

文章编号: 1000-5862( 2015) 02-0200-07

## 拟极值距离( QED) 常数

程 涛 樊玲玲 吴其明

( 华东师范大学数学系, 上海 200241)

摘要: 通过分析调和函数的临界点和等势线, 证明了在非退化情形下, QED 常数  $M_2$  能被与边界有交的连续统达到, 同时在 1 种退化情形下, 给出了  $M_2$  的 1 个上界估计.

关键词: QED 常数; 模; 调和函数; 临界点; 等势线

中图分类号: O 174. 5; O 19 文献标志码: A DOI: 10. 16357/j. cnki. issn1000-5862. 2015. 02. 16

### 0 引言

本文中使用的  $C$  表示复平面,  $\bar{C}$  表示  $C$  的单点紧化. 设  $\Omega \subset \bar{C}$  是 1 个区域,  $\Gamma$  是  $\Omega$  中的可求长曲线族. 称  $\Omega$  上非负 Borel 可测函数  $\rho$  是允许的<sup>[1]</sup>, 如果  $\Omega$  的  $\rho$  面积  $A(\Omega, \rho)$  满足  $0 < A(\Omega, \rho) = \iint_{\Omega} \rho^2 dx dy < \infty$ .

曲线  $\gamma$  的  $\rho$  长度指  $L(\gamma, \rho) = \int_{\gamma} \rho(z) |dz|$ . 曲线族  $\Gamma$  的  $\rho$  长度定义为  $L(\Gamma, \rho) = \inf_{\gamma \in \Gamma} L(\gamma, \rho)$ . 曲线族  $\Gamma$  的极值长度为  $\lambda(\Gamma) = \sup_{\rho} [L^2(\Gamma, \rho) / A(\Omega, \rho)]$ .

令  $adm(\Gamma)$  表示满足  $\int_{\gamma} \rho ds \geq 1$  的非负可测函数  $\rho$  的全体. 曲线族  $\Gamma$  的模式定义为

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in adm(\Gamma)} \int_{\Omega} \rho^2 dm.$$

QED 区域是 Gehring 和 Martio<sup>[2]</sup> 在研究拟共形映射<sup>[1]</sup> 时引入的 1 类区域. 任意区域  $D$  的拟极值距离 QED 常数  $M(D)$  可表示为

$$M(D) = \sup_{\overline{D}} \{ \text{mod}(A, B; C) / \text{mod}(A, B; D) \},$$

这里上确界取遍  $\overline{D}$  中所有的互不相交的非退化连续统  $A, B$ , 其中  $\text{mod}(A, B; D)$  表示区域  $D$  内连接  $A, B$  的曲线族的模, 并且  $\text{mod}(A, B; C)$  与  $\text{mod}(A, B; D)$  不能同时为 0 和  $\infty$ . 若区域  $\Omega$  的 QED 常数  $M(\Omega)$  为有限数, 则称它为 1 个 QED 区域.

研究 QED 常数可为更好地研究区域的几何性质提供帮助. 杨善双在文献 [3] 中系统地阐述了  $\mathbf{R}^n$  中的 QED 常数  $M(\Omega)$  的值的大小与区域的几何性质的关系. 例如, 若区域  $\Omega$  是球或者是上半平面, 则

$M(\Omega) = 2$ . 特别地,  $M(\Omega) = 2$  等价于  $\Omega$  Möbius 等价于 1 个球除去 1 个 NED 集.  $\mathbf{R}^2$  中的任一单连通 QED 区域都是拟圆. 在引入了边界 QED 常数  $M_b(\Omega)$  概念后, 文献 [4-6] 对 QED 常数  $M(D)$  的上界进行了深入研究, 并分别给出了不同的几何与分析条件. 随后, 许多学者在这方面做了大量研究, 如文献 [7-13] 等.

上述对 QED 常数  $M(\Omega)$  的研究都是定义在单个连续统上. 本文将单个的连续统推广到多个并的情况, 然后主要研究在 QED 常数  $M(\Omega)$  可达的条件下, 是否有更大一点并且边界有交的连续统使得  $M(\Omega)$  仍然可达, 同时研究  $M_2(\Omega)$  与边界伸缩商  $H(\Omega)$  的关系.

### 1 预备知识和主要结果

定义

$$M_{n,m}(D) = \sup_{\overline{D}} \{ \text{mod}(A, B; C) / \text{mod}(A, B; D) \},$$

其中  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ ,  $B = \bigcup_{j=1}^m B_j$ ,  $A_i, B_j$  都是  $D$  中互不相交的连续统.

当  $n = 1, m = 1$  时, 就是通常意义下的 QED 常数  $M(D)$ . 本文主要考虑的是  $M_2(D)$  的相关性质.

一个 Jordan 区域的 QED 常数与其它的拟共形常数如拟共形反射常数和边界伸缩商等有紧密关系. 穿过 1 条闭 Jordan 曲线  $\beta$  的拟共形反射是指  $\bar{C}$  上到自身的 1 个拟共形映射, 它将  $\beta$  的外部映到曲线的内部, 将内部映到外部, 并且保持  $\beta$  上的点不动. 拟共形反射常数记作  $R(\Omega)$ , 定义为  $R(\Omega) = \inf \{ K(f) : f \text{ 是穿过 } \partial\Omega \text{ 的拟共形反射} \}$ , 其中  $K(f)$  是

收稿日期: 2014-12-25

基金项目: 国家自然科学基金(11001081, 11471117) 资助项目.

作者简介: 程 涛(1978-), 江西泰和人, 副教授, 博士, 主要从事复分析与复动力系统的研究.

$f$  的伸缩商.  $f$  的边界伸缩商定义为  $H(\Omega) = \inf\{K(f|_U)\}$ , 这里的下确界取遍所有穿过  $\partial\Omega$  拟共形反射  $f$  以及  $\partial\Omega$  所有的邻域  $U$ . 在文献 [3] 中已证对任何 Jordan 区域  $\Omega$  有  $M(\Omega) \leq R(\Omega) + 1$ .

为了更好地理解  $M(\Omega)$  与其它常数的关系, 有必要了解如何取到  $M(\Omega)$  定义中的上确界, 称  $M(\Omega)$  被非退化连续统达到是指存在 2 个互不相交的非退化连续统  $A, B$  使得

$$M(\Omega) = \text{mod}(A, B; C) / \text{mod}(A, B; \Omega).$$

在非退化情形下, 文献 [6] 中表明  $M(\Omega) = R(\Omega) + 1$  当且仅当其边界的耦合映射是由 1 个仿射映射诱导. 对于退化情形, 文献 [14] 中给出了 1 个精确的上界估计.

