文章编号:1000-5862(2016)06-0603-05

一种新的 4 阶偏微分方程图像处理方法

胡 彬[1],邱淑芳[1],杨志辉[1],袁邵祎[2]
(1. 东华理工大学理学院,江西 南昌 330013;2. 东北大学秦皇岛分校控制工程学院,河北 秦皇岛 066004)

摘要:提出了一种新的 4 阶偏微分方程去噪模型,与已有 4 阶偏微分方程模型、各向异性扩散模型、各向异性中值扩散模型和形态学扩散去噪模型相比较,该模型有效地权衡了噪声平滑效果和边缘保持,并通过数值算例验证了该模型的优越性.

关键词:图像去噪;各向异性扩散;形态学扩散去噪;4 阶偏微分方程
中图分类号:O 241.8;O 241.6 文献标志码:A DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2016.06.12

0 引言

图像去噪是图像处理和机器视觉领域的一个基本问题,具有大量的应用.目前常用的图像去噪模型有各向异性扩散模型、各向异性中值扩散模型和形态学扩散去噪模型[1-3].如各向异性扩散模型是利用 2 阶偏微分方程平衡噪声平滑和边缘保持,但该方法使得处理的图像具有块状效应.这一效应在视觉上很难令人满意,并且很可能使得计算机视觉系统错误地将图像平滑区域的块状边缘当成图像边缘来处理.为此有人提出了用 4 阶偏微分方程模型来权衡噪声平滑效果和边缘保持.但是当图像具有大量噪声时,现有的 4 阶偏微分方程不能有效地平滑噪声,从而使得图像边缘变得模糊.为了克服这一缺陷,本文提出了一种新的 4 阶偏微分方程去噪模型.新模型的实验结果表明比已有的 4 阶偏微分方程模型、各向异性扩散模型、各向异性中值扩散模型和形态学扩散去噪模型有很大的改进.

1 偏微分方程扩散模型

2 阶偏微分方程去噪的主要缺陷是出现“块状效应”.先介绍 2 阶偏微分扩散模型产生块状效应的原因.

假设 u 为图像的灰度函数,t 为时间,且 $g(\cdot)$ 为扩散系数,文献[1]的各向异性扩散模型为

$$\partial u/\partial t = \mathrm{div}(g|\nabla u|)\nabla u,$$

其相应的能量泛函模型为

$$E(u) = \int_{\Omega} f(|\nabla u|)\,\mathrm{d}\Omega, \tag{1}$$

其中 Ω 是图像定义域,$f(\cdot) \geqslant 0$ 是关于扩散系数的增函数,令

$$g(s) = f'(s)/s,$$

各向异性扩散可以看作是极小化能量泛函的能量消散过程.由(1)式知,去噪图像是能量泛函的全局极小化.

由上述分析可知,若没有向后扩散则水平集图像是能量泛函唯一的极小化图像.所以各向异性扩散将会向着水平集函数的方向演化.又因为各向异性扩散在图像平滑区域扩散速度较非平滑区域快.所以尽管所有的块最后融合成一幅水平图像,块将会出现在早期的扩散中.

综上,可以应用 4 阶偏微分方程去噪模型来避免块状效应并且权衡噪声平滑和边缘保持.但是当图像噪声严重时,4 阶偏微分方程不能有效去噪,并且会使得图像边缘模糊.所以本文提出一种新的 4 阶 PDE 模型来克服上面提到的去噪缺陷,并通过数值算法验证了新模型的有效性.关于 4 阶偏微分方程的推导,可以参见文献[4].

2 偏微分方程模型

首先考虑下面定义在 Ω 上的连续函数空间的泛函

$$E(u) = \int_{\Omega} f(|\nabla^2 u|)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{2}$$

其中∇^2为 Laplacian-算子,$f(\cdot)$ 为非负的增函数,即 $f(\cdot) \geqslant 0, f' > 0$.于是,泛函为 1 个关于图像平滑程

收稿日期:2016-10-10
基金项目:国家自然科学基金(11561003)和江西省教育厅科技计划课题(GJJ14469)资助项目.
作者简介:胡 彬(1982-),女,江西南丰人,讲师,主要从事数学物理方程反问题理论及计算研究.

