文章编号:1000-5862(2017)02-0199-05

# 多重拓扑下 Fan Ky 点的通有稳定性

黄　辉[1,2],左勇华[3*],卢美华[4]

(1. 江西师范大学教育学院,江西 南昌　330022;2. 江西都昌第二中学,江西 九江　332600;
3. 清华大学深圳研究生院,广东 深圳　518055;4. 江西科技学院理科部,江西 南昌　330022)

摘要: 建立集合族空间,讨论了公共元的通有稳定性,得到了闭集族空间上的交运算在 Hausdorff 拓扑下的上半连续性. 在2种拓扑结构下研究了 Fan Ky 点的通有稳定性,显示了集族空间交运算方法具有良好的适应性.

关键词: 集合族空间; 公共元; Fan Ky 点

中图分类号: F 224.0; O 153.1　　文献标志码: A　　DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2017.02.17

## 0　引言

集值拓扑方法关于通有稳定性的研究自1951年 M. K. Fort 的开创性结果以来,在不动点、均衡点、重合点获得了广泛而优美的结论[1-5]. 近期仍然有一些新的结果出现[6-11]. 虽然通有稳定性的研究具有极其丰富的内容,但通有稳定的本质是什么,并没有太多文献予以揭示. 本文从集族空间公共元的通有稳定性出发,构造不同的拓扑结构,把 Fan Ky 点的通有稳定性统一到集族空间公共元的通有稳定性上来,这就从一个侧面揭示了通有稳定的本质,也为通有稳定性提供一个判决性方法; 在拓扑层面上,对于通有稳定的判定将更加顺畅; 在应用问题上,对于判断通有稳定和相关概念的可接受性也更为便利. Fan Ky 点多种拓扑构造形式也显示集族空间公共元方法具有广泛适应性.

## 1　预备知识及符号说明

设$(X,d)$是一度量空间,$C_L(X)$为$X$的全体非空闭子集,$K(X)$为全体非空紧子集,$2^X$为幂集. $\forall x\in X,\forall A\subset X$及$\varepsilon>0$,称$A+\varepsilon=\{x\in X\mid \exists a\in A,d(a,x)<\varepsilon\}$为$A$的$\varepsilon$扩张,$\forall A,B\in C_L(X)$,定义$H_d(A,B)=\inf\{\varepsilon\mid A\subset B+\varepsilon,B\subset A+\varepsilon\}$. 这样建立了 Hausdorff 度量空间$(C_L(X),H_d)$,称之为集合族空间,简称为集族空间. 显然$(C_L(X),H_d)$完备当且仅当$(X,d)$完备,$K(X)$在$(C_L(X),H_d)$中闭.

**定义1**　$X,Y$均为拓扑空间,$F:X\to 2^Y$为集值映射,$x_0$为$X$中的一点. 称$F$在$x_0$上半连续,若$Y$中任何一个$F(x_0)$开邻域$u$,$\exists x_0$邻域$v$,$x'\in v$有$F(x')\subset u$. $F$在$X$中每一点都上半连续,则称$F$在$X$上上半连续.

**引理1**[3]　(Fort 定理)　$X$为拓扑空间,$Y$为度量空间,$F:X\to 2^Y$上半连续且非空紧值(即 usco 映射),则存在$X$的稠密剩余集$Q$,使$F$在$Q$上半连续从而连续.

## 2　集族空间的主要结果

由于均衡点、重合点和不动点等问题可以转化为有限集合族的交[12-13],但 Fan Ky 点却只能是无限集合族的交. 因此,需要在指标集为无限不可数集时定义集合族空间; 有限个数的集合形成集合族空间相对简单,交运算的凸性、非空性、连续性可以得到保证. 事实上,在指标集为无限不可数集时,有关集合族极限的交运算非空的结论仍然成立,从而在无限不可数的指标集上也可以定义集合族空间. 当然,在无限个数的集合族空间上,赋予拓扑结构可以更

收稿日期: 2016-11-10
基金项目: 国家自然科学基金(61563020)资助项目.
通信作者: 左勇华(1976-),男,江西湖口人,研究员,博士,主要从事数量经济、博弈论、产业经济和科技政策等研究. E-mail: zuo.yonghua@sz.tsinghua.edu.cn
黄　辉(1979-),男,江西都昌人,高级讲师,主要从事基础数学的教学和研究. E-mail: dcezbgs@163.com

多形式，不同的拓扑结构各具特性；以水平集度量函数刻画 Fan Ky 点问题空间，此空间未必完全符合度量的规范公理，但却能够同样导出问题空间的合适拓扑结构，毕竟拓扑结构要弱于一般的度量结构. 而若以 Hausdorff 拓扑考察 Fan Ky 点的通有稳定性，则需要对集族空间做进一步的扩充. 2 种拓扑结构各有优劣，而集族空间方法却都能够适应.