文献 [6] 中证明了如下的边界 QED 常数和 QED 常数上界的估计.

**定理 A** 若  $\Omega$  是扩张复平面  $\bar{C}$  上的 Jordan QED 区域, 则要么存在  $\partial\Omega$  上互不相交的非退化的连续统  $A, B$  使得  $M_b(\Omega) = \text{mod}(A, B; C) / \text{mod}(A, B; \Omega)$ , 要么  $M_b(\Omega) \leq H(h_\Omega) + 1$ .

**定理 B** 若  $\Omega$  是扩张复平面  $\bar{C}$  上的 Jordan QED 区域, 则要么存在  $\bar{\Omega}$  上互不相交的非退化的连续统  $A, B$  使得  $M(\Omega) = \text{mod}(A, B; C) / \text{mod}(A, B; \Omega)$ , 要么  $M(\Omega) \leq 2H(h_\Omega)$ .

文献 [14-15] 对其进行了推广.

**定理 C** 若  $\Omega$  是扩张复平面  $\bar{C}$  上的 Jordan QED 区域, 则要么存在  $\Omega$  上互不相交的非退化的连续统  $A, B$  使得  $M(\Omega) = \text{mod}(A, B; C) / \text{mod}(A, B; \Omega)$ , 要么  $M(\Omega) \leq H(\Omega) + 1$ .

**定理 D** 若  $\Omega$  是扩张复平面  $\bar{C}$  上的有限连通的 QED 区域, 则要么存在  $\Omega$  上互不相交的非退化的连续统  $A, B$  使得  $M(\Omega) = \text{mod}(A, B; C) / \text{mod}(A, B; \Omega)$ , 要么  $M(\Omega) \leq H(\Omega) + 1$ .

本文将证明如下结果.

**定理 1** 在复平面  $\bar{C}$  中, 如果  $M_{2,2}(D)$  被互不相交的非退化的连续统  $A, B$  (其中  $A = A_1 \cup A_2, B = B_1 \cup B_2$ ) 达到, 则存在  $\tilde{A} = \tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2, \tilde{B} = \tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2$ , 使得  $M_{2,2}(D) = \text{mod}(\tilde{A}, \tilde{B}; C) / \text{mod}(\tilde{A}, \tilde{B}; D)$ , 其中 (i)  $A \subset \tilde{A}, B \subset \tilde{B}$ ; (ii)  $\tilde{A} \cap \partial D \neq \emptyset, \tilde{B} \cap \partial D \neq \emptyset$ .

**定理 2** 设  $\Omega$  是复平面  $\bar{C}$  中 Jordan 区域, 如果  $M_{2,2}(\Omega)$  被退化连续统达到, 即

$$M_{2,2}(\Omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{mod}(A_n, B_n; C) / \text{mod}(A_n, B_n; \Omega),$$

其中  $A_n = A_n^1 \cup A_n^2, B_n = B_n^1 \cup B_n^2$  且  $\lambda(A_n, B_n; C) \rightarrow +\infty$ , 则  $M_{2,2}(\Omega) \leq H(\Omega) + 1$ .

为证明定理 1 和定理 2, 还需要建立如下定理,

它在定理 1 和定理 2 的证明过程中起着关键作用.

## 2 分解定理

**定理 3** 假设  $\Omega$  是扩充的复平面  $\bar{C}$  内的单连通 QED 区域  $A = A_1 \cup A_2, B = B_1 \cup B_2$ , 其中  $A_i, B_j$  ( $i = 1, 2; j = 1, 2$ ) 都是  $\Omega$  内非退化的互不相交的连续统, 则在  $\Omega$  内存在闭曲线  $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_A \cap \partial\Omega \neq \emptyset, \gamma_B \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ , 使得

$$\lambda(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2; \Omega) = \lambda(A_1 \cup A_2, \gamma_A; \Omega) + \lambda(\gamma_A, \gamma_B) + \lambda(\gamma_B, B_1 \cup B_2; \Omega), \quad (1)$$

并且  $\gamma_A, \gamma_B$  的每个分支至多与  $\partial\Omega$  有 1 个交点.

为证明定理 3, 先叙述下列推广的辐角原理.

**定理 E** 令  $G$  是有光滑边界的有界区域, 假设  $h$  是  $\bar{G}$  的邻域内的非常数的亚纯函数, 则有

$$(Z_G - P_G) + \frac{1}{2}(Z_{\partial G} - P_{\partial G}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} d \arg h,$$

这里  $Z_G, P_G$  分别表示  $h$  在集合  $G$  上的零点和极点的个数 (可数).

如果在区域边界上没有零点和极点, 则上式就表示辐角原理. 推广的辐角原理是将原来的条件减弱得到的.

**定理 3 的证明** 极值长度可以表示成 Dirichlet 积分的倒数, 即

$$\lambda(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2; \Omega) = \lambda(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2, G) = 1/D(u),$$

其中  $D(u) = \iint_G (u_x^2 + u_y^2) dx dy$ , 这里的  $u$  是定义在  $G = \Omega \setminus (A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2)$  上的有界的调和函数, 满足

(i)  $u$  可以连续延拓到  $G$  的边界, 并且

$$u|_{(\partial A_1 \cup \partial A_2)} = 0, \mu|_{(\partial B_1 \cup \partial B_2)} = 1;$$

(ii) 法向导数  $\partial u / \partial n$  在  $\partial G$  存在, 且  $\partial u / \partial n|_{\partial\Omega} = 0$ .

