

文章编号: 1000-5862(2016)06-0617-06

# 高阶相干光子扣除超叠加改善量子传输保真度

熊 雄<sup>1</sup> 汪志龙<sup>2</sup> 万国金<sup>1\*</sup>

(1. 南昌大学信息工程学院, 江西 南昌 330029; 2. 江西师范大学物理与通信电子学院, 江西 南昌 330022)

**摘要:** 利用光子扣除算符构成的相干光子超叠加操作作用于 2 个模压缩真空态, 引入一类非高斯量子态——高阶相干光子扣除超叠加单模压缩真空态. 通过导出该量子态的正规乘积形式, 推导了该量子态的归一化系数, 与 Legendre 多项式密切相关. 利用相干态的超完备关系和平移算符的正规乘积, 导出了态的特征函数的相干态表示, 进而解析导出了利用该量子态作为纠缠源实现相干态隐形传输的保真度. 研究结果表明: 当压缩参数相等时, 保真度可获得最大值. 对于奇数阶操作, 保真度比无叠价操作情况更差, 而对于偶数阶情况, 在一定的压缩参数范围内, 保真度优于无纠缠情况, 且保真度可优于经典的最高保真度  $1/2$ , 同时保真度可以随  $m$  的增加而改善.

**关键词:** 高阶相干光子超叠加; 非高斯量子态; 隐形传输; 相干态; 保真度

**中图分类号:** TN 918 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2016.06.15

## 0 引言

量子纠缠是实现量子计算与量子通信的重要资源. 它在诸如量子隐形传输、密集编码、量子克隆等方面起着重要作用<sup>[1]</sup>. 其中, 量子隐形传输在量子态制备、量子信息处理中起着不可或缺的作用. 通常, 人们使用双模压缩真空态作为纠缠源实现量子态的隐形传输. 然而, 由于实验上的困难, 人们很难获取高纠缠度的纠缠态, 从而导致了隐形传输保真度较低. 为了满足量子信息处理通信的要求, 一般而言需要高纠缠度的纠缠源.

由于局域的高斯操作和经典通信并不能改善纠缠态的纠缠度<sup>[2]</sup>, 因此, 人们提出了一类非高斯操作——光子扣除 ( $a$ ) 与增加 ( $a^+$ ) 等来实现纠缠度、量子隐形传输保真度的改善<sup>[3-9]</sup>. 比如, H. Nha 等<sup>[5]</sup>提出了光子扣除与光子增加相干叠加操作 ( $ta^+ + sa$ ) 来实现非经典量子态的制备. 随后, 该超叠加操作被应用于双模压缩真空态上实现了双模压缩真空态纠缠度、以及量子隐形传输保真度的改善<sup>[6]</sup>. 最近, J. N. Wu 等<sup>[10]</sup>提出利用该超叠加操作作用于偶纠缠相干态上, 实现了该态在 EPR 关联、纠缠度、保真度等方面的改善.

除了上述提到的局域非高斯操作外, 非局域的

相干叠加操作也被提出, 如  $(a^+ + b^+) \rho + b$ , 以及  $a^2 + b^2$  和  $(a^+)^2 + (b^+)^2$  等<sup>[11-14]</sup>. S. Y. Lee 等利用 Hong-Ou-Mandel 干涉仪实现了二阶非局域操作  $(a^+)^2 + e^{i\theta}(b^+)^2$ , 并利用它实现了 NOON 纠缠态的制备以及连续变量纠缠度的改善<sup>[14]</sup>. 有研究表明<sup>[15-16]</sup>: 一个带有涡旋结构的量子态实际上也可以表述成光子增加非局域超叠加操作  $(a^+ - ib^+)$  作用于 2 个单模压缩态上得到. 此外, 高阶非局域操作  $(a^+ - ib^+)^m$  可以用来制备双模  $N$  光子路径纠缠态<sup>[12]</sup>. 这也表明, 高阶非高斯操作在量子纠缠态制备上的作用.