**定义 2** $(X,d)$ 是完备度量空间，$I$ 是指标集(可以是无限不可数集)，紧族 $\{\beta_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 在 $(X,d)$ 上适合 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}\beta_\alpha\neq\varnothing$. 适合以上条件集族的全体形成 $Y_I$，称 $Y_I$ 为 $X$ 上指标 $I$ 的紧集族空间，简称集族空间. $\forall y_1,y_2\in Y_I$，分别记 $y_1=\{\beta_\alpha^1\}_{\alpha\in I}$，$y_2=\{\beta^2\}_{\alpha\in I}$，$\rho_I(y_1,y_2)=\sup\limits_{\alpha\in I}H_d(\beta_\alpha^1,\beta_\alpha^2)$，显然 $\rho_I(y_1,y_2)$ 是 $Y_I$ 上的度量.

**定义 3** 设 $\forall y=\{\beta_\alpha\}_{\alpha\in I}\in Y_I$，记 $F_I(y)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}\beta_\alpha$，称集值映射 $F_I:Y\to 2^X$ 为 $Y_I$ 上的公共元映射.

**定理 1** 度量空间 $(X,d)$ 完备，则 $X$ 上指标 $I$ 的紧集族空间 $(Y_I,\rho_I)$ 是完备度量空间.

**证** 任取 $(Y_I,\rho_I)$ 的柯西列 $\{y^n\}_{n=1}^\infty$，$y^n=\{\beta_\alpha^n\}_{\alpha\in I}$. 对每个固定的 $\alpha\in I$，$\{\beta_\alpha^n\}_{n=1}^\infty$ 必有极限 $\beta_\alpha$，且 $\beta_\alpha$ 紧；全体 $\beta_\alpha$ 形成集族 $\{\beta_\alpha\}_{\alpha\in I}$. 下证 $y=\{\beta_\alpha\}_{\alpha\in I}\in Y_I$，即 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}\beta_\alpha\neq\varnothing$.

随意固定 $\alpha_0\in I$，$\beta_{\alpha_0}\in y$，$\bigcap\limits_{\alpha\in I}\beta_\alpha=\bigcap\limits_{\alpha\in I}(\beta_\alpha\cap\beta_{\alpha_0})$，记 $\gamma_\alpha=\beta_\alpha\cap\beta_{\alpha_0}$；要证 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}\gamma_\alpha\neq\varnothing$，只要证 $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 具有有限交性质. 对任何有限个 $\gamma_{\alpha_1},\gamma_{\alpha_2},\cdots,\gamma_{\alpha_k}$，有 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}\gamma_\alpha=(\bigcap\limits_{\alpha\in I}\beta_\alpha)\cap\beta_{\alpha_0}$，$\bigcap\limits_{i=1}^k\gamma_{\alpha_i}=\bigcap\limits_{i=0}^k\beta_{\alpha_i}$. 而对于 $i=0,1,2,\cdots,k$，显然有 $\beta_{\alpha_i}^n\to\beta_{\alpha_i}(n\to\infty)$ 且 $\bigcap\limits_{i=0}^k\beta_{\alpha_i}^n\neq\varnothing$. 由文献[10]引理 3 以及引理 4 知，$\bigcap\limits_{i=1}^k\gamma_{\alpha_i}=\bigcap\limits_{i=0}^k\beta_{\alpha_i}^n\neq\varnothing$，从而 $y=\{\beta_\alpha\}_{\alpha\in I}\in Y_I$. 另一方面，$\rho(y^n,y)\to 0$，从而 $(Y_I,\rho_I)$ 完备.

**定理 2** 在完备度量空间 $(X,d)$ 生成的集族空间 $(Y_I,\rho_I)$ 上，公共元映射 $F_I$ 是 usco 映射，从而存在 $Y_I$ 的稠密剩余集 $Q$，使得 $F_I:Y_I\to 2^X$ 在 $Q$ 上连续.