调和函数  $u$  的临界点就是使得解析函数  $u_x - iu_y$  为零的点. 由反射原理,  $\mu$  有一个经边界  $\partial G = \partial\Omega \cup \partial A_1 \cup \partial A_2 \cup \partial B_1 \cup \partial B_2$  的调和延拓, 因此  $u_x - iu_y$  也可以解析延拓. 假设  $p$  和  $q$  分别表示  $u_x - iu_y$  在  $G$  内部和边界  $\partial G$  的零点个数. 由于  $u_x - iu_y$  可以解析地延拓到边界, 所以  $u_x - iu_y$  没有极点. 应用推广的辐角原理有

$$\int_{\partial G} d \arg(u_x - iu_y) = 2\pi(p + q/2).$$

不妨令  $v(x)$  是  $u(x)$  的单值解析共轭调和函数. 若  $w = u + iv$ , 利用调和函数边界值的性质和矢

量积分,得到

$$\int_{\partial\Omega \cup \partial A_1 \cup \partial A_2 \cup \partial B_1 \cup \partial B_2} d \arg(dw) = 0.$$

又因  $\Omega$  是单连通区域,  $\partial G = \partial\Omega \cup \partial A_1 \cup \partial A_2 \cup \partial B_1 \cup \partial B_2$  由 5 个若当曲线组成,所以

$$\int_{\partial G} d \arg(dz) = -2\pi \times 3.$$

结合前面分析,有  $2p + q = 6$ .

因为边界上临界点的个数不能少于 2 个,所以临界点可以分成以下 3 种情况:

(i)  $p = 0, q = 6$ , 即所有的临界点都在边界上;

(ii)  $p = 1, q = 4$ , 即有 4 个临界点在边界,有 1 个在内部;

(iii)  $p = 2, q = 2$ , 即有 2 个临界点在边界,有 2 个在内部.

由于  $u$  是  $\bar{G}$  内的调和函数,把使得  $u(x, y) = k$  ( $k$  是常数) 的点的集合称为 1 条等势线  $\gamma$ , 为方便起见,用  $u(\gamma)$  表示  $\gamma$  在  $u$  作用下的值. 称 1 条等势线是临界的,如果它至少过 1 个临界点. 令区域  $G$  中临界等势线的集合为  $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ . 根据对区域临界点的计算,  $\bar{G}$  中至多有 6 个临界点,所以这里  $m \leq 6$ , 并且  $0 < u(\gamma_1) < u(\gamma_2) < \dots < u(\gamma_m) < 1$ .

不妨令  $\gamma_0 = \partial A, \gamma_{m+1} = \partial B$ , 把它们加入上面的序列,可以得到  $\Gamma^* = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m, \gamma_{m+1}\}$ . 这里  $\gamma_i$  不一定全是单支的,有部分是多支的.

对于  $0 \leq i \leq m$ , 令  $\Delta_i = \{z \in G: u(\gamma_i) < u(z) < u(\gamma_{i+1})\}$ . 很显然,每个  $\Delta_i$  是开集,但不一定是连通的,并且  $G \setminus \bigcup_{i=0}^{m+1} \gamma_i = \bigcup_{i=0}^{m+1} \Delta_i$ .

在下面的证明过程中,要适当地选择临界等势线来作为定理中要找的满足条件的闭曲线  $\gamma_A, \gamma_B$ . 为方便计算极值长度,将区域划分,然后利用共形映射映成适当的矩形,所以需要计算一些沿着等势线  $\gamma$  的积分. 下面以  $\Delta_0$  为例. 根据划分,  $\Delta_0$  是 2 个二连通区域  $\Delta_0^1, \Delta_0^2$  的并,其中  $\Delta_0^i$  ( $i = 1, 2$ ) 是由  $\gamma_0, \gamma_1$  的部分  $\gamma_0^i, \gamma_1^i$  围成的. 因为  $\Delta_0^i$  可以共形映射成圆环,则可以在  $\Delta_0^i$  中找到简单曲线  $\tau_0^i$  链接  $\gamma_0^i$  和  $\gamma_1^i$  使得  $\tau_0^i$  正交  $\Delta_0^i$  内的所有等势线,并且有

$$\lambda(\gamma_0^i, \gamma_1^i; \Delta_0^i) = \lambda(\gamma_0^i, \gamma_1^i; \tilde{\Delta}_0^i),$$

这里  $\tilde{\Delta}_0^i = \Delta_0^i \setminus \tau_0^i$ . 在其他的区域上类似方法可以得到简单曲线  $\tau_j^i$  ( $0 \leq j \leq 6$ ).

根据调和函数的性质,可以推出

$$\int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds = 0, D(u) = \int_{\partial G} u \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds.$$

经过简单的计算,有

$$-\int_{\partial A_1 \cup \partial A_2} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds = \int_{\partial B_1 \cup \partial B_2} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds = \int_{\partial G} u \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds = D(u).$$

另一方面,因为可以把  $u$  的共轭调和函数  $v$  连续

延拓到  $\partial G' = \partial(G \setminus \bigcup_{j=1}^6 \tau_j^i)$ , 所以

$$\int_{\partial A_1 \cup \partial A_2} dv = -\int_{\partial A_1 \cup \partial A_2} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds = D(u).$$

同理,有  $\int_{\partial B_1 \cup \partial B_2} dv = D(u)$ .

对区域内的任意等势线  $\gamma$  满足  $u(\gamma) = k$  ( $0 < k < 1$ ). 考虑  $u(\gamma)/k$ , 显然  $u(\gamma)/k$  也是 Mixed Dirichlet-Neumann 问题的解,根据上面讨论,所以有  $\int_{\gamma} dv = D(u)$ .

令  $\Gamma_i$  表示在  $\Delta_i$  ( $0 \leq i \leq m$ ) 内连接  $\gamma_i$  与  $\gamma_{i+1}$  的曲线族. 根据前面对极值长度的定义以及极值长度的次可加性,有

$$\frac{1}{D(u)} = \lambda(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2; \Omega) = \lambda(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2, G) \geq \sum_{i=0}^m \lambda(\Gamma_i).$$

下面证明

$$\lambda(\Gamma_i) = (u(\gamma_{i+1}) - u(\gamma_i)) / D(u). \quad (2)$$

根据前面对临界点的讨论,考虑到临界点在区域  $\bar{G}$  上的分布不同,下面分情况讨论.

(i) 若 6 个临界点都在边界  $\partial G$  上,根据前面的介绍,区域被划分为如下情形:

$$\Delta_i = \Delta_i^1 \cup \Delta_i^2 \quad (i = 0, 1, 2, 4, 5, 6),$$

这里  $\Delta_i^1, \Delta_i^2$  都是二连通的,而  $\Delta_3$  是连通的(图 1).