度的增函数,这一平滑程度由 $|\nabla^2 u|$ 度量. 因此,最小化这一能量泛函等价于平滑图像. 通过极小化能量泛函,可以得到梯度下降过程[4]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\nabla^2\left[f'(|\nabla^2 u|)\frac{\nabla^2 u}{|\nabla^2 u|}\right]=-\nabla^2\left[g(|\nabla^2 u|)\nabla^2 u\right],$$

其中初始条件为带噪声的原始图像. 当 $t\to\infty$时,可以得到解. 但是为了恰当地权衡噪声平滑和边缘保持程度,时间演化过程将会提前停止. 相应的 4 阶扩散方程和它的特点的讨论参见文献[5].

考虑一个平面函数图像,进一步可以看到一个平面图像是能量函数 $E(u)$ 的全局极小化. 由于 $f(|\nabla^2 u|)$ 的非负性,$E(u)$ 是有界的,并且 $E(u)\geqslant 0$. 因为 $f(|\nabla^2 u|)$ 是关于 $|\nabla^2 u|$ 的增函数,它的全局极小值处 $|\nabla^2 u|=0$. 所以,全局极小值处有

$$|\nabla^2 u|\equiv 0,(x,y)\in\Omega. \tag{3}$$

平面图像显然满足方程(3),所以,它是 $E(u)$ 的全局极小化. 如果 $f(\cdot)$ 为凸函数,那么平面图像是 $E(u)$ 仅有的全局极小化,也就是说,

$$f''(s)\geqslant 0,s>0. \tag{4}$$

而代价函数 $E(u)$ 在(4)式的条件下是凸的. 具体证明如下:

假设 u_1,u_2 为定义在 Ω 上的 2 个图像,$u_1\neq u_2$,则 $\forall\lambda\in(0,1)$,由 Minkowski 不等式[6] 得

$$|\nabla^2[\lambda u_1+(1-\lambda)u_2]|\leqslant\lambda|\nabla^2 u_1|+(1-\lambda)|\nabla^2 u_2|.$$

因为 $f(\cdot)$ 是严格递增的,所以由上式得 $f(|\nabla^2[\lambda u_1+(1-\lambda)u_2]|)\leqslant f(\lambda|\nabla^2 u_1|+(1-\lambda)|\nabla^2 u_2|)$,则 $f(\cdot)$ 的凸性为

$$f(\lambda|\nabla^2 u_1|+(1-\lambda)|\nabla^2 u_2|)\leqslant\lambda f(|\nabla^2 u_1|)+(1-\lambda)f(|\nabla^2 u_2|).$$

因此

$$f(|\nabla^2[\lambda u_1+(1-\lambda)u_2]|)\leqslant\lambda f(|\nabla^2 u_1|)+(1-\lambda)f(|\nabla^2 u_2|). \tag{5}$$

对(5)式两边积分得

$$\int_\Omega f(|\nabla^2[\lambda u_1+(1-\lambda)u_2]|)\,\mathrm{d}\Omega\leqslant\Omega\int_\lambda f(|\nabla^2 u_1|)+(1-\lambda)\int_\Omega f(|\nabla^2 u_2|),$$

即 $E(\lambda u_1(1-\lambda)u_2)\leqslant\lambda E(u_1)+(1-\lambda)E(u_2)$. 因此,代价函数 $E(u)$ 是凸的.

上面提到的 4 阶偏微分方程模型,将 1 个观察图像演化为 1 个分段常函数图像. 这个分段常函数图像是对自然真实图像的较好近似. 但是它留下了大的和小的孤立的黑白噪声点,这些噪声点会被当作图像灰度值相比邻近像素点很大或者很小的真实图像的灰度值. 因为图像灰度函数的 Laplacian 在噪声部分很大,所以为了保持边缘,函数 $f(\cdot)$ 在这些噪声点处迅速变小,并且函数 $g(\cdot)$ 在斑点像素部分值较小. 那么,(2)式的右端将会变得很小. 因此,斑点噪声最后没有被改变. 所以为了克服此缺陷,本文提出了新的 4 阶偏微分方程模型

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\nabla^2\left[g(|\nabla^2 u|)\nabla^2 u\right]-\lambda(u-I), \tag{6}$$

方程右端第 1 项使得噪声平滑时保持边缘,并且避免块状效应,这里 $g(s)=1/[1+(s/k)^2]$ 为可选项,用于保持图像边缘,k 是可选的尺度参数; 方程右端第 2 项要求平滑后的图像尽量接近原始图像,该项可以去除大量噪声,并且完整地保持边缘,其中 λ 是具体的权重参数.