本文将高阶非局域光子扣除超叠加操作  $(\tau a + sb)^m$  作用于 2 个单模压缩真空态, 提出一类新的非高斯纠缠态——光子扣除超叠压缩真空态, 研究该纠缠态在量子隐形传输中的应用, 以期获得叠加操作  $(\tau a + sb)^m$  对保真度的改善, 以及保真度与相关参数的关系. 研究结果表明: 当压缩参数相等时, 保真度可获得最大值; 对于奇数阶操作, 保真度比无叠价操作情况更差; 而对于偶数阶情况, 在一定的压缩参数范围内, 保真度优于无纠缠情况, 且保真度可优于经典的最高保真度  $1/2$ , 同时保真度可以随  $m$  的增加而改善. 这些结果与高阶非局域光子增加超叠加操作  $(\tau a^+ + sb^+)^m$  作用于 2 个单模压缩真空态情况写成明显对比, 即对于任意参数情况后

收稿日期: 2016-06-19

基金项目: 国家自然科学基金(11664017)和江西省科技厅课题(2015BAB212006)资助项目.

通信作者: 万国金(1955-), 男, 江西南昌人, 教授, 主要从事信号检测与处理、信息安全、射频微波技术及应用的研究.

者不存在保真度改善的情况.

## 1 高阶相干光子超叠加单模压缩真空态及其归一化

首先,引入高阶相干光子超叠加单模压缩真空态.理论上,单模压缩真空态可以将单模压缩算符作用于真空态上获得,即

$$S_1(r_1) |0\rangle_a = \exp\left(\frac{r_1}{2}(a^2 - (a^+)^2)\right) |0\rangle_a,$$

$$S_2(r_2) |0\rangle_b = \exp\left(\frac{r_2}{2}(b^2 - (b^+)^2)\right) |0\rangle_b,$$

其中  $S_j(r_j) = \exp\left(\frac{r_j}{2}(k^2 - (k^+)^2)\right)$ ,  $(j = 1, 2)$ ,  $k = a, b$  为单模压缩算符,  $r_j$  为压缩参数,  $a^+, b^+$  ( $a, b$ ) 分别为 2 个模对应的 Bose 子产生和湮灭算符,并满足对易关系  $[a, a^+] = [b, b^+] = 1$ . 为方便,这里只考虑了压缩参数为实数的情况. 将光子扣除的相干叠加操作  $(\tau a + sb)$  作用于 2 个单模压缩真空态上,可获得一类非高斯量子态,即

$$|\Psi\rangle = N_m (\tau a + sb)^m S_1 S_2 |00\rangle, \quad (1)$$

其中  $N_m$  为归一化系数,它在讨论量子态统计性质时是必须知道的,可以通过  $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$  导出.

为了推导归一化系数  $N_m$ ,首先考察量子态  $|\Psi\rangle$  对应的密度算符  $\rho_{23} \equiv |\Psi\rangle\langle\Psi|$  的正规乘积形式. 利用单模压缩算符  $S_j(r_j)$  的正规乘积形式<sup>[17]</sup>,即

$$S_1(r_1) = \exp\left(-\frac{(a^+)^2}{2}\tanh r_1\right) \cdot$$

$$\exp\left(\left(a^+ a + \frac{1}{2}\right)\ln \operatorname{sech} r_1\right) \exp\left(\frac{a^2}{2}\tanh r_1\right),$$

$$S_2(r_2) = \exp\left(-\frac{(b^+)^2}{2}\tanh r_2\right) \cdot$$

$$\exp\left(\left(b^+ b + \frac{1}{2}\right)\ln \operatorname{sech} r_2\right) \exp\left(\frac{b^2}{2}\tanh r_2\right),$$

可以将单模压缩真空态改写成如下形式

$$S_1 S_2 |00\rangle = \operatorname{sech}^{1/2} r_1 \operatorname{sech}^{1/2} r_2 \cdot$$

$$\exp\left(-\frac{(a^+)^2}{2}\tanh r_1 - \frac{(b^+)^2}{2}\tanh r_2\right) |00\rangle. \quad (2)$$

另一方面,将高阶相干光子扣除叠加操作改写成微分形式,例如

$$(\tau a + sb)^m = \frac{\partial^m}{\partial t^m} e^{(\tau a + sb)t} \Big|_{t=0}, \quad (3)$$

因此,利用式(2)式和(3)式,可将式(2)式进一步写成

$$|\Psi\rangle = \bar{N}_m \frac{\partial^m}{\partial t^m} e^{(\tau a + sb)t} e^{-\frac{(a^+)^2}{2}\tanh r_1 - \frac{(b^+)^2}{2}\tanh r_2} |00\rangle \Big|_{t=t'=0}, \quad (4)$$