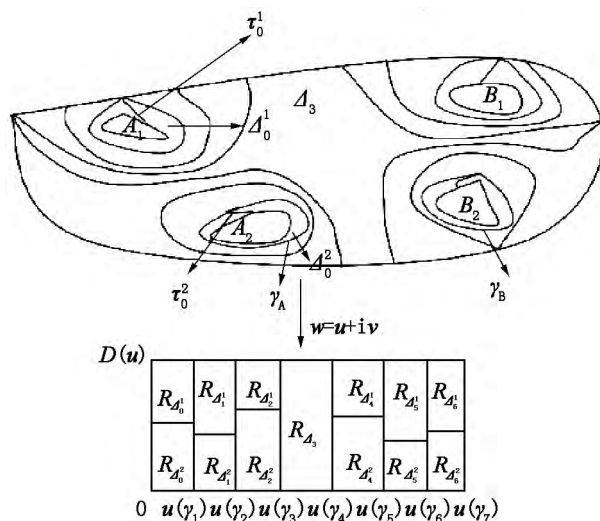


图 1 6 个临界点都在边界

事实上,根据等势线的定义,  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_5, \gamma_6$  都是由 2 个互不相交的分支组成. 如果 2 个分支相交,不妨设  $a$  是 1 个交点,则  $u(a) = k$ , 这里  $k$  是常数. 由于  $u$  解析,所以在点  $a$  处的共轭调和函数  $v$  是常数,则

根据前面临界点的定义, 点  $a$  也是临界点, 这与临界点的个数矛盾. 由于  $\Delta_i$  是由  $\gamma_i, \gamma_{i+1}$  以及边界  $\partial\Omega$  围成的(有的可能只由等势线围成), 则  $\Delta_i^k$  由  $\gamma_i, \gamma_{i+1}$  的部分  $\gamma_i^k, \gamma_{i+1}^k$  以及边界  $\partial\Omega$  围成(有的可能只由等势线围成), 从而  $\Delta_i^1, \Delta_i^2$  是互不相交的二连通区域. 这时取  $\gamma_A = \gamma_1, \gamma_B = \gamma_6$ , 其中  $\gamma_1, \gamma_6$  都是有 2 个分支.

首先考虑  $\Delta_0$ .  $\Delta_0$  是由 2 个二连通的区域  $\Delta_0^1, \Delta_0^2$  合并而成. 不妨以  $\Delta_0^1$  为例,  $\Delta_0^1$  是二连通区域. 根据前面的介绍, 可以在  $\Delta_0^1$  内找到 1 个简单的曲线  $\tau_0^1$  满足

$$\lambda(\partial A_1 \gamma_1^1; \Delta_0^1) = \lambda(\partial A_1 \gamma_1^1; \tilde{\Delta}_0^1),$$

这里  $\tilde{\Delta}_0^1 = \Delta_0^1 \setminus \tau_0^1$  是单连通区域. 同样地, 在  $\Delta_0^2$  内也能找到简单的曲线  $\tau_0^2$ , 使得

$$\lambda(\partial A_2 \gamma_1^2; \Delta_0^2) = \lambda(\partial A_2 \gamma_1^2; \tilde{\Delta}_0^2).$$

这里  $\tilde{\Delta}_0^2 = \Delta_0^2 \setminus \tau_0^2$  是单连通区域.

前面定义的共形映射  $w = u + iv$  可以将  $\Delta_0 \setminus \tau_0^k$  ( $k = 1, 2$ ) 映为 2 个矩形区域, 即

$$R_{\Delta_0^1} = (0, \mu(\gamma_1^1)) \times (0, D^1(u)),$$

$$R_{\Delta_0^2} = (0, \mu(\gamma_1^2)) \times (0, D^2(u)),$$

这里  $D(u) = D^1(u) + D^2(u)$ .

同样地, 在  $\Delta_6$  上共形映射  $w = u + iv$  可以将  $\Delta_6 \setminus \tau_6^k$  ( $k = 1, 2$ ) 映为 2 个矩形  $R_{\Delta_6^1}$  与  $R_{\Delta_6^2}$

$$R_{\Delta_6^1} = (u(\gamma_6^1), 1) \times (0, D^1(u)),$$

$$R_{\Delta_6^2} = (u(\gamma_6^2), 1) \times (0, D^2(u)).$$

又  $\lambda(A_1 \cup A_2, \gamma_A) = \lambda(\partial A_1 \cup \partial A_2, \gamma_1; \tilde{\Delta}_0^1) = 1 / (1/\lambda(\Gamma_0^1) + 1/\lambda(\Gamma_0^2))$ , 由极值长度的定义, 有

$$\lambda(\partial A_1 \cup \partial A_2, \gamma_A) = (u(\gamma_1) - 0) / D(u).$$

同理

$$\begin{aligned} \lambda(\gamma_B, B_1 \cup B_2) &= \lambda(\gamma_6, \partial B_1 \cup \partial B_2; \tilde{\Delta}_0^2) = \\ &= (1 - u(\gamma_6)) / D(u). \end{aligned}$$

这就证明了 (2) 式对当  $i = 0, 6$  时成立.

下面对于非连通区域  $\Delta_i$  ( $i = 1, 2, 4, 5$ ), 根据区域划分有  $\Delta_i = \Delta_i^1 \cup \Delta_i^2$ . 这里的每个  $\Delta_i^k$  ( $k = 1, 2$ ) 的边界是由部分临界等势线  $\gamma_i, \gamma_{i+1}$  和部分边界  $\partial\Omega$  组成. 则共形映射  $w = u + iv$  也可以将  $\Delta_i^k$  映为矩形

$$R_{\Delta_i^1} = (u(\gamma_i^1), \mu(\gamma_{i+1}^1)) \times (0, D^1(u)),$$

$$R_{\Delta_i^2} = (u(\gamma_i^2), \mu(\gamma_{i+1}^2)) \times (0, D^2(u)),$$

根据计算, 有

$$\lambda(\Gamma_i) = \frac{1}{(1/\lambda(\Gamma_i^1) + 1/\lambda(\Gamma_i^2))} = \frac{u(\gamma_{i+1}) - u(\gamma_i)}{D(u)}.$$

因为  $\Delta_3$  是连通的, 所以共形映射  $w = u + iv$  把它映为  $R_{\Delta_3} = (u(\gamma_3), \mu(\gamma_4)) \times (0, D(u))$ . 根据计算

$$\lambda(\Gamma_3) = [u(\gamma_4) - u(\gamma_3)] / D(u).$$

所以  $\forall i (0 \leq i \leq 6)$ , (2) 式成立. 则有

$$\begin{aligned} \lambda(A, B; G) &= \sum_{i=0}^6 \lambda(\Gamma_i) = \\ &= \sum_{i=0}^6 \frac{u(\gamma_{i+1}) - u(\gamma_i)}{D(u)} = \frac{1}{D(u)}. \end{aligned}$$

同理有  $\lambda(\gamma_A, \gamma_B) = \sum_{i=1}^5 (u(\gamma_{i+1}) - u(\gamma_i)) / D(u)$ .