3 数值算法

3.1 算法

微分方程(6)可以用一个迭代过程数值求解. 假设时间步长为 Δt,空间网格步长为 h,可得时间和空间坐标为

$$t=n\Delta t,n=0,1,\cdots,x=ih,i=0,1,\cdots,I,$$
$$y=jh,j=0,1,\cdots,J,$$

其中 $Ih\times Jh$ 是图像定义域的大小. 可以通过中心差分格式

$$\nabla^2 u_{i,j}^n=\frac{u_{i+1,j}^n+u_{i-1,j}^n+u_{i,j+1}^n+u_{i,j-1}^n-4u_{i,j}^n}{h^2}$$

得到图像灰度的 Laplacian 格式,对称边界条件为

$$u_{-1,j}^n=u_{0,j}^n,u_{i+1,j}^n=u_{i,j}^n,i=0,1,\cdots,I,$$
$$u_{i,-1}^n=u_{i,0}^n,u_{i,j+1}^n=u_{i,j}^n,j=0,1,\cdots,J.$$

定义 $f_1(\cdot)$ 为

$$f_1(\nabla^2 u)=f'(|\nabla^2 u|)\frac{\nabla^2 u}{|\nabla^2 u|}=g(|\nabla^2 u|)\nabla^2 u,$$

其中 $(f_1)_{i,j}^n=f_1(\nabla^2 u_{i,j}^n)$,则 $f_1(\cdot)$ 的 Laplacian 为

$$\nabla^2(f_1)_{i,j}^n=\left[(f_1)_{i+1,j}^n+(f_1)_{i-1,j}^n+(f_1)_{i,j-1}^n+(f_1)_{i,j+1}^n-4(f_1)_{i,j}^n\right]/h^2,$$

对称边界条件为

$$(f_1)_{-1,j}^n=(f_1)_{0,j}^n,(f_1)_{i+1,j}^n=(f_1)_{i,j}^n,i=0,1,\cdots,I,$$
$$(f_1)_{i,-1}^n=(f_1)_{i,0}^n,(f_1)_{i,j+1}^n=(f_1)_{i,j}^n,j=0,1,\cdots,J.$$

从而,微分方程(6)的数值近似为

$$u_{i,j}^{n+1}=u_{i,j}^n-\Delta t\nabla^2(f_1)_{i,j}^n-\lambda(u_{i,j}^n-u_{i,j}^0),$$

其中 $u_{i,j}^0$ 是被椒盐噪声污染的初始图像.

对于时间步长的选择,应该保证迭代的收敛性. 由于方程严重的非线性特点,最优的时间步长很难理论地得到,并且计算代价很高. 本文取时间步长为 0.25[4],设置阈值 $K=1.8$,并且 $h=1,\lambda=1.5$.

3.2　算数值迭代过程的收敛性

定理 1　假设 $u_0 \in L^2(\Omega)$，则存在唯一的函数 $u(x,y,t)$ 且 $u \in \psi^\infty([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$，在 $[0,T] \times \Omega$ 上有

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla^2(g(|\nabla^2 u|)\nabla^2 u) + \lambda(u - I) = 0,$$

在 $\Gamma \times [0,T]$ 上有 $\partial u/\partial n = 0, u(0) = u_0$.

该结论可以从分部意义上得到证明，且唯一的解 $u \in \psi_\infty([0,T] \times \hat{\Omega})$. 证明过程类似于文献 [7] 中的定理 2.1.

定理 2　设 $u_0 \in L^2(\Omega)$. 由 (E_n) 定义的序列 $(u^n)_n$，在 $[0,T]$ 上有

$$\frac{du^{n+1}}{dt}(t) + \nabla^2(g(|\nabla^2 u^n(t)|)\nabla^2 u_n(t)) + \lambda(u_n(t) - u_n(0)) = 0,$$

$$\frac{du^{n+1}}{dn}(t) = 0, u^{n+1}(0) = u_0,$$

$\forall u \in \psi([0,T];L^2(\Omega))$ 都收敛于定理 1 的 1 个强解.

证　令 $a^n = g(|\nabla^2 u^n|)$，由文献 [8]（定义 $\nabla G * u^n = \nabla^2 u^n$）知，$(E_n)$ 有唯一解 u^n. 显然在 $[0,T] \times \Omega$ 上有 $a^n \geq g(\|\nabla^2 u^0\|_{L^\infty(\Omega)})$.

