

文章编号: 1000-5862(2017)01-0035-04

2 维 Ginzburg-Landau 方程的分裂 LOD 高阶紧致格式

匡立群¹ 孔令华^{1*} 王 兰¹ 郑小红²

(1. 江西师范大学数学与信息科学学院, 江西 南昌 330022; 2. 广东农工商职业技术学院基础部, 广东 广州 510507)

摘要: 采用分裂技巧研究了 2 维的 Ginzburg-Landau 方程构造高效的数值格式. 把 2 维 Ginzburg-Landau 方程变成线性和非线性问题以避免求解耦合的非线性方程组. 为减少存储量和计算量, 对线性问题进一步运用局部 1 维方法, 把它分解为 2 个 1 维问题求解. 所得到的数值格式具有高效、高精度等数值特征. 最后, 用数值算例模拟了 2 维 Ginzburg-Landau 方程所描述的物理现象, 新方法具有较大的优越性.

关键词: Ginzburg-Landau 方程; 分裂法; 局部 1 维法; 高阶紧致格式.

中图分类号: O 241. 82 文献标志码: A DOI: 10. 16357/j. cnki. issn1000-5862. 2017. 01. 06

0 引言

Ginzburg-Landau (GL) 方程是一类非常重要的非线性发展型方程, 于 20 世纪 50 年代由 V. L. Ginzburg 与 L. Landau 在 Landau 二级变相理论的基础上提出的^[1-3]. 在流体力学系统、等离子传播和超导理论中有广泛应用, 更是一个描述超导现象的理想数学模型^[3], 具有十分丰富的物理内涵. 基于这一模型在数学物理中的重要地位, 近年来, 对于这一模型的理想化情形 1 维问题有大量的理论研究, 包含全局吸引子、解的正则性、渐近动力学性质等^[1-7]. 由于计算机性能等方面的限制, 对于 2 维问题的数值方法的研究相对较少. 王廷春等^[8]构造了它的一个 Crank-Nicolson 格式, 并对格式的收敛性进行了分析. 然而, 此类格式在用于求解多维问题时, 需要求解阶数巨大的非线性代数方程组, 当求解区域比较大或者网格剖分稍密时, 计算效率不够理想.

分裂步方法最基本的思想是把多种效应综合作用的结果分解成多个单效应问题来分析, 从而简化讨论过程^[9]. 在微分方程数值求解上, 这种思想的直接表现就是把相对复杂的微分方程分解成多个相对简单的方程来求解, 然后再把这些简单问题的解复合起来, 从而得到原问题的一个近似解^[10-11]. 它能简化计算过程, 提高计算效率.

一般的数值微分直接应用相邻点的函数值来线性表示待求微分值, 如果需要提高格式的计算精度就只能加宽节点模板. 这样增加了计算量, 同时增加

了边界处理的难度^[12]. 高阶紧致格式能够较好地克服这一不足^[13], 其基本思想是隐式求解待求微分值, 即待求微分值的线性组合用相邻节点的函数值线性表示^[11, 14]. 对于时间有关的演化方程, 为使格式更加稳定, 往往采取类似于 Crank-Nicolson 格式的隐式格式来求解. 若方程都是隐式, 则高阶紧致格式与一般差分格式一样, 不会增加任何计算量, 前者仅仅会改变系数矩阵相应非零元素的值, 矩阵的带宽不会发生改变, 而收敛精度得到了大幅度的提高, 从而提高了计算效率.

本文主要研究 2 维 GL 方程满足给定初始条件的周期边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - (v + i\alpha) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + (k + i\beta) |u|^2 u - \gamma u = 0 & (x, y, t) \in \Omega \times (0, T] \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) & (x, y) \in \bar{\Omega} \end{cases} \quad (1)$$

的分裂步高阶紧致格式, 同时利用局部 1 维思想, 把 2 维问题分裂为多个局部 1 维问题来求解. 其中 $\Omega = (x_L, x_R) \times (y_L, y_R)$, $\bar{\Omega} = [x_L, x_R] \times [y_L, y_R]$, $\nu > 0$, $k > 0$, α, β 为参数, γ 是线性发展项参数, 且当 $\gamma \leq 0$ 时, 有 $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, y, t) = 0$.

1 格式构造

为构造 GL 方程 (1) 的分裂步高阶紧致格式, 首先把方程 (1) 分裂成 2 个更易于求解的问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + d |u|^2 u - \gamma u = 0, \quad (3)$$

其中 $c = v + i\alpha$, $d = k + i\beta$. 然后分别对子问题 (2) 和

收稿日期: 2016-10-15

基金项目: 国家自然科学基金(11301234, 11271171)和江西省自然科学基金(20142BCB23009, 20161ACB20006)资助项目.

