第 40 卷 第 4 期
2016 年 7 月

江西师范大学学报(自然科学版)
Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)

Vol. 40 No. 4
Jul. 2016

文章编号:1000-5862(2016)04-0346-03

相对模糊利率下的带投资的风险模型

牛银菊[1],顾　群[2],马崇武[1],夏亚峰[2]

(1. 东莞理工学院计算机学院,广东 东莞　523808;2. 兰州理工大学理学院,甘肃 兰州　730050)

摘要:考虑保费、理赔额与模糊利率之间存在隶属函数,建立了部分初始资金进行投资的相对模糊利率风险模型,得到了该模型最终破产概率的一般表达式和破产概率的上界. 该模型符合保险公司的实际运营情况,可为保险公司有效控制破产风险提供理论依据.

关键词:隶属函数;模糊利率;破产概率;调节系数

中图分类号:O 211.67　　文献标志码:A　　DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2016.04.03

0　引言

风险理论是近代数学的一个重要分支,是目前精算界、数学界研究的热点课题之一. 文献[1]介绍了风险模型的概念,建立了带干扰的经典风险模型. 随着保险公司规模的不断扩大,经营险种不断增加,许多学者对保险公司的风险模型进行了推广,并得到了一些有关破产概率的结果. 例如,在保险风险模型的进一步研究中,文献[2]对风险模型的破产概率和基本性质进行了研究,文献[3-7]对带干扰项因素的影响进行了研究,文献[8-10]对再保险因素的影响进行了研究,文献[11-13]对利率因素的影响进行了研究,文献[14-16]对多险种因素的影响进行了研究. 但是,在前述研究和经典 Poisson 风险模型的研究中,保费到达过程与索赔过程是独立的,保费率为正常数. 关于模糊利率对保险公司风险模型的影响,目前研究较少,文献[17]虽然将模糊随机利率引入到小额贷款风险模型的研究中,并初步建立了小额贷款模糊随机利率模型,但未考虑保费、理赔额与模糊利率之间的隶属关系. 本文考虑保费、理赔额均为与模糊利率有关的随机变量,且保费、理赔额与模糊利率之间存在一定的隶属关系,假设保单到达数、理赔次数分别服从强度为 λ_1、λ_2 的 Poisson 分布,并考虑部分初始资金进行投资,建立复合 Poisson 风险过程的风险模型,给出其最终破产概率的一般表达式及破产概率的上界.

1　模型的建立

在概率空间(Ω,F,P)上,设保险公司的盈余过程[8]为

$$U(t)=(u-C)+C(1+th)+\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k\xi_k-\sum_{k=1}^{M(t)}X_k\gamma_k+\delta W(t), \tag{1}$$

其中 u 为保险公司的初始资金,C 为根据初始资金而设定用于投资的基金,h 为单位时间的投资收益. 假设时间$[0,t]$内的保费次数$\{N(t):t\geqslant 0\}$是参数为 λ_1 的 Poisson 过程,保费$\{Y_k:k\geqslant 1\}$是与模糊利率有关的随机变量,ξ_n 表示保费 Y_n 与利率 I_n 的隶属函数,记为 $\xi_n(Y_n,I_n)=1-\mathrm{e}^{-I_n^{\alpha}/Y_n^{\beta}}$;时间$[0,t]$内的理赔次数$\{M(t):t>0\}$是参数为 λ_2 的 Poisson 过程,理赔额$\{X_k:k\geqslant 1\}$是与模糊利率有关的随机变量,γ_n 表示理赔额 X_n 与利率 I_n 的隶属函数,记为 $\gamma_n(X_n,I_n)=1-\mathrm{e}^{-I_n^{\alpha}/X_n^{\beta}}$;干扰项$\{W(t):t\geqslant 0\}$是布朗运动. $R_k=Y_k\xi_k$ 表示第 k 次的保费额,$S_k=X_k\gamma_k$ 表示第 k 次的理赔额,记 $\mu_k^{(1)}=E[R_k]$,$\mu_k^{(2)}=E[S_k]$. $\{M(t):t>0\}$,$\{Y_k:k\geqslant 1\}$,$\{N(t):t>0\}$,$\{X_k:k\geqslant 1\}$,$\{W(t):t\geqslant 0\}$是相互独立的.