从而

$$\lambda(A_1 \cup A_2, \gamma_A; \Omega) + \lambda(\gamma_A, \gamma_B) + \lambda(\gamma_B, B_1 \cup B_2; \Omega) = 1 / D(u),$$

由此 (1) 式得证.

(ii) 若有 4 个临界点在边界上, 只有 1 个在内部. 这时等势线划分区域会有 4 种情形.

(a) 若  $\gamma_4$  过内部的临界点, 区域被分割成如下情形  $\Delta_i = \Delta_i^1 \cup \Delta_i^2$  ( $i = 0, 1, 2, 4, 5$ ), 其中  $\Delta_i^1, \Delta_i^2$  是二连通的, 而  $\Delta_3$  是单连通的(见图 2).

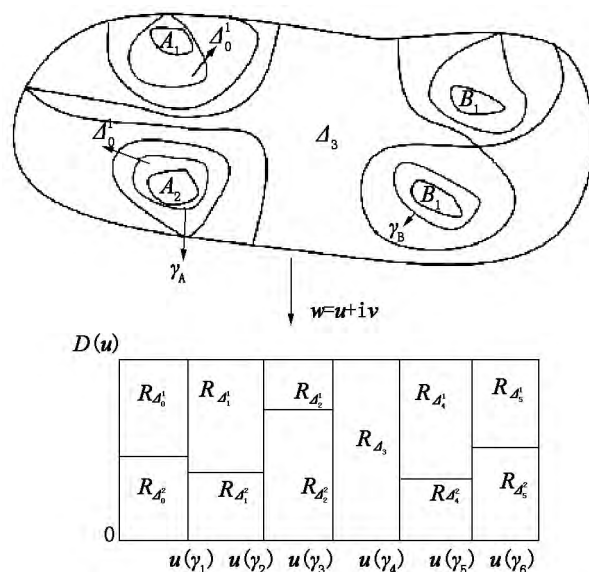


图2 4个临界点在边界(情况a)

这时取  $\gamma_A = \gamma_1, \gamma_B = \gamma_5$ , 其中  $\gamma_1$  有 2 个分支. 根据 (i) 中的计算容易得出

$$\lambda(A_1 \cup A_2, \gamma_A; \Delta_0) = \lambda(\partial A_1 \cup \partial A_2, \gamma_1; \tilde{\Delta}_0) = (u(\gamma_1) - 0) / D(u),$$

对于  $\Delta_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 \lambda(\Gamma_i) &= \frac{1}{(1/\lambda(\Gamma_1^1) + 1/\lambda(\Gamma_1^2))} + \\ &+ \frac{1}{(1/\lambda(\Gamma_2^1) + 1/\lambda(\Gamma_2^2))} + \lambda(\Gamma_3) + \\ &+ \frac{1}{(1/\lambda(\Gamma_4^1) + 1/\lambda(\Gamma_4^2))} + \frac{1}{(1/\lambda(\Gamma_5^1) + 1/\lambda(\Gamma_5^2))} = \\ &= \sum_{i=1}^5 \frac{u(\gamma_{i+1}) - u(\gamma_i)}{D(u)}, \end{aligned}$$

所以  $\forall i(0 \leq i \leq 5)$  (2) 式成立. 从而 (1) 式得证.

(b) 若  $\gamma_5$  过内部的临界点, 区域被分割成如下情形  $\Delta_i = \Delta_i^1 \cup \Delta_i^2 (i = 0, 1, 2, 5)$ , 其中  $\Delta_i^1, \Delta_i^2$  是二连通的, 而  $\Delta_3, \Delta_4$  是连通的(见图 3).

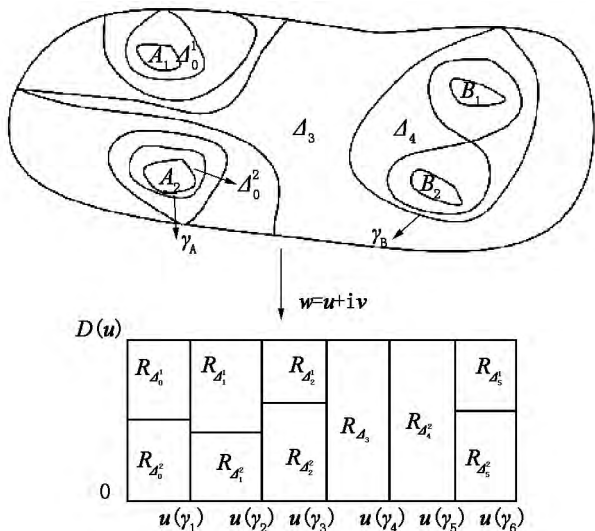


图 3 4 个临界点在边界(情况 b)

这时取  $\gamma_A = \gamma_1, \gamma_B = \gamma_4$ , 其中  $\gamma_1$  有 2 个分支,  $\gamma_4$  只有 1 个分支.

根据前面定义的映射,

$$\lambda(A_1 \cup A_2, \gamma_A; \Delta_0) = \lambda(\partial A_1 \cup \partial A_2, \gamma_1; \tilde{\Delta}_0) = (u(\gamma_1) - 0) / D(u),$$

因为  $\Delta_4$  连通  $\Delta_5$  不连通, 有

$$\lambda(\gamma_B, B_1 \cup B_2) = \lambda(\Gamma_4) + \frac{1}{(1/\lambda(\Gamma_5^1) + 1/\lambda(\Gamma_5^2))} = \frac{1 - u(\gamma_4)}{D(u)},$$

而  $\Delta_1, \Delta_2$  不连通的  $\Delta_3$  是连通的, 所以有

$$\lambda(\Gamma_1) = \frac{1}{(1/\lambda(\Gamma_1^1) + 1/\lambda(\Gamma_1^2))} = \frac{u(\gamma_2) - u(\gamma_1)}{D(u)},$$

$$\lambda(\Gamma_2) = \frac{1}{(1/\lambda(\Gamma_2^1) + 1/\lambda(\Gamma_2^2))} = \frac{u(\gamma_3) - u(\gamma_2)}{D(u)},$$

$$\lambda(\Gamma_3) = \frac{u(\gamma_4) - u(\gamma_3)}{D(u)}.$$

故对  $0 \leq i \leq 5$ , 有  $\lambda(\Gamma_i) = (u(\gamma_{i+1}) - u(\gamma_i)) / D(u)$  成立. 同理  $\lambda(\gamma_A, \gamma_B) = (u(\gamma_4) - u(\gamma_1)) / D(u)$ . 所以 (1) 式成立.