通信作者: 孔令华(1977-)男, 江西石城人, 教授, 博士, 主要从事偏微分方程数值解法的研究. E-mail: konglh@mail.ustc.edu.cn

(3) 依次进行近似或者精确求解,以问题(1)的初始值 $u_0(x, y)$ 作为第1个求解问题的初始值,接下来的问题以前一问题的近似解或精确解作为初始值.这种方法技巧具有简单灵活的特点,在数值计算、特别是复杂问题的数值模拟中受到青睐,已经广泛地用于微分方程的数值求解^[10-11].

这样就把数值求解 GL 方程(1)转化为数值求解子问题(2)与(3).为此,首先用 $[x_k, x_{k+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [t_n, t_{n+1}]$ 对时空区域 $[x_L, x_R] \times [y_L, y_R] \times [0, T]$ 进行分割,其中 $x_k = x_L + kh_x$, $y_j = y_L + jh_y$, $t_n = n\tau$, h_x 为 x 方向上的网格剖分步长, h_y 为 y 方向上的网格剖分步长, τ 为时间方向上的步长.将非线性问题(3)用中点公式进行离散,有

$$\frac{u_{kj}^{n+1} - u_{kj}^n}{\tau} + \left(d \left| \frac{u_{kj}^{n+1} + u_{kj}^n}{2} \right|^2 - \gamma \right) \frac{u_{kj}^{n+1} + u_{kj}^n}{2} = 0, \quad (4)$$

对于格式(4)可以用针对单个方程的不动点迭代法去求解,避免了要求解耦合的非线性代数方程组,可以大大减少计算时间.

对于线性的2维问题(2),首先应用局部1维方法的思想^[12],把(2)式分解成

$$(\partial u / \partial t) / 2 = c \partial^2 u / \partial x^2, \quad t \in [t^n, t^{n+1/2}], \quad (5)$$

$$(\partial u / \partial t) / 2 = c \partial^2 u / \partial y^2, \quad t \in [t^{n+1/2}, t^{n+1}]. \quad (6)$$

在形式上(5)和(6)式都是1维变系数扩散方程,都只含有一个空间方向的导数,而另一个空间变量已经参数化,只要求解若干个1维问题的线性代数方程组,这能够非常有效地数值求解.为提高计算效率,在空间方向用高阶紧致格式:

$$\begin{aligned} Hu_j'' &= (1 + h^2 \delta_x^2 / 12) u_j'' = (u_{j-1}'' + 10u_j'' + \\ &u_{j+1}'') / 12 = \delta_x^2 u_j = (u_{j-1}'' - 2u_j'' + \\ &u_{j+1}'') / h^2 + O(h^4), \end{aligned} \quad (7)$$

去离散,即用 $u_j'' = H^{-1} \delta_x^2 u_j$ 去离散.由 Taylor 展开式可知,格式(7)具有4阶收敛速度,由此可以看出高阶紧致格式(7)与2阶显式中心差商 $\delta_x^2 u_j$ 所用到的模板节点均为 x_{j-1}, x_j, x_{j+1} ,然而前者比后者高2阶收敛精度.由下面构造的数值格式可以看到,若在时间方向做隐式离散,则这2种格式的计算量是一样的,均需要求解一个3对角的代数方程组.在时间方向用 Crank-Nicolson 格式,空间方向用高阶紧致格式(7)对局部1维微分方程(5)和(6)进行离散,得到格式

$$\frac{1}{2} \frac{u_{kj}^{*} - u_{kj}^n}{\tau/2} - c \left(1 + \frac{h_x^2}{12} \delta_x^2 \right)^{-1} \delta_x^2 \left(\frac{u_{kj}^{*} + u_{kj}^n}{2} \right) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \frac{u_{kj}^{n+1} - u_{kj}^{*}}{\tau/2} - c \left(1 + \frac{h_y^2}{12} \delta_y^2 \right)^{-1} \delta_y^2 \left(\frac{u_{kj}^{n+1} + u_{kj}^{*}}{2} \right) = 0. \quad (9)$$

它们逼近线性问题(2)的数值格式.经过分析易知,此格式是对线性问题(2)的时间方向2阶、空间方

向4阶逼近.此格式的计算复杂度与 Crank-Nicolson 格式

$$\frac{1}{2} \frac{u_{kj}^{*} - u_{kj}^n}{\tau/2} - c \delta_x^2 \left(\frac{u_{kj}^{*} + u_{kj}^n}{2} \right) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} \frac{u_{kj}^{n+1} - u_{kj}^{*}}{\tau/2} - c \delta_y^2 \left(\frac{u_{kj}^{n+1} + u_{kj}^{*}}{2} \right) = 0 \quad (11)$$

的计算复杂度是一样的,然而,格式(10)和(11)在空间方向只有2阶收敛速度.