下面证明 u^n 在 $\psi([0,T];L^2(\Omega))$ 中收敛到 u，u 为定理 1 中的强解. 由文献 [4] 中的定理 2.1 得

$$\frac{d}{dt}(\|u^{n+1}(t) - u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}) \leq$$

$$\frac{4c}{\theta}\|\nabla^2 u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\|u^n(t) - u(t)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

其中 C 是依赖于 g 和 u_0 的一个常数，θ 依赖于 g 和 $\|u_0\|_{L^2(\Omega)}$，并由定理 1 得

$$\|u^0(t) - u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_0, \forall t \in [0,T],$$

这里 C_0 是依赖于 g 和 u_0 的一个常数，则 $\forall t \in [0,T]$，有

$$\|u^1(t) - u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_0\int_{[0,T]} a(s)\,ds,$$

其中 $a(s) = 4C\|\nabla^2 u(s)\|^2_{L^2(\Omega)}/\theta$. 由此可以得到 $d\|u^2(t) - u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}/dt \leq C_0 a(t)\int_{[0,T]} a(s)\,ds$，

并且 $\|u^2(t) - u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_0\left(\int_{[0,T]} a(s)\,ds\right)^2/2$.

通过迭代可得

$$\|u^{n+1}(t) - u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_0}{(n+1)!}\left(\int_{[0,T]} a(s)\,ds\right)^{n+1}.$$

从而可以得到序列 $(u^n)_n$ 在 $\psi([0,T];L^2(\Omega))$ 中收敛于定理 1 的 1 个强解.

4　数值实验与结果比较

从图 1 可以看到，当图像噪声不是很大时，已有的 4 阶偏微分方程模型和新的 4 阶偏微分方程模型都可以有效地去除噪声，并且都可以避免块状效应. 但是由于 4 阶偏微分方程和 Laplacian 算子的属性，当图像噪声严重时，已有的 4 阶偏微分方程去噪模型都有很多噪声保留了下来，没有有效去除（见图 2(a)），并且图像中妇女的头部边缘也变得模糊，然而新模型对该边缘处理后完整地保留.

本文提出一种新的 4 阶偏微分方程模型克服了上面的缺陷. 从图 2(b) 可知，新模型不仅有效去噪，得到视觉上满意的效果，并且没有出现“块状效应”. 从表 1 可以看到，无论噪声是否严重，新模型处理结果的 S_{NR} 值较其他 4 阶偏微分方程模型大，尽管后者模型的 R_{MSE} 值较小. 所以新的 4 阶偏微分方程模型不仅有效去除了噪声，而且保留了图像的边缘. 此外，新模型处理后的图像的噪声也较少于其他 4 阶偏微分方程模型的处理效果.

这里 $S_{NR} = 10 \times \log 10 \times$

$$\frac{\sum_{i,j}\left[u_{i,j} - \frac{\sum_{i,j} u_{i,j}}{MN}\right]^2}{\sum_{i,j}\left[u_{i,j} - u_{orig,i,j} - \sum_{i,j}\frac{u_{i,j} - u_{orig,i,j}}{MN}\right]^2},$$

$$R_{MSE} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1,\cdots,M,j=1,\cdots,N}(u_{i,j} - u_{orig,i,j})^2}}{MN},$$

其中 $u_{orig,i,j}$ 为原始图像，MN 为图像大小.

表 1　图 1 与图 2 的 S_{NR} 和 R_{MSE} 比较

图 1 和图 2	S_{NR}	R_{MSE}
图 1(c)	3.480 0	0.181 7
图 2(a)	3.497 0	0.184 2
图 1(d)	5.631 6	0.258 2
图 2(b)	5.666 1	0.260 8

下面将比较新的 4 阶偏微分方程模型与各项异性扩散去噪模型、各项异性中值滤波模型、形态学各项异性扩散模型的去噪效果. 首先，从图 3 的处理结果来看，各项异性扩散、各项异性中值滤波和形态学各项异性扩散模型都使得去噪后的图像边缘变得模糊，特别是图像中女孩的肩部，并且这些模型去噪都存在块状效应. 但是新模型可以很好地平衡去噪和边缘保持（见图 3 女孩的肩部），并且可以有效避免块状效应；其次，从表 2 的 S_{NR} 值来看，新的 4 阶偏微分方程去噪模型的 S_{NR} 值较其他模型大. 也就是说，尽管模型去除了噪声，但是结果图像变得模糊了，特别是图像的边缘区域. 所以从结果来看，新的 4 阶偏微分方程模型的去噪效果显然优于其他模型.