(c) 若  $\gamma_2$  过内部的临界点,  $\gamma_3$  过边界的临界点, 区域被分割成如下情形

$$\Delta_i = \Delta_i^1 \cup \Delta_i^2 (i = 0, 1, 3, 4, 5),$$

其中  $\Delta_i^1, \Delta_i^2$  是二连通的, 而  $\Delta_2$  是连通的. 具体图形将情况(ii)中(a)的  $B, A$  互换即可. 这时让  $\gamma_A = \gamma_1, \gamma_B = \gamma_5$ , 其中  $\gamma_1, \gamma_5$  都有 2 个分支. 类似的计算可以证明 (1) 式成立.

(d) 若  $\gamma_1$  过内部的临界点,  $\gamma_3$  过边界的临界点, 则区域被分割成如下情形

$$\Delta_i = \Delta_i^1 \cup \Delta_i^2 (i = 0, 3, 4, 5),$$

其中  $\Delta_i^1, \Delta_i^2$  是二连通的, 而  $\Delta_1, \Delta_2$  是连通的. 具体图形将情况(ii)中(b)的  $B, A$  互换即可. 这时取  $\gamma_A = \gamma_2, \gamma_B = \gamma_5$ , 其中  $\gamma_2$  只有 1 个分支,  $\gamma_5$  有 2 个分支. 类似的计算可得结论.

(iii) 若只有 2 个临界点在边界上, 2 个在内部, 这时等势线划分区域也会有 4 种情形.

(a) 若  $\gamma_2, \gamma_3$  过内部的临界点, 区域被分割成如下情形  $\Delta_i = \Delta_i^1 \cup \Delta_i^2 (i = 0, 1, 3, 4)$ , 其中  $\Delta_i^1, \Delta_i^2$  是二连通的, 而  $\Delta_2$  是连通的(见图 4).

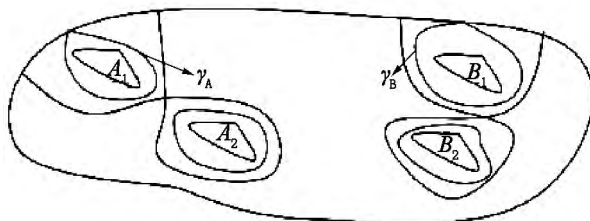


图 4 2 个临界点在边界(情况 a)

这时让  $\gamma_A = \gamma_1, \gamma_B = \gamma_4$ , 其中  $\gamma_1, \gamma_4$  都是有 2 个分支. 类似于(i)的计算可得结论.

(b) 若  $\gamma_2, \gamma_4$  过内部的临界点, 区域被分割成如下情形  $\Delta_i = \Delta_i^1 \cup \Delta_i^2 (i = 0, 1, 4)$ , 其中  $\Delta_i^1, \Delta_i^2$  是二连通的, 而  $\Delta_2, \Delta_3$  是连通的(见图 5).

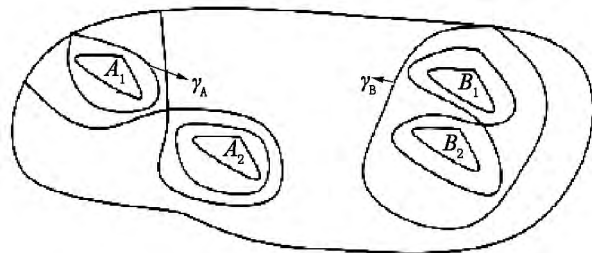


图 5 2 个临界点在边界(情况 b)

这时让  $\gamma_A = \gamma_1, \gamma_B = \gamma_3$ , 其中  $\gamma_1$  有 2 个分支,  $\gamma_3$  只有 1 个分支. 类似的计算可得结论.

(c) 若  $\gamma_1, \gamma_4$  过内部的临界点, 区域被分割成如下情形  $\Delta_i = \Delta_i^1 \cup \Delta_i^2 (i = 0, 1, 4)$ , 其中  $\Delta_i^1, \Delta_i^2$  是二连通的, 而  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  是连通的(见图 6).

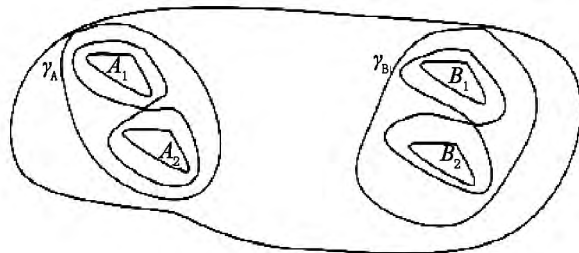


图 6 2 个临界点在边界(情况 c)

这时取  $\gamma_A = \gamma_2, \gamma_B = \gamma_3$ , 其中  $\gamma_2, \gamma_3$  都是单个分支.

$$\begin{aligned} \lambda(A_1 \cup A_2, \gamma_A) &= \lambda(\partial A_1 \cup \partial A_2, \gamma_2) = \\ &= \frac{1}{(1/\lambda(\Gamma_0^1) + 1/\lambda(\Gamma_0^2))} + \lambda(\Gamma_1) = \frac{u(\gamma_2)}{D(u)}, \\ \lambda(\gamma_B, B_1 \cup B_2) &= \lambda(\gamma_3, \partial B_1 \cup \partial B_2) = \lambda(\Gamma_3) + \\ &= \frac{1}{(1/\lambda(\Gamma_4^1) + 1/\lambda(\Gamma_4^2))} = \frac{1 - u(\gamma_3)}{D(u)}, \end{aligned}$$

而  $\Delta_2$  是连通的, 所以有

$$\lambda(\Gamma_2) = (u(\gamma_3) - u(\gamma_2)) / D(u),$$

容易得到, 对  $0 \leq i \leq 4$  都有

$$\lambda(\Gamma_i) = (u(\gamma_{i+1}) - u(\gamma_i)) / D(u)$$

成立, 则有

$$\lambda(A_1 \cup A_2, \gamma_A; \Omega) + \lambda(\gamma_A, \gamma_B) + \lambda(\gamma_B, B_1 \cup B_2; \Omega) = 1 / D(u).$$

(d) 若  $\gamma_1, \gamma_3$  过内部的临界点, 区域被分割成如下情形  $\Delta_i = \Delta_i^1 \cup \Delta_i^2 (i = 0, 3, 4)$ , 其中  $\Delta_i^1, \Delta_i^2$  是二连通的, 而  $\Delta_1, \Delta_2$  是连通的. 具体图形将情况 (iii) 中 (b) 的  $B, A$  互换即可. 这时取  $\gamma_A = \gamma_2, \gamma_B = \gamma_4$ , 其中  $\gamma_2$  只有 1 个分支,  $\gamma_4$  有 2 个分支. 类似的计算可得 (1) 式成立.