把求解非线性问题(3)的中点格式(4)与求解线性问题(2)的(8)式和(9)式用 Strang 分裂^[15]形式组合起来,得到数值格式

$$\begin{cases} \frac{u_{kj}^{*} - u_{kj}^n}{\tau} + \left(d \left| \frac{u_{kj}^{*} + u_{kj}^n}{2} \right|^2 - \gamma \right) \frac{u_{kj}^{*} + u_{kj}^n}{2} = 0, \\ \frac{u_{kj}^{**} - u_{kj}^{*}}{\tau} - c \left(1 + \frac{h_x^2}{12} \delta_x^2 \right)^{-1} \delta_x^2 \left(\frac{u_{kj}^{**} + u_{kj}^{*}}{2} \right) = 0, \\ \frac{u_{kj}^{***} - u_{kj}^{**}}{\tau} - c \left(1 + \frac{h_y^2}{12} \delta_y^2 \right)^{-1} \delta_y^2 \cdot \\ \left(\frac{u_{kj}^{***} + u_{kj}^{**}}{2} \right) = 0, \\ \frac{u_{kj}^{n+1} - u_{kj}^{***}}{\tau} + \left(d \left| \frac{u_{kj}^{n+1} + u_{kj}^{***}}{2} \right|^2 - \gamma \right) \cdot \\ \frac{u_{kj}^{n+1} + u_{kj}^{***}}{2} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

经过分析易知,格式(12)在时间方向上具有2阶分裂误差和截断误差,在空间方向上具有4阶收敛速度.格式(12)的第1式、第4式只需求解一些不耦合的非线性代数方程,这些方程能够迅速求解;第2式、第3式只需求解一些1维问题的线性方程组,这些方程组的计算复杂度与 Crank-Nicolson 格式的计算复杂度是一样的.

3 数值算例

利用数值实验来检验所构造出的格式的有效性.在空间区域 $\Omega = [0, \delta] \times [0, \delta]$ 上考虑问题^[81]:

$$\begin{cases} u_t - (v + i\alpha)(u_{xx} + u_{yy}) + (k + i\beta)|u|^2 u - \gamma u = 0, \\ u(x, y, t) = u(x + 6, y, t), \\ u(x, y, t) = u(x, y + 6, t), \\ u(x, y, 0) = e^{i\pi(x+y)/3}. \end{cases}$$

该问题有平面波解^[81]:

$$u(x, y, t) = ae^{i[\xi(x+y) - \omega t]},$$

其中 a, ξ, ω 为3个实数,且满足

$$2v\xi^2 + ka^2 - \gamma = 0, \quad -\omega + 2a\xi^2 + \beta a^2 = 0.$$

在本实验中取 $v = 1$, $\alpha = 1$, $k = 1$, $\beta = 2$, $\mu = 1$, $\xi = \pi/3$, $\gamma = 1 + 2\pi^2/9$, $\omega = 2(1 + \pi^2/9)$.

首先考察数值格式(12)时空方向的收敛速度,

其计算公式为

$$o_{rder} = \ln(\|e(s_1)\|_p / \|e(s_2)\|_p) / \ln(s_1/s_2),$$

其中 $e(s_1) = u(x_k, y_j, t_n) - u_{kj}^n$ 表示在步长 s_1 下得到的误差, $\|e\|_p = (\sum_{j,k} |e_{jk}|^p)^{1/p}$ 表示 p -范数.

为考察时间方向的收敛速度, 取相对小的空间步长 $h_x = h_y = 3/80$, 使得由空间离散产生的误差相对于由时间离散所产生的误差可以忽略不计, 在不同时间步长下得到的数值解和精确解当 $t = 1$ 时的误差和收敛速度如表 1 所示.

表 1 时间方向的收敛速度和误差

| τ | $\ e\ _2$ | o_{rder} | $\ e\ _\infty$ | o_{rder} |
|--------|------------|------------|----------------|------------|
| 1/10 | 6.372 2e-2 | | 1.062 0e-2 | |
| 1/20 | 1.624 2e-2 | 1.972 1 | 2.707 0e-3 | 1.972 0 |
| 1/40 | 4.080 5e-3 | 1.992 9 | 6.800 9e-4 | 1.992 9 |
| 1/80 | 1.021 4e-3 | 1.998 2 | 1.702 3e-4 | 1.998 2 |
| 1/160 | 2.554 4e-4 | 1.999 5 | 4.257 4e-5 | 1.999 4 |

然后, 考察空间方向的收敛情况. 为此取足够小的时间步长 $\tau = 1/2\ 000$, 使得所得到的数值解的误差主要由空间离散产生. 在不同空间步长下得到的数值解的误差及其收敛速度如表 2 所示.