这里,为方便记  $\bar{N}_m = N_m \operatorname{sech}^{1/2} r_1 \operatorname{sech}^{1/2} r_2$ . 利用算符恒等式  $e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A, B]/2}$  和  $e^{\lambda a} a^+ e^{-\lambda a} = a^+ + \lambda$ , 这里需要注意第 1 个算符等式只在条件  $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$  满足时才能使用<sup>[18]</sup>, 则可将(4)式改写成

$$|\Psi\rangle = \bar{N}_m \frac{\partial^m}{\partial t^m} \exp\left(-\frac{t^2}{2}(\tau^2 \tanh r_1 + s^2 \tanh r_2)\right) \cdot$$

$$\exp(-t(\tau a^+ \tanh r_1 + sb^+ \tanh r_2)) \cdot$$

$$\exp\left(-\frac{(a^+)^2}{2}\tanh r_1 - \frac{(b^+)^2}{2}\tanh r_2\right) |00\rangle \Big|_{t=t'=0}. \quad (5)$$

一方面,利用单模压缩真空态的表达式(2),可进一步将(5)式改为

$$|\Psi\rangle = N_m \frac{\partial^m}{\partial t^m} \exp\left(-\frac{t^2}{2}(\tau^2 \tanh r_1 + s^2 \tanh r_2)\right) \cdot$$

$$\exp(-t(\tau a^+ \tanh r_1 + sb^+ \tanh r_2)) S_1 S_2 |00\rangle, \quad (6)$$

有趣的是,注意到单变量厄密多项式公式的母函数形式,即

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} (\exp(At + Bt^2))_{t=0} = (i\sqrt{B})^m H_m\left(\frac{A}{2i\sqrt{B}}\right), \quad (7)$$

则可将式(6)进一步改写成

$$|\Psi\rangle = N_m (i\sqrt{B_0})^m H_m\left[\hat{A}_0/(2i\sqrt{B_0})\right] S_1 S_2 |00\rangle,$$

其中  $\hat{A}_0 = -(\tau a^+ \tanh r_1 + sb^+ \tanh r_2)$ ,  $B_0 = -(\tau^2 \tanh r_1 + s^2 \tanh r_2)/2$ .

由(7)式容易看出,光子扣除叠加单模压缩真空态实际上看以看成单变量厄密多项式激发超叠加压缩真空态.

另一方面,利用表达式(5)态矢量  $|\Psi\rangle$  在相干态表象  $\langle\alpha|\beta|$  下的波函数可以表示成

$$\langle\alpha|\beta|\Psi\rangle = \bar{N}_m \frac{\partial^m}{\partial t^m} \cdot$$

$$\exp\left(-\frac{t^2}{2}(\tau^2 \tanh r_1 + s^2 \tanh r_2)\right) \cdot$$

$$\exp(-t(\tau \alpha^* \tanh r_1 + s \beta^* \tanh r_2)) \cdot$$

$$\exp\left(-\frac{(\alpha^*)^2}{2}\tanh r_1 - \frac{(\beta^*)^2}{2}\tanh r_2 - \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)\right) \Big|_{t=0}. \quad (8)$$

利用相干态的完备性关系

$$\int \frac{d^2\alpha d^2\beta}{\pi^2} |\alpha\rangle\langle\alpha| |\beta\rangle\langle\beta| = 1, \quad (9)$$

则非高斯量子态  $|\Psi\rangle$  的归一化系数可以由下式计算,即  $N_m^{-2} = N_m^{-2} \int \frac{d^2\alpha d^2\beta}{\pi^2} |\langle\alpha|\beta|\Psi\rangle|^2$ , 利用积分公式<sup>[17]</sup>

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} \exp(\zeta |z|^2 + \xi z + \eta z^* + f z^2 + (g z^*)^2) = \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 4fg}} \exp\left(-\frac{\zeta \xi \eta + \xi^2 g + \eta^2 f}{\zeta^2 - 4fg}\right), \quad (10)$$

最终可将  $N_m^{-2}$  表示成

$$N_m^{-2} = \frac{\partial^{2m}}{\partial t^m \partial \tau^m} \exp(-A(t^2 + \tau^2) + Btt') \Big|_{t=t'=0}, \quad (11)$$

其中  $A = -\frac{1}{4}(s^2 \sinh(2r_2) + \tau^2 \sinh(2r_1))$ ,  $B = \tau^2 \sinh^2 r_1 + s^2 \sinh^2 r_2$ .