下面说明  $\gamma_A, \gamma_B$  的每个分支至多与  $\partial\Omega$  有 1 个交点. 不妨以  $\gamma_A$  为例. 根据前面对  $\gamma_A$  的选取, 存在 1 个临界点  $a \in \gamma_A \cap \partial\Omega$ , 假设除临界点外还有 1 点  $z(x, y) \in \gamma_A \cap \partial\Omega$ , 则在这 1 点满足  $u(x, y) = c$ , 从而  $\partial u / \partial s|_{(x, y)} = 0$ . 又因为  $\partial u / \partial n|_{\partial\Omega} = 0$ , 所以根据临界点的定义,  $z(x, y)$  也是 1 个临界点. 这与临界点的个数不符合.

### 3 反射定理

为了证明定理 1 与定理 2, 还需要下面的反射定理. 这个定理的证明与文献 [3] 类似, 在此略去.

**定理 4** 假设  $\Omega$  是复平面  $C$  内的 Jordan QED 区域,  $\bar{\Omega} \subset \Omega_\varepsilon$ .  $f$  是 1 个  $f: \Omega_\varepsilon \setminus \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$  的  $K$ -拟共形映射, 且  $\forall z \in \partial\Omega$  有  $f(z) = z$ , 则对任意不相交非退化连续统  $A, B \subset \bar{\Omega}, A = A_1 \cup A_2, B = B_1 \cup B_2$ , 有

$$\begin{aligned} \text{mod}(A, B; \Omega_\varepsilon) &\leq (1 + K) \text{mod}(A, B; \bar{\Omega}) = \\ &= (1 + K) \text{mod}(A, B; \Omega). \end{aligned}$$

### 4 定理的证明

**定理 1 的证明** 因为  $M_{2,2}(D)$  被互不相交的非退化的连续统  $A, B$  达到, 则存在互不相交的序列

$(A_n, B_n), A_n, B_n \subset D$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$ , 则  $\forall \varepsilon > 0$ , 当  $n$  充分大时,

$$M_{2,2}(D) - \varepsilon < \frac{\lambda(A_n, B_n; D)}{\lambda(A_n, B_n; C)} < M_{2,2}(D) + \varepsilon. \quad (3)$$

下面寻找  $\tilde{A}, \tilde{B}$ . 若  $A \cap \partial D \neq \emptyset, B \cap \partial D \neq \emptyset$ ,

则  $A = \tilde{A}, B = \tilde{B}$ , 定理 1 的结论成立.

下面考虑  $A, B$  与  $\partial D$  均没有交点的情况. 根据前面的分解定理, 可以选择以  $\gamma_A, \gamma_B$  为边界的区域作为要寻找的连续统  $\tilde{A}, \tilde{B}$ , 则有  $A \subset \tilde{A}, B \subset \tilde{B}$ . 因为  $\gamma_A, \gamma_B$  的任一分支至多与边界  $\partial D$  有 1 个交点, 所以区域  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$  和  $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2$  分别至少有 1 个与边界有交点.

因为  $\gamma_A, \gamma_B$  互不相交, 所以存在互不相交的  $\gamma_{A_n}, \gamma_{B_n}$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{A_n} = \gamma_A, \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{B_n} = \gamma_B$ . 由分解定理, 有  $\lambda(A_n, B_n; D) = \lambda(A_n, \gamma_{A_n}; D) + \lambda(\gamma_{A_n}, \gamma_{B_n}) + \lambda(\gamma_{B_n}, B_n; D)$ . 又

$$\lambda(A_n, B_n; C) \geq \lambda(A_n, \gamma_{A_n}; C) + \lambda(\gamma_{A_n}, \gamma_{B_n}) + \lambda(\gamma_{B_n}, B_n; C).$$

所以有

$$\begin{aligned} \lambda(A_n, B_n; D) / \lambda(A_n, B_n; C) &\leq [\lambda(A_n, \gamma_{A_n}; D) + \\ &+ \lambda(\gamma_{A_n}, \gamma_{B_n}) + \lambda(\gamma_{B_n}, B_n; D)] / [\lambda(A_n, \gamma_{A_n}; C) + \\ &+ \lambda(\gamma_{A_n}, \gamma_{B_n}) + \lambda(\gamma_{B_n}, B_n; C)] < \lambda(\gamma_{A_n}, \gamma_{B_n}; D) / \\ &\lambda(\gamma_{A_n}, \gamma_{B_n}; C). \end{aligned}$$

因为  $D$  是 QED 区域, 由  $M(D)$  的定义, 任给  $D$  内的区域  $\tilde{A}_n, \tilde{B}_n$  有

$$\text{mod}(\tilde{A}_n, \tilde{B}_n; C) \leq M_{2,2}(D) \text{mod}(\tilde{A}_n, \tilde{B}_n; D). \quad (4)$$

由 (3) 式和 (4) 式有

$$\begin{aligned} M_{2,2}(D) - \varepsilon &< \frac{\lambda(A_n, B_n; D)}{\lambda(A_n, B_n; C)} < \frac{\lambda(\gamma_{A_n}, \gamma_{B_n}; D)}{\lambda(\gamma_{A_n}, \gamma_{B_n}; C)} \leq \\ &M_{2,2}(D). \text{ 令 } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ 有} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mod}(\tilde{A}_n, \tilde{B}_n; C) / \text{mod}(\tilde{A}_n, \tilde{B}_n; D) = M_{2,2}(D),$$

综上所述, 得

$$M_{2,2}(D) = \text{mod}(\tilde{A}, \tilde{B}; C) / \text{mod}(\tilde{A}, \tilde{B}; D),$$

这里  $\tilde{A}, \tilde{B}$  满足: (i)  $A \subset \tilde{A}, B \subset \tilde{B}$ ; (ii)  $\tilde{A} \cap \partial D \neq \emptyset, \tilde{B} \cap \partial D \neq \emptyset$ .