2　盈余过程的相关性质

盈余过程(1)等价于

$$U(t)=(u-C)+C(1+th)+\sum_{k=1}^{N(t)}R_k-$$

收稿日期:2016-04-20

基金项目:广东省科技计划课题(2012B010100044)和东莞市高等院校科研机构科技计划(2012108102031)资助项目.

作者简介:牛银菊(1965-),女,甘肃甘谷人,副教授,主要从事数学方法及计算机技术的应用研究.

$\sum_{k=1}^{M(t)} S_k + \delta W(t)$，　　(2)

其可化简为

$$U(t) = u + Cth + \sum_{k=1}^{N(t)} R_k - \sum_{k=1}^{M(t)} S_k + \delta W(t). \quad (3)$$

性质 1　对盈余过程(2)，有

$E[U(t)] = u + Cth + (\lambda_1\mu_k^{(1)} - \lambda_2\mu_k^{(2)})t$，

$\mathrm{Var}[U(t)] = [\lambda_1(\mu_k^{(1)})^2 + \lambda_1\sigma_1^2 + \lambda_2(\mu_k^{(2)})^2 + \lambda_2\sigma_2^2]t.$

证　$E[U(t)] = u + Cth + E[N(t)]E[R_k] - E[M(t)]E[S_k] = u + Cth + (\lambda_1\mu_k^{(1)} - \lambda_2\mu_k^{(2)})t$，

$\mathrm{Var}[U(t)] = \mathrm{Var}[u + Cth + \sum_{k=1}^{N(t)} R_k - \sum_{k=1}^{M(t)} S_k + \delta W(t)] = \mathrm{Var}(\sum_{k=1}^{N(t)} R_k - \sum_{k=1}^{M(t)} S_k) = E^2[R_k]\mathrm{Var}[N(t)] + E[N(t)]\mathrm{Var}[R_k] + E^2[S_k]\mathrm{Var}[M(t)] + E[M(t)]\mathrm{Var}[S_k] = [\lambda_1(\mu_k^{(1)})^2 + \lambda_1\sigma_1^2 + \lambda_2(\mu_k^{(2)})^2 + \lambda_2\sigma_2^2]t.$

为了使保险公司能够正常经营，单位时间内保费的收入应该超过索赔额的支出. 即 $\lambda_1\mu_k^{(1)} > \lambda_2\mu_k^{(2)}$，称 $\rho = 1 - \lambda_1\mu_k^{(1)}/\lambda_2\mu_k^{(2)}$ 为相对安全系数.

性质 2　对于再保险带干扰的盈余过程，有 $E[e^{-rU(t)}] = e^{-ru+tg(r)}$. 存在 $g(r)$ 满足

$$E[e^{-rC(t)}] = e^{tg(r)}. \quad (4)$$

证　由(3)式可知，

$E[e^{-rU(t)}] = E\{\exp[-r(u + Cth + \sum_{k=1}^{N(t)} R_k - \sum_{k=1}^{M(t)} S_k + \delta W(t))]\} = e^{-ru}E[\exp(-rCth)]E[\exp(-r\sum_{k=1}^{M(t)} R_k)]E[\exp(r\sum_{k=1}^{N(t)} S_k)] \cdot E[\exp(-r\delta W(t))] = e^{-ru}\exp\{t[-rCh + \lambda_1(M_{R_k}(-r) - 1) + \lambda_2(M_{S_k}(r) - 1) + r^2\delta^2/2]\}$，

$$g(r) = -rCh + \lambda_1(M_{R_k}(-r) - 1) + \lambda_2(M_{S_k}(r) - 1) + r^2\delta^2/2. \quad (5)$$

因此，(4)式得证.

定理 1　对于(5)式，方程 $g(r) = 0$ 在 $r > 0$ 内存在唯一正解 $r = R$.

