

[16] 丁树良,汪文义,杨淑群. 认知诊断测验蓝图的设计[J]. 心理科学,2011,34(2):258-265.

[17] 丁树良,毛萌萌,汪文义,等. 教育认知诊断测验与认知模型一致性的评估[J]. 心理学报,2012,44(11):1535-1546.

The Properties of 0-1 and Polytomous Reach Ability Matrices and Their Applications

DING Shuliang,LUO Fen,WANG Wenyi,XIONG Jianhua

(College of Computer Information and Engineering,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: The basic properties of the 0-1 reachability matrix and their applications are discussed. The student Q matrix and the prerequisite relation defined on it is a lattice. An algorithm to calculate the polytomous reachability matrix is given and the augment algorithm based on the polytomous reachability matrix is proposed. For 0-1 and polytomous reachibility matrices,the methods which include the expanse algorithm and the condensation algorithm for the translation from each other are introduced and an application of the translation is given. It is discovered that the polytomous reachibility matrix is the compressive form a 0-1 reachibility matrix.

Key words: reachability matrix; lattice; polytomous reachability matrix; polytomous Q matrix

(责任编辑: 冉小晓)