**证** 显然 $F_I$ 是非空紧值的，要证 $F_I$ 是 usco 映射，只要证明 $F_I$ 上半连续即可.

$Y_I$ 中任取收敛列 $\{y_n\}_{n=1}^\infty$(记 $y_n=\{\beta_\alpha^n\}_{\alpha\in I}$ 以及 $y_n\to y_0$，$y_0=\{\beta_\alpha^0\}_{\alpha\in I}$). 对 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}\beta_\alpha^0$ 的任意开邻域 $G$ 可证 $y_0=\{\beta_\alpha^0\}_{\alpha\in I}$ 中必有有限个成员，其交包含于 $G$ 中. 否则，可设 $y_0=\{\beta_\alpha^0\}_{\alpha\in I}$ 中任何有限交不包含于 $G$，记 $1\leqslant i\leqslant k$，任取 $k$ 个 $\beta_{\alpha_i}^0\in z_0$，必有 $\bigcap\limits_{i=1}^k\beta_{\alpha_i}^0\not\subset G$，则 $\beta_{\alpha_1}^0\cap\cdots\cap\beta_{\alpha_k}^0\cap G^c\neq\varnothing$，其中 $G^c$ 为 $G$ 的补集. 于是 $y_0\cup G^c$ 为具有有限交性质的闭族. 随意固定 $\alpha_0$，$\beta_{\alpha_0}$ 紧，$\beta_{\alpha_0}^0\cap\beta_\alpha^0$ 及 $\beta_{\alpha_0}^0\cap G^c$ 均为 $\beta_{\alpha_0}$ 的闭子集也具有有限交性质，从而全体交非空 $(\bigcap\limits_{\alpha\in I}\beta_{\alpha_0}^0)\cap G^c\neq\varnothing$，则矛盾于 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}\beta_\alpha^0\subset G$. 故 $y_0=\{\beta_\alpha^0\}_{\alpha\in I}$ 中必有某有限个成员 $\beta_{\alpha_1}^0,\cdots,\beta_{\alpha_k}^0$，其交 $\bigcap\limits_{i=1}^k\beta_{\alpha_i}^0\subset G$. 考虑到 $\bigcap\limits_{i=1}^k\beta_{\alpha_i}^0$ 紧，有 $d(\bigcap\limits_{i=1}^k\beta_{\alpha_i}^0,G^c)=d_0\neq 0$，故有 $(\bigcap\limits_{i=1}^k\beta_{\alpha_i}^0)+d_0/3\subset G$.

因此，$\exists\varepsilon_0$，使 $\bigcap\limits_{i=1}^k(\beta_{\alpha_i}^0+\varepsilon_0)\subset(\bigcap\limits_{i=1}^k\beta_{\alpha_i}^0)+d_0/3\subset G$. $y_n\to y_0$，$\exists N$，$n\geqslant N$，$\rho_I(y_n,y_0)\leqslant\varepsilon_0$，则 $\forall\alpha\in I$ 均有 $\beta_\alpha^n\subset\beta_\alpha^0+\varepsilon_0$，故 $\bigcap\limits_{i=1}^k\beta_{\alpha_i}^n\subset\bigcap\limits_{i=1}^k(\beta_{\alpha_i}^0+\varepsilon_0)\subset(\bigcap\limits_{i=1}^k\beta_{\alpha_i}^0)+d_0/3\subset G$，则显然 $F(y_n)\subset G$. $F_I:Y_I\to 2^X$ 的上半连续得证，从而是 usco 映射. 由引理 1 知 $Y_I$ 上存在稠密剩余集 $Q$，使得 $F_I:Y_I\to 2^X$ 在 $Q$ 上连续.

定理 2 说明集族空间 $(Y_I,\rho_I)$ 上公共元通有稳定，紧空间上交运算虽然不是连续运算，但在绝大多数点上上半连续，从而在 Baire 意义下绝大多数的情形是连续的. 事实上，交运算的上半连续性是通有稳定性的一个本质特征，特别是交运算方法能够适应镶嵌拓扑结构的差异.