证　由(5)式知，$g'(r) = -Ch + \lambda_1 E(-R_k \cdot e^{-rR_k}) + \lambda_2 E(S_k e^{rS_k}) + r\delta^2$，则

$$g'(0) = -Ch + \lambda_2\mu_k^{(2)} - \lambda_1\mu_k^{(1)} < 0,$$

又因为 $g''(0) > 0$，故曲线 $g(r)$ 在 $r > 0$ 内是下凹的，这表明只有当理赔额 S_k 以正概率取足够大的值时，才有 $g'(r) > 0$，即 $g(r)$ 在 $r > 0$ 内有唯一极小点，故 $g(r) = 0$ 存在唯一正根 R，称 R 为调节系数.

3　风险模型的破产概率

记破产时刻为 $T_u = \inf\{t \geqslant 0 \mid U(t) < 0, U(0) = u\}$，破产概率为

$\psi(u) = P\{U(t) < 0, \exists t \in (0,1] \mid U(0) = u\} = P\{T_u < \infty \mid U(0) = u\}$.

定理 2　$\forall u \geqslant 0$，有

$$\psi(u) = e^{-Ru}/E[\exp(-RU(T)) \mid T < \infty].$$

证　令 $A(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} R_k$，$B(t) = \sum_{k=1}^{M(t)} S_k$，取 $r = R$，由性质 2 与定理 1 知，$E[e^{-rU(t)}] = e^{-Ru}$.

又因为

$$E[e^{-rU(t)}] = E[e^{-rU(t)} \mid T < t]P\{T < t\} + E[e^{-rU(t)} \mid T \geqslant t]P\{T \geqslant t\}, \quad (6)$$

其中 $U(t) = U(T) + U(t) - U(T) = U(T) + (A(t) - A(T)) - (B(t) - B(T))$. 给定 T，当 $T < t$ 时，$A(t) - A(T)$，$B(t) - B(T)$ 和 $U(T)$ 是相互独立的，且 $A(t) - A(T)$ 服从参数为 $\lambda_1(t - T)$ 的复合泊松分布，$B(t) - B(T)$ 服从参数为 $\lambda_2(t - T)$ 的复合泊松分布. 选取 $r = R$，故(6)式为

$$E[e^{-RU(T)}] = E[e^{-RU(t)} \mid T < t]P\{T < t\} + E[e^{-RU(t)} \mid T \geqslant t]P\{T \geqslant t\}. \quad (7)$$

令 $t \to \infty$，(7)式右端第 1 项变为 $E[e^{-RU(t)} \mid T < \infty]\psi(u)$. 下证明当 $t \to \infty$ 时(7)式右端第 2 项趋于 0.

令 $\alpha = Ch + \lambda_1\mu_k^{(1)} - \lambda_2\mu_k^{(2)}$，

$\beta^2 = \lambda_1(\mu_k^{(1)})^2 + \lambda_1\sigma_1^2 + \lambda_2(\mu_k^{(2)})^2 + \lambda_2\sigma_2^2$，

$Q(t) = u + Cht + \alpha t - \beta t^{2/3}$.

由于 $Ch + \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2' > \lambda_1\mu_1' + \lambda_2\mu_2$，则当 $t \to \infty$ 时，$Q(t) \to +\infty$ 因此，

$E[e^{-RU(t)} \mid T \geqslant t]P\{T \geqslant t\} = E[e^{-RU(t)} \mid T \geqslant t, 0 \leqslant U(t) \leqslant Q(t)]P\{T \geqslant t, 0 \leqslant U(t) \leqslant Q(t)\} + E[e^{-RU(t)} \mid T \geqslant t, U(t) > Q(t)]P\{T \geqslant t, U(t) > Q(t)\} \leqslant P\{0 \leqslant U(t) \leqslant Q(t)\} + e^{-RQ(t)}$.