利用 Hu Liyun 等<sup>[19]</sup> 提出的新 Legendre 多项式母函数公式

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial t^m \partial \tau^m} \exp\left(-t^2 - \tau^2 + \frac{2x\tau t}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) \Big|_{\tau=s=0} = \frac{2^m m!}{(x^2 - 1)^{m/2}} P_m(x), \quad (12)$$

可将(11)式写出如下简洁的形式

$$N_m^{-2} = m! (B^2 - 4A^2)^m / 2P_m(B/\sqrt{B^2 - 4A^2}), \quad (13)$$

由此可见,归一化系数  $N_m^{-2}$  恰好与 Legendre 多项式  $P_m(x)$  相联系.(13)式就是任意阶双模相干光子扣除单模压缩真空态归一化系数的解析表达式,它对讨论量子态的纠缠等非经典特性是十分重要的.

## 2 特征函数的相干态表象及态 $|\Psi\rangle$ 的特征函数

引入特征函数的相干态表象及态  $|\Psi\rangle$  的特征函数. 根据特征函数的定义,任意双模量子态  $\rho_{1,2}$  的特征函数定义为

$$\chi(\alpha, \beta) = \text{tr}(D_1(\alpha) D_2(\beta) \rho_{1,2}), \quad (14)$$

其中  $D_1(\alpha) = \exp\{\alpha a^\dagger - \alpha^* a\}$ ,  $D_2(\beta) = \exp(\beta b^\dagger - \beta^* b)$  为模  $a, b$  对应的平移算符.

注意到,平移算符的反正规乘积形式如  $D_1(\alpha) = e^{|\alpha|^2/2} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger}$  和相干态的完备性关系(9)式,则平移算符在相干态表象下可表示成

$$D_1(\alpha) = \int \frac{d^2 z_1}{\pi} \exp\left(\frac{|\alpha|^2}{2} - \alpha^* z_1 + \alpha z_1^*\right) |z_1\rangle \langle z_1|,$$

则特征函数(14)在相干态表象下的表示为

$$\chi(\alpha, \beta) = e^{(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/2} \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{\pi^2} e^{\alpha z_1^* - \alpha^* z_1 - \beta^* z_2 + \beta z_2^*} \cdot \langle z_1, z_2 | \rho_{1,2} | z_1, z_2 \rangle = e^{(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/2} \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{\pi^2} e^{\alpha z_1^* - \alpha^* z_1 - \beta^* z_2 + \beta z_2^*} Q(z_1, z_2), \quad (15)$$

其中  $Q(z_1, z_2) \equiv \langle z_1, z_2 | \rho_{1,2} | z_1, z_2 \rangle$  为纠缠源  $\rho_{1,2}$  的  $Q$  函数. 可见,当  $\rho_{1,2}$  的正规乘积或  $\rho_{1,2}$  的  $Q$  函数

时,可以通过积分(15)式获得  $\rho_{1,2}$  的特征函数. 这也给出了一个计算特征函数的新途径.

当  $\rho_{1,2} = |\Psi\rangle \langle \Psi|$  利用(8)式其正规乘积或  $Q$  函数可以表示为

$$Q(z_1, z_2) = |\langle z_1, z_2 | \Psi \rangle|^2 = \bar{N}^2 \cdot \exp\left(-\frac{(z_1^*)^2 + z_1^2}{2} \tanh r_1 - \frac{(z_2^*)^2 + z_2^2}{2} \tanh r_2 - |z_1|^2 - |z_2|^2\right) \cdot \frac{\partial^{2m}}{\partial t^m \partial \tau^m} \exp\left(-\frac{t^2 + \tau^2}{2} (\tau^2 \tanh r_1 + s^2 \tanh r_2)\right) \cdot \exp(-t(\tau z_1^* \tanh r_1 + s^* z_2 \tanh r_2) - t'(\tau z_1 \tanh r_1 + s z_2 \tanh r_2)) \Big|_{t=t'=0}, \quad (16)$$

将(16)式代入(15)式并利用积分公式(10)式积分最终可得

$$\chi(\alpha, \beta) = \bar{N}^2 G \frac{\partial^{2m}}{\partial t^m \partial \tau^m} \cdot \exp(C(t^2 + \tau^2) + Dt + D^* t' + Ett') \Big|_{t=t'=0}, \quad (17)$$