同时, 为了说明新构造格式 (12) 具有较高的计算效率, 将它与文献 [8] 中的格式 I :

$$(u_{kj}^{n+1} - u_{kj}^n) / \tau - c(\delta_x^2 + \delta_y^2) u_{kj}^{n+1/2} + d |u_{kj}^{n+1/2}|^2 u_{kj}^{n+1/2} - \gamma u_{kj}^{n+1/2} = 0$$

在相同网格剖分下的计算结果进行对比 (见表 2), 其中 $u_{kj}^{n+1/2} = (u_{kj}^{n+1} + u_{kj}^n) / 2$.

表 2 空间方向的收敛速度和误差以及计算效率比较

| h | 格式 | $\ e\ _2$ | o_{rder} | $\ e\ _\infty$ | o_{rder} | CPU 时间 /s |
|-----|------|-----------|------------|----------------|------------|-----------|
| 2 | (12) | 3.823e-1 | | 8.968e-2 | | 0.124 |
| | I | 2.145 | | 3.580e-1 | | 0.233 |
| 1 | (12) | 2.200e-2 | 4.119 | 5.072e-3 | 4.114 | 0.312 |
| | I | 5.406e-1 | 1.988 | 9.010e-2 | 1.990 | 1.197 |
| 1/2 | (12) | 1.335e-3 | 4.043 | 3.074e-4 | 4.045 | 0.620 |
| | I | 1.359e-1 | 1.992 | 2.264e-2 | 1.992 | 3.918 |
| 1/4 | (12) | 8.309e-5 | 4.006 | 1.955e-5 | 3.975 | 1.875 |
| | I | 3.403e-2 | 1.998 | 5.671e-3 | 1.998 | 18.910 |
| 1/8 | (12) | 5.618e-6 | 3.887 | 1.324e-6 | 3.884 | 6.241 |
| | I | 8.509e-3 | 2.000 | 1.418e-3 | 2.000 | 91.997 |

由表 1 和表 2 可以观察到, 所构造的格式在时间方向具有 2 阶收敛速度, 在空间方向具有 4 阶收敛速度. 由于分裂步方法和局部 1 维方法的使用, 使得难以数值求解的多维非线性 GL 方程能够非常迅速有效地得到模拟.

最后, 研究 GL 方程在长时间内所描述的平面波的动力学行为. 用格式 (12) 模拟上述问题至 $t = 20$, 取步长 $h_x = h_y = 0.1$, $\tau = 0.002$. 所得到的平面波在初始时刻 $t = 0$ 和最终时刻 $t = 20$ 的实部如图 1 所示, 得到了虚部图形与实部相当, 因而省略未画出. 图 2(a) 描绘了当 $t = 20$ 时各个空间点数值解的模 $|u_{kj}^n|$ 与精确值 1 之间的误差, 图 2(b) 给出了平面波的 2-模平方 $\|u\|_2^2$ 随时间的演化关系.