当然，把一般问题空间转化到集族空间的过程中，需要构造一般问题空间到集族空间的映射，某些情况下这个映射未必连续，为此考虑半连续情况. 设问题集 $M$ 是度量空间，集值映射 $F:M\to 2^X$ 是问题空间的解映射，定义单值映射 $L:M\to Y_I$，称 $L$ 在点 $h\in M$ 是半连续的，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $h'\in h+\delta$(记 $L(h')=\{\beta'_\alpha\}_{\alpha\in I}$，$L(h)=\{\beta'_\alpha\}_{\alpha\in I}$) 时，对任何 $\alpha\in I$ 均有 $\beta'_\alpha\subset\beta_\alpha+\varepsilon$；称 $L$ 在 $M$ 半连续，若 $L$ 在 $M$ 的每一点都半连续. 显然问题空间到集族空间的映射连续必然半连续.

**定理 3** 若 $M$ 上存在半连续单射 $L:M\to Y_I$，使 $F=F_I\circ L$，则存在稠密剩余集 $Q$，使 $F$ 在 $Q$ 上连续.

**证** 由 $F=F_I\circ L$ 知，$F$ 是非空紧致的. 只须证 $F$ 在 $M$ 上每一点 $h$ 处上半连续即可.

对于任何开集 $G\supset F(h)=F_I(L(h))$，有有限个 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 使 $\beta_{\alpha_i}\in L(h)$ 且 $\bigcap\limits_{i=1}^k\beta_{\alpha_i}\subset G$. 由 $\bigcap\limits_{i=1}^k\beta_{\alpha_i}$ 紧，必有 $\varepsilon>0$ 使 $(\bigcap\limits_{i=1}^k\beta_{\alpha_i})+\varepsilon\subset G$. 显然有某 $\varepsilon'>0$

使 $\bigcap_{i=1}^{k}(\beta_{\alpha_i}+\varepsilon')\subset(\bigcap_{i=1}^{k}\beta_{\alpha_i})+\varepsilon$. 对于上述 $\varepsilon'$，由于 $L$ 是半连续的，$\exists\delta>0$，当 $h'\in h+\delta$ 时（记 $L(h')=\{\beta'_\alpha\}_{\alpha\in I}$），有 $\bigcap_{\alpha\in I}\beta'_\alpha\subset\bigcap_{i=1}^{k}\beta'_{\alpha_i}\subset\bigcap_{i=1}^{k}(\beta_{\alpha_i}+\varepsilon')$，从而有 $\bigcap_{\alpha\in I}\beta'_\alpha\subset G$. 综合上述，$F$ 在 $h$ 处是上半连续的，从而是 usco 映射. 根据引理 1，存在 $M$ 的一个剩余集 $Q$，使 $F$ 在 $Q$ 上连续.

定理 3 是沟通集族空间和一般问题空间的核心环节，这说明问题空间到集族空间上的关联映射 $L$ 只需具有较弱的条件，就能够借助集合族的交运算确定通有稳定性质. 集族空间指标集的势越大，则关联映射 $L$ 的连续性越难保持，但在更弱的条件下依然能够保证 $F_I\circ L$ 的相关连续性.

# 3 Fan Ky 点多重拓扑下通有稳定性集族空间刻画

文献[14]归纳了 Fan Ky 点的广泛应用，文献[15-16]充分考虑了 Fan Ky 点在不同结构下的属性. 在不同拓扑结构下 Fan Ky 点的稳定性意义不同. 本部分运用集合族公共元方法研究 Fan Ky 点在 2 种拓扑结构下的通有稳定性.

## 3.1 水平集拓扑下 Fan Ky 点的通有稳定性

首先运用集合族公共元方法在水平集拓扑下研究 Fan Ky 点的通有稳定性. 虽然利用水平集来定义问题空间上的度量、刻画扰动会产生一些局限，但水平集拓扑更便于 Fan Ky 点和截口定理等之间关联.

设线性度量空间 $(E,d)$ 的子集 $X$ 紧凸，$\varphi: X\times X\to\mathbf{R}$ 适合

(i) $\forall y\in X,\varphi(\cdot,y)$ 下半连续;

(ii) $\forall x\in X,\varphi(x,\cdot)$ 为拟凹函数;

(iii) $\forall y\in X$ 均有 $\varphi(y,y)\leqslant 0$.

设 $M=\{\varphi: X\times X\to\mathbf{R}\mid\varphi$ 适合以上 3 条件且 $\sup_{(x,y)\in X\times Y}|\varphi(x,y)|\leqslant+\infty\}$.

根据 Fan Ky 不等式