其中

$$A_1 = 1 - \tanh^2 r_1, \quad B_1 = 1 - \tanh^2 r_2,$$

$$E = -\tau^2 \sinh^2 r_1 - s^2 \sinh^2 r_2,$$

$$G = \frac{1}{\sqrt{A_1 B_1}} \exp\left(-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 \cosh(2r_1) + |\beta|^2 \cosh(2r_2)) - \frac{1}{4}((\alpha^*)^2 + \alpha^2) \sinh(2r_1) + (\beta^{*2} + \beta^2) \sinh(2r_2)\right),$$

$$C = -\frac{1}{4}(\tau^2 \sinh(2r_1) + s^2 \sinh(2r_2)),$$

$$D = \tau(\alpha \sinh r_1 + \alpha^* \cosh r_1) \sinh r_1 +$$

$$s(\beta \sinh r_2 + \beta^* \cosh r_2) \sinh r_2.$$

为进一步获得(17)式的简洁表示,将(17)式中的  $tt'$  项按照指数展开,同时利用单变量厄密多项式的母函数关系<sup>[20]</sup>  $\frac{\partial^m}{\partial t^m} \exp\{Ct^2 + Dt\} \Big|_{t=0} =$

$$(i\sqrt{C})^m H_m\left(\frac{D}{2i\sqrt{C}}\right) = (-i\sqrt{C})^m H_m\left(-\frac{D}{2i\sqrt{C}}\right),$$
 可得

$$\chi(\alpha, \beta) = \bar{N}^2 G \sum_{l=0}^m \frac{(m!)^2 E^l C^{m-l}}{l! (m-l)!^2} \cdot H_{m-l}\left(\frac{D}{2i\sqrt{C}}\right) H_{m-l}\left(-\frac{D^*}{2i\sqrt{C}}\right), \quad (18)$$

最后一步利用了单变量厄密多项式的递推关系式

$$\frac{d^l}{dx^l} H_m(x) = \frac{2^l m!}{(m-l)!} H_{m-l}(x)$$
 由(18)式可知,相干光子扣除超叠加单模压缩态的特征函数恰好与单变量厄密多项式函数密切联系.至此,导出了特征函数的相干态表示,以及光子扣除相干叠加压缩态的特征函数.由于光子扣除相干叠加操作的引入使得特征函数与单变量厄密多项式相关,从而呈现出非高斯特点.

### 3 隐形传输保真度

下面,考察将光子扣除相干叠加压缩态作为纠缠源实现量子态的隐形传输下的保真度. 这里,考察 Kimble-Braunstein 传输方案<sup>[21]</sup>. 在该方案中,利用了对称的光束分离器以及单位增益的测量结果实现么正变换,从而得到最后的量子态. 若利用  $\text{tr}(\rho_{\text{in}}\rho_{\text{out}})$  来描述待传输的量子态  $\rho_{\text{in}}$  和最终输出量子态  $\rho_{\text{out}}$  的保真度,则保真度可表示为  $F = \int \frac{d^2\lambda}{\pi} \chi_{\text{in}}(\lambda) \chi_{\text{out}}(-\lambda)$ , 其中  $\chi_{\text{in}}(\lambda)$ 、 $\chi_{\text{out}}(-\lambda)$  分别对应于待传量子态  $\rho_{\text{in}}$  和最终输出量子态  $\rho_{\text{out}}$  的特征函数. 通过密度算符的 Weyl 编序等,研究指出了输出量子态  $\rho_{\text{out}}$  的特征函数与待传量子态  $\rho_{\text{in}}$  的特征函数以及纠缠源特征函数  $\chi_{12}$  存在关系<sup>[22]</sup>:  $\chi_{\text{out}}(\lambda) = \chi_{\text{in}}(\lambda) \chi_{12}(\lambda^*, -\lambda)$ . 因此,隐形传输保真度可以计算为

$$F = \int \frac{d^2\lambda}{\pi} \chi_{\text{in}}(\lambda) \chi_{\text{in}}(-\lambda) \chi_{12}(-\lambda^*, -\lambda). \quad (19)$$

下面,考虑相干态  $|\gamma\rangle$  输入. 由于在理想的 Kimble-Braunstein 方案(包括对称的光束分离器)中,已有研究证明:当考虑相干态作为输入时,保真度与相干态的振幅无关. 因此,为方便考虑真空态情况,其特征函数为  $\chi_{\text{in}}(\lambda) = \text{Tr}[|0\rangle\langle 0|e^{\lambda a^\dagger - \lambda^* a}] = \exp(-|\lambda|^2/2)$ ,

将其代入(19)式可得相干态的隐形传输保真度为

$$F = \int \frac{d^2\lambda}{\pi} \exp(-|\lambda|^2) \chi_{12}(-\lambda^*, -\lambda), \quad (20)$$

即对于任意双模纠缠源  $\rho_{12}$ ,只要知道其特征函数,通过式(20)就可以获得隐形传输保真度.