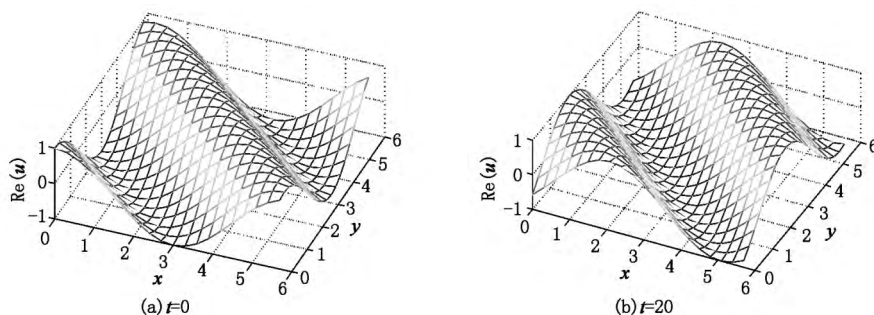


图 1 平面波的实部

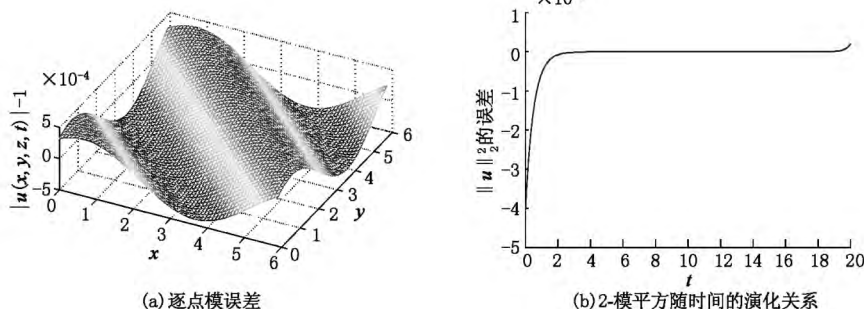


图 2 当 $t = 20$ 时平面波的数值解

由图 1 和图 2 可以观察到,所构造的格式能够准确地模拟 GL 方程所描述的平面波,能够自始至终保持所模拟的波为平面波,尽管空间网格取得较为粗糙,逐点误差始终保持在非常小的范围(10^{-4} 左右)内波动,波的整体误差也很小.与文献[8]中的格式相比,在计算效率方面,本文所构造的格式具有较大的优越性.

4 参考文献

- [1] 郭柏灵,黄海洋,蒋慕蓉.金兹堡-朗道方程[M].北京:科学出版社,2002.
- [2] 袁起立,郦智斌,姜勇刚.朗道及其对物理学的贡献[J].物理通报,2010,2(6):68-70.
- [3] Kai Velten.数学建模与仿真:科学与工程导论[M].周旭,译.北京:国防工业出版社,2012.
- [4] Bu Charles. On the Cauchy problem for the 1+2 complex Ginzburg-Landau equation [J]. J Aust Math Soc Ser B, 1994, 36(3):313-324.
- [5] Li Yongsheng, Guo Boling. Global existence of solutions to the derivative Ginzburg-Landau equation [J]. J Math Anal Appl, 2000, 249(2):412-432.
- [6] Lü Shujuan, Lu Qishao. Exponential attractor for the 3D Ginzburg-Landau type equation [J]. Nonlin Anal, 2007, 67(11):3116-3135.
- [7] 刘常福,戴正德.2 维广义 Ginzburg-Landau 方程在 Banach 空间的指数吸引子 [J]. 应用数学学报,2005,28(1):134-142.
- [8] Wang Tingchun, Guo Boling. Analysis of some finite difference schemes for two-dimensional Ginzburg-Landau equation [J]. Numer Methods Partial Diff Eq, 2011, 27(5):1340-1363.
- [9] McLachlan R, Quispel G. Splitting methods [J]. Acta Numer, 2002, 11(11):1055-1067.
- [10] 周文英,孔令华,王兰,等.3 维 Maxwell 方程局部 1 维多辛格式的能量恒等式 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2015,39(1):55-58.
- [11] 董慧,孔令华,王兰. Dirac 方程的紧致分裂多辛格式 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2014,38(5):521-525.
- [12] 张文生. 科学计算当中的偏微分方程有限差分法 [M]. 北京:高等教育出版社,2006.
- [13] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like solution [J]. J Comput Phys, 1992, 103(1):16-42.
- [14] 赵飞,蔡志权,葛永斌.1 维非定常对流扩散方程的有理型高阶紧致差分格式 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2014,38(4):413-418.
- [15] Strang G. On the construction and comparison of difference schemes [J]. SIAM J Numer Anal, 1968, 5(3):506-517.

The Splitting High-Order Compact Scheme for Two-Dimensional Ginzburg-Landau Equation

KUANG Liquan¹, KONG Linghua^{1*}, WANG Lan¹, ZHENG Xiaohong²

(1. College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China;

2. Foundation Department, Guangdong AIB Polytechnic College, Guangzhou Guangdong 510501, China)

Abstract: The efficient numerical scheme for two-dimensional Ginzburg-Landau equation is studied by splitting method. The two-dimensional Ginzburg-Landau equation is altered into a linear problem and a nonlinear problem in order to avoid solving a coupled nonlinear algebraic system. In order to reduce storage and computation, the linear problem can be decomposed into two one dimensional problems by local one-dimensional method. The scheme has the numerical characteristics such as high efficiency, high accuracy. Finally, some numerical experiments are reported to simulate the physical phenomena described by two-dimensional Ginzburg-Landau equation, and the superiority of our scheme can be verified by the experiments.

Key words: Ginzburg-Landau equation; splitting method; local one-dimensional method; high order compact scheme

(责任编辑:曾剑锋)