由契比雪夫不等式得

$$P\{0 \leqslant U(t) \leqslant Q(t)\} = P\{0 \leqslant U(t) \leqslant E[U(t)] - \beta t^{2/3}\} \leqslant P\{|U(t) - E[U(t)]| \geqslant \beta t^{2/3}\} \leqslant \mathrm{Var}[U(t)]/(\beta^2 t^{4/3}) = t^{-1/3}, \quad (8)$$

当 $t \to \infty$ 时(8)式右端趋于 0. 于是 $e^{-Ru} = E[e^{-RU(t)} \mid T < \infty]\psi(u)$，即

$$\psi(u) = e^{-Ru}/E[\exp(-RU(T)) \mid T < \infty].$$

推论 1 $\psi(u) < e^{-Ru}$.

证 当 $T < \infty$ 时,$U(T) < 0$,因此
$$E[e^{-RU(t)} | T < \infty] > 1,$$
则由定理 2 有 $\psi(u) < e^{-Ru}$.

4 参考文献

[1] Dufresne F,Gerber H U. Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion [J]. Insurance: Mathematics and Economics,1991,10(1):51-59.

[2] Gerber H U,Elias S W. On the time value of ruin [J]. North American Acturial Journal,1998,2(1):48-72.

[3] 夏亚峰,顾群. 带投资和干扰项的相依风险模型 [J]. 甘肃科学学报,2010,22(1):122-125.

[4] 董英华,张汉君. 带干扰的双 Poisson 风险模型的破产概率 [J]. 数学理论与应用,2003,23(1):98-101.

[5] 于文广,黄玉娟. 干扰条件下的一个破产模型的改进 [J]. 江南大学学报:自然科学版,2008,7(1):118-121.

[6] 张莉莉,李志民,耿金辉. 保费再投资下带干扰的 COX 风险模型的破产概率 [J]. 数学理论与应用,2014,34(4):88-92.

[7] 高明美,孙浩,刘喜华. 带干扰和投资的双二项风险模型的破产概率 [J]. 统计与决策,2015(22):22-24.

[8] 顾群. 基于相依和再保险风险模型问题的研究 [D]. 兰州:兰州理工大学,2010.

[9] 王丙参,魏艳华,戴宁. 停止损失再保险与风险模型的有限时间破产概率 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2013,37(2):206-209.

[10] 牛银菊,罗永丽,夏亚峰. 带投资组合和超额赔款的再保险双 Cox 风险模型 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2014,38(5):539-542.

[11] 刘丹. 常利率下带干扰的离散风险模型的研究 [D]. 锦州:渤海大学,2013.

[12] 牛银菊,邓丽,马崇武. 常利率下带投资的多险种风险模型的破产概率 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2015,39(3):286-289.

[13] 邓皓天. 常利率下带投资和干扰的再保险风险模型研究 [J]. 时代金融,2016(3):229-230.

[14] 张相虎,边平勇. 带干扰的多险种风险模型的破产概率 [J]. 经济数学,2007,24(2):130-133.

[15] 蒋兰青,施齐嫣. 带投资和干扰的相依多险种风险模型的破产概率 [J]. 福州大学学报:自然科学版,2012,40(1):26-30.

[16] 于文广. 复合广义齐次 Poisson 过程的多险种破产概率 [J]. 应用数学与计算数学学报,2003,17(2):63-69.

[17] 刁伟. 基于模糊随机利率的小额贷款风险模型研究 [J]. 北方经贸 2014(4):178-179.

The Risk Model with Investment under Fuzzy Rate of Interest

NIU Yinju[1],GU Qun[2],MA Chongwu[1],XIA Yafeng[2]

(1. Computer College,Dongguan University of Technology,Dongguan Guangdong 523808,China;
2. School of Science,Lanzhou University of Technology,Lanzhou Gansu 730050,China)

Abstract: No matter premium size and fuzzy rate of interest or claim size and fuzzy rate of interest,there are some membership functions. Based on these conditions,a risk model of first part capital investment under fuzzy rate of interest is set up. The formula of ultimate ruin probability and the upper bound of ruin probability of this model are obtained. The model is consistent with the actual operation of the insurance company and can be used as a theoretical basis for the effective control of the bankruptcy risk of insurance companies.

Key words: membership function; fuzzy rate of interest; ruin probability; adjustment coefficient

(责任编辑:曾剑锋)