将(17)式代入(20)式并利用积分公式(10),注意到

$$\begin{aligned} G &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{A_1 B_1}} \cdot \\ &\exp\left(-(\omega_0 - 1)|\lambda|^2 - \frac{1}{2}((\lambda^*)^2 + \lambda^2)\omega_3\right), \\ D &\rightarrow -\lambda^* \omega_1 - \lambda \omega_2, \end{aligned} \quad (21)$$

其中为方便定义了

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{2}(\cosh(2r_1) + \cosh(2r_2) + 2) = \\ &(\cosh^2 r_1 + \cosh^2 r_2), \\ \omega_1 &= (\tau \sinh^2 r_1) + s \cosh r_2 \sinh r_2, \\ \omega_2 &= (s \sinh^2 r_2 + \tau \cosh r_1 \sinh r_1), \\ \omega_3 &= \frac{1}{2}(\sinh(2r_1) + \sinh(2r_2)), \end{aligned}$$

可得

$$F_m = \frac{\bar{N}^2}{\sqrt{A_1 B_1 R_0}} \frac{\partial^{2m}}{\partial t^m \partial t^m}.$$

$$\exp(\bar{C}(t^2 + t'^2) + \bar{E}tt')_{t=t'=0},$$

$$\text{其中 } R_0 = \omega_0^2 - \omega_3^2, \bar{C} = C + R_1, \bar{E} = E + R_2,$$

$$R_1 = \frac{1}{2R_0}(2\omega_0\omega_1\omega_2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega_3),$$

$$R_2 = \frac{1}{R_0}(\omega_0(\omega_1^2 + \omega_2^2) - 2\omega_1\omega_2\omega_3).$$

进一步利用(12)式可得

$$F_m = \frac{\bar{N}^2}{\sqrt{A_1 B_1 R_0}} m! (\bar{E}^2 - 4\bar{C}^2)^{m/2}.$$

$$P_m\left(\frac{\bar{E}\sqrt{\bar{E}^2 - 4\bar{C}^2}}{\bar{E}^2 - 4\bar{C}^2}\right),$$

此即利用相干光子扣除叠加单模压缩真空态实现相干态传输的保真度的解析表达式. 它与 Legendre 多项式  $P_m(x)$  多项式密切相关. 特别地,当  $m=0$ ,即不存在相干叠加操作情况(无纠缠情况),保真度为

$$F_0 = \left( \cosh(2r_1) + \cosh(2r_2) + \frac{1}{2} \cosh(2(r_1 - r_2)) + \frac{3}{2} \right)^{-1/2},$$

这是无纠缠情况下的保真度值. 容易看出:当系统无纠缠时,保真度  $F_0$  总是小于  $1/2$ ,这是无纠缠情况下量子传输保真度的最大值. 当  $r_1 = r_2 = r$  时,  $F_0$  取最大值,即  $F_0 = 1/(2\cosh r)$ ,最大值随压缩参数的增加而减小.

接下来,考察非高斯操作——光子扣除叠加对隐形传输保真度的影响,即分析参数  $\tau = \cos\theta$ ,  $s = \sin\theta$  和压缩参数  $r_1, r_2$  相干叠加阶数  $m$  的影响. 利用式(21),绘制了保真度随参数的演化曲线,如图1和图2所示. 图1中对于给定的参数  $\theta = 3\pi/4$ ,  $m=2$ ,考虑了保真度随压缩参数  $r_1, r_2$  的变化情况. 由图1可见,保真度在  $r_1 = r_2 = r$  时可取最大值,且保真度可以优于经典情况下的最大值  $1/2$ . 因此,下面主要考虑  $r_1 = r_2 = r$  的情况. 在图2中,对于给定的参数  $m$  和  $r_1 = r_2 = r$ ,通过最大化保真度  $F_m$ ,给出了该优化保真度与压缩参数的曲线关系. 由图2可知:(i) 当光子扣除叠加的阶数为奇数时,获得的保真度比无叠加操作的要差,但保真度随阶数  $m$  的增加而增加;(ii) 对于偶数阶超叠加情况,在小压缩参数范围内,与无叠加操作情况相比,发现保真度可以获得更优值. 例如,对于  $m=2, 4$ ,当压缩参数分别小于  $0.68$  和  $0.45$  时,保真度可以获得提高. 这一阈值随  $m$  的增加而减小;此外,对于  $m=2, 4$ ,当压缩参数小于  $0.39$  和  $0.34$  时,保真度可以突破经典保真度极限  $1/2$ ,这也是量子纠缠实现保真度所期望的;(iii) 随着  $m$  的增加,可以在小压缩参数范围内 ( $\leq 0.25$ ) 获得更好的保真度. 这与奇数阶情况有所不同,几乎在全压缩参数范围内,保真度随  $m$  的增

加而增加.