若  $A, B$  中一个与  $\partial D$  有交点, 另一个与  $\partial D$  没有交点, 使用与前面同样的方法也可以得到定理 1 的结论. 由此定理 1 证毕.

**定理 2 的证明** 因为  $M_{2,2}(D)$  被互不相交的非退化的连续统  $A_n, B_n$  达到, 即

$$M_{2,2}(\Omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{mod}(A_n, B_n; C)}{\text{mod}(A_n, B_n; \Omega)} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(A_n, B_n; \Omega)}{\lambda(A_n, B_n; C)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(A_n, B_n; \Omega_\varepsilon)}{\lambda(A_n, B_n; \Omega_\varepsilon)} \cdot$$

$$\frac{\lambda(A_n, B_n; \Omega_\varepsilon)}{\lambda(A_n, B_n; C)} \leq (1 + H + \varepsilon) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(A_n, B_n; \Omega_\varepsilon)}{\lambda(A_n, B_n; C)}.$$

上面最后一个不等式是由反射引理得到的. 由分解定理, 有

$$\lambda(A_n, B_n; \Omega_\varepsilon) = \lambda(A_n, \gamma_{A_n}; \Omega_\varepsilon) + \lambda(\gamma_{A_n}, \gamma_{B_n}; \Omega_\varepsilon) + \lambda(\gamma_{B_n}, B_n; \Omega_\varepsilon).$$

又由极值长度的次可加性得

$$\lambda(A_n, B_n; C) \geq \lambda(A_n, \gamma_{A_n}; \Omega_\varepsilon) + \lambda(\gamma_{A_n}, \gamma_{B_n}; C) + \lambda(\gamma_{B_n}, B_n; \Omega_\varepsilon).$$

所以有

$$\lambda(A_n, B_n; \Omega_\varepsilon) / \lambda(A_n, B_n; C) \leq [\lambda(A_n, \gamma_{A_n}) + \lambda(\gamma_{A_n}, \gamma_{B_n}; \Omega_\varepsilon) + \lambda(\gamma_{B_n}, B_n)] / [\lambda(A_n, \gamma_{A_n}) + \lambda(\gamma_{A_n}, \gamma_{B_n}; C) + \lambda(\gamma_{B_n}, B_n)].$$

因为  $\lambda(A_n, B_n; C) = +\infty$ , 故  $\lambda(A_n, B_n; \Omega_\varepsilon) \geq \lambda(A_n, B_n; C) = +\infty$ .

又因为  $\lambda(\gamma_{A_n}, \gamma_{B_n}) = (u(\gamma_{B_n}) - u(\gamma_{A_n})) / D(u)$ , 所以  $\lambda(A_n, B_n; \Omega_\varepsilon)$  与  $\lambda(A_n, B_n; C)$  都是有限数. 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n, B_n; \Omega_\varepsilon) / \lambda(A_n, B_n; C) = 1.$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0$  得  $M_{2,2}(\Omega) \leq 1 + H(\Omega)$ . 定理 2 得证.

## 5 参考文献

- [1] Gehring F W. Quasiconformal mappings [J]. Complex Analysis and Its Applications, Internat Atomic Energy Agency, Vienna, 1976, 2: 213-268.
- [2] Gehring F W, Marto O. Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings [J]. J d'Analyse Math, 1985, 45: 181-206.
- [3] Yang Shanshuang. QED domains and NED sets in  $\mathbf{R}^n$  [J]. Trans Amer Math Soc, 1992, 334: 97-120.
- [4] Garnett J B, Yang Shanshuang. Quasiextremal distance domains and integrability of derivatives of conformal mappings [J]. Michigan Math J, 1994, 41: 389-406.
- [5] Yang Shanshuang. Conformal invariants of smooth domains and extremal quasiconformal mappings of ellipses [J]. Illinois J Math, 1997, 41: 438-452.
- [6] Shen Yuliang. Conformal invariants of QED domains [J]. Tohoku Math J, 2004, 56: 445-466.
- [7] Kovtonyuk D, Petkov I, Ryazanov V et al. On the Dirichlet problem for the Beltrami equation [J]. J Anal Math, 2014, 122: 113-141.
- [8] Kovtonyuk D, Petkov I, Ryazanov V. On the boundary behaviour of solutions to the Beltrami equations [J]. Complex Var Elliptic Equ, 2013, 58(5): 647-663.
- [9] Bonk Mario. Uniformization of Sierpiński carpets in the plane [J]. Invent Math, 2011, 186(3): 559-665.
- [10] Yang Shanshuang. Duality, uniformity and linear local connectivity [J]. Illinois J Math, 2009, 53(1): 339-347.
- [11] Hakobyan H, Herron D A. Euclidean quasiconvexity [J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 2008, 33(1): 205-230.
- [12] Buckley S M, Herron D A. Uniform domains and capacity [J]. Israel J Math, 2007, 158: 129-157.
- [13] Dybov Y. On regular solutions of the Dirichlet problem for the Beltrami equations [J]. Complex Var Elliptic Equ, 2010, 55(12): 1099-1116.
- [14] Cheng Tao, Yang Shanshuang. Decomposition of extremal length and a proof of Shen's conjecture on QED constant and boundary dilatation [J]. Math Z, 2014, 278: 1195-1211.
- [15] Cheng Tao, Yang Shanshuang, Zhou Wenfei. Extremal length decomposition and domain constants for finitely connected domains [J]. Comput Methods Funct Theory, 2014, 14: 279-294.

## The Quasi-Extremal Distance( QED) Constants

CHENG Tao, FAN Lingling, WU Qiming

(Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200241, China)

**Abstract:** By analyzing the critical points and level sets of harmonic function, it is proved that the QED constants  $M_{2,2}$  can be obtained by continua intersecting domain boundary in the non-degenerate case. Furthermore, an upper bound for  $M_{2,2}$  in the degenerate case is given.

**Key words:** QED constant; modulus; harmonic function; critical points; level sets

(责任编辑: 王金莲)