(a)原始图像 (b)椒盐噪声的图像

(c)4阶偏微分方程处理结果 (d)新模型

图 1 对椒盐噪声去噪结果比较

(a)4阶偏微分方程模型处理结果 (b)新模型

图 2 对椒盐噪声去噪结果比较

表 2 图 3 的 S_{NR} 和 R_{MSE} 比较

图 3	S_{NR}	R_{MSE}
图 3(f)	4.952 0	0.293 8
图 3(c)	3.193 3	0.219 4
图 3(d)	3.195 4	0.099 6
图 3(e)	3.195 8	0.219 2

5 结论

目前，有诸多图像去噪模型，如文献[9]中的 2 阶偏微分方程模型，文献[10]中的 3 阶偏微分方程模型及文献[11-15]中的 4 阶偏微分方程模型等. 与已有 4 阶偏微分方程模型来寻求关于图像灰度函数 Laplacian 的绝对值的能量泛函一样，本文提出一种新的 4 阶偏微分方程去噪模型，通过权衡去噪程度和边缘保持来达到去噪效果. 与已有 4 阶偏微分方程模型比较，新模型增加了一个修复项来去除噪声，保持边缘，并证明了该模型数值迭代的收敛性.

(a)原始图像 (b) 盐椒噪声图像

(c)各项异性扩散去噪模型 (d)各项异性中值滤波模型

(e)形态学各项异性扩散 (f)新模型

图 3 去噪效果比较

6 参考文献

[1] Liu Xiaoyang, Lai Hangchin, Pericleous K A. A fourth-order partial differential equation denoising model with an adaptive relaxation method [J]. International Journal of Computer Mathematics, 2015, 92(3): 608-622.

[2] Wang Dehua, Gao Jinghuai. An improved noise removal model based on nonlinear fourth-order partial differential equations [J]. International Journal of Computer Mathematics, 2016, 93(6): 942-954.

[3] Segall C A, Acton S T. Morphological anisotropic diffusion [J]. IEEE International Conference on Image Processing, 1997, 3: 348-351.

[4] You Yuli, Kaveh M. Fourth-order partial differential equations for noise removal [J]. IEEE Trans On Image Processing, 2000, 9(10): 1723-1730.

[5] Bertozzi A L. The mathematics of moving contact lines in thin liquid films [J]. Notices AMS, 1998, 45(6/7): 689-

697.

[6] Kimia B,Tannenbaum A,Zucker S. On the evolution of curves via a function of curvature I [J]. Math Anal Applicant,1992,163: 438-458.

[7] Catt´e F,Lions P L,Morel J M,et al. Image selective smoothing and edge detectionly nonlinear diffusion [J]. SIAM J Numerical Analysis,1992,29(1): 182-193.

[8] Rudin W. Analysis fonctionnelle,th´eorie et applications [M]. Paris: Masson,1987.

[9] Chen Yumei,Vemuri B C,Wang Li. Image denoising and segmentation via nonlinear diffusion [J]. Computers and Mathematics with Applications,2000,39: 131-149.

[10] Bertalmio M,Sapiro G,Caselles V,et al. Image inpainting [C] // Proceedings of the 27th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, New York: ACM Press,Addison-Wesley Publishing Co,2000: 417-424.

[11] Zeng Weili,Lu Xiaobo,Tan Xianghua. A local structural adaptive partial differential equation for image denoising [J]. Multimedia Tools and Applications,2015,74(3): 743-757.

[12] Tudor Barbu. Nonlinear fourth-order hyperbolic PDE-based image restoration scheme [C] //The 5th IEEE International Conference on E-Health and Bioengineering,Romania: Lasi,2015: 19-21.

[13] Tudor Barbu. PDE-based restoration model using nonlinear second and fourth order diffusions [J]. Proceeding of the Romanian Academy,Series A,2015,16(2): 138-146.

[14] Perona P,Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion [J]. IEEE Trans On PAMI,1990,12(7): 629-639.

[15] Ling Jian,Bovik A C. Smoothing low-SNR molecular medical image [J]. IEEE Transactions on Medical imaging,2002,21(4): 377-384.

The Image Denoising by Fourth-Order Partial Differential Equations

HU Bin[1],QIU Shufang[1],YANG Zhihui[1],YUAN Shaoyi[2]

(1. School of Science,East China Institute of Technology,Nanchang Jiangxi 330013,China;
2. School of Control Engineering Northeastern University at Qinhuangdao,Qinhuangdao Hebei 066004,china)

Abstract: A new denoising model of four order partial differential equations which can be proved to be stable to overcome this deficiency is presented. A comparison among previous fourth-order differential equation,anisotropic diffusion,anisotropic median-diffusion and morpholocical anisotropic diffusion is drawn. The experimental results are also given.

Key words: image denoising; anisotropic diffusion; morphological anisotropic diffusion; fouth-order partial differential equations

(责任编辑: 曾剑锋)