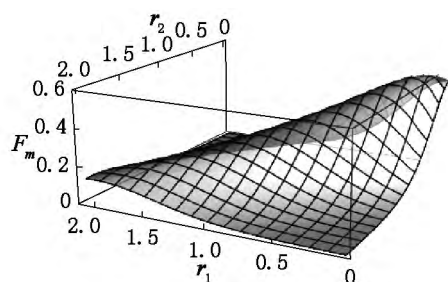


图1 保真度随压缩参数  $r_1, r_2$  的变化 这里  $\theta = 3\pi/4, m = 2$

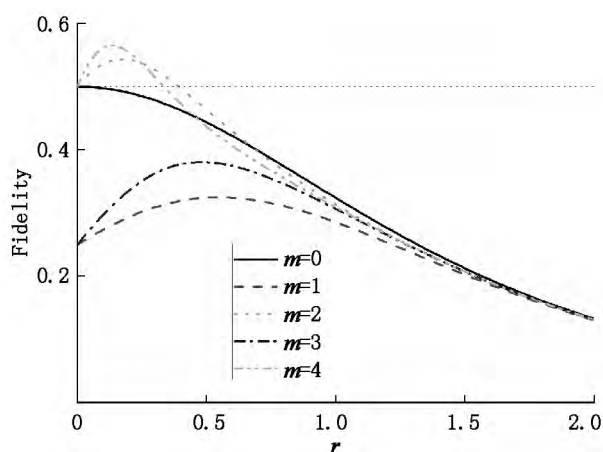


图2 优化保真度(Fidelity) 随压缩参数  $r_1 = r_2 = r$  变化曲线

## 4 结论

本文将光子扣除叠加操作  $(\tau a + sb)^m$  作用于 2 个无关的单模压缩真空态上, 引入了一类非高斯型连续变量量子态, 光子扣除叠加压缩态. 利用压缩算符的正规乘积表示相干态表象的完备性关系, 导出了归一化系数, 它对于研究量子态的非经典性质是十分重要的. 研究指出该系数恰好可以表示成 Legendre 多项式  $P_m(x)$  的函数——一个简洁的表达式. 进一步利用平移算符的反正规乘积表示, 引入了特征函数的相干态表示, 基于此进一步导出了光子扣除叠加压缩态的特征函数, 它可以表示成 2 个单变量厄密多项式的函数. 最后, 基于 Kimble-Braunstein 的量子隐形传输方案, 将光子扣除叠加压缩态作为纠缠源实现相干态的传输. 利用保真度的解析表达式讨论了保真度与相关参数的关系. 研究表明: 当压缩参数相等时, 保真度可获得最大值; 对于奇数阶操作, 保真度比无叠加操作情况更差; 而对于偶数阶情况, 在一定的压缩参数范围内, 保真度可以优于无纠缠情况, 且保真度可以优于经典的最大保真度  $1/2$ , 同时保真度可以随  $m$  的增加而改善.

## 5 参考文献

- [1] Bouwmeester D, Ekert A, Zeilinger A. The physics of quantum information [M]. Berlin: Springer-Verlag 2000.
- [2] Eisert J, Scheel S, Plenio M B. Diagonalizing Gaussian states with Gaussian operations is impossible [J]. Physical Review Letters 2002 89(13): 377-389.
- [3] Ourjoumtsev A, Dantan A, Tualle-Brouiri R, et al. Increasing entanglement between Gaussian states by coherent photon subtraction [J]. Physical Review Letters 2007 98(3): 30502.
- [4] Browne D E, Eisert J, Scheel S, et al. Driving non-Gaussian to Gaussian states with linear optics [J]. Physical Review A 2002 67(6): 164-165.
- [5] Lee S Y, Nha H. Quantum state engineering by a coherent superposition of photon subtraction and addition [J]. Physical Review A 2010 82: 53812.
- [6] Lee S Y, Ji Sewan, Kim H J, et al. Enhancing quantum entanglement for continuous variables by a coherent superposition of photon subtraction and addition [J]. Physical Review A 2011 84(1): 3717-3724.
- [7] Hu Liyun, Zhang Zhiming. Statistical properties of coherent photon-added two-mode squeezed vacuum and its inseparability [J]. Journal of the Optical Society of America B, 2013 30(3): 518-529.
- [8] Hu Liyun, Xu Xuexiang, Fan Hongyi. Statistical properties of photon-subtracted two-mode squeezed vacuum and its decoherence in thermal environment [J]. Journal of the Optical Society of America B 2010 27(2): 286-299.
- [9] Hu Liyun, Zhang Zhiming. Nonclassicality and decoherence of photon-added squeezed thermal state in thermal environment [J]. Journal of the Optical Society of America B 2012 29(4): 529-537.
- [10] J N Wu, S Y Liu, L Y Hu, et al. Improving entanglement of even entangled coherent states by a coherent superposition of photon subtraction and addition [J]. Opt Soc Am B 2015, 32: 2299.
- [11] Ourjoumtsev A, Dantan A, Tualle-Brouiri R, Grangier A. Increasing entanglement between Gaussian states by coherent photon subtraction [J]. Physical Review Letters, 2007 98(3): 30502.
- [12] Fiurasek J. Conditional generation of N-photon entangled states of light [J]. Physical Review A 2001 65(5): 882-886.
- [13] Kok P, Lee H, Dowling J P. Creation of large-photon-number path entanglement conditioned on photodetection [J]. Physical Review A 2001 65(5): 882-886.
- [14] Lee S Y, Nha H. Second-order superposition operations via Hong-Ou-Mandel interference [J]. Physical Review A, 2012 85(4): 1822-1827.
- [15] Agarwal G S, Puri R R, Singh R P. Vortex states for the

- quantized radiation field [J]. *Physical Review A* ,1997 56 ( 5) : 4207-4215
- [16] Li Yazhou ,Jia Fang ,Zhang Haoliang ,et al. Hermite polynomial excited squeezed vacuum as quantum optical vortex states [J]. *Laser Physics Letters* 2015 ,12( 11) : 115203.
- [17] 范洪义. 量子力学纠缠态表象与变换 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社 2012.
- [18] Scully M S ,Zubairy M S. *Quantum optics* [M]. Cambridge: Cambridge University Press ,1997.
- [19] Hu Liyun ,Xu Xuexiang ,Xu Xuefen ,et al. Photon-subtracted squeezed thermal state: Nonclassicality and decoherence [J]. *Physical Review A* 2010 82( 4) : 272-277.
- [20] 刘世右. 连续变量的高斯与非高斯量子态的非经典及纠缠特性研究 [D]. 南昌: 江西师范大学 2015.
- [21] Braunstein S L ,Kimble H J. Teleportation of continuous quantum variables [J]. *International Quantum Electronics Conference* ,1998 80( 4) : 67-75.
- [22] Hu Liyun ,Liao Zeyang ,Ma Shengli ,et al. Optimal fidelity of teleportation with continuous variables using three tunable parameters in a realistic environment [J]. *Physical Review A* 2016 93: 33807.

## The High-Order Coherent Superposition of Photon-Subtraction for Improving the Fidelity of Teleportation

XIONG Xiong<sup>1</sup> ,WANG Zhilong<sup>2</sup> ,WAN Guojin<sup>1\*</sup>

( 1. School of Information Engineering ,Nanchang University ,Nanchang Jiangxi 330029 ,China;

2. College of Physics & Communication Electronics ,Jiangxi Normal University ,Nanchang Jiangxi 330022 ,China)

**Abstract:** A kind of non-Gaussian quantum state with continuous variable by operating high-order coherent superposition of photon-subtraction on two single-mode squeezed vacuum states has been introduced. Using the normally ordering form of squeezing operation and completeness relation of coherent state representation ,the analytical expression of normalized factor of this new state has been derived. It is found that the factor is related to Legendre polynomials. Based on the teleportation scheme of Kimble-Braunstein ,the fidelity for teleporting coherent state by using the new entangled state as entangled resource has been calculated. It is shown that: ( i) the fidelity has a maximum value when  $r_1 = r_2$ ; ( ii) the fidelity becomes worse than that from the case without coherent superposition operation for odd  $m$ ; while for even  $m$  ,the fidelity can be improved in a certain small squeezing parameter region ,and even exceeds 1/2. In addition ,the fidelity increases as even  $m$  in a certain region.

**Key words:** high-order coherent superposition of photon-subtraction; non-Gaussian state; teleportation; coherent state; fidelity

( 责任编辑: 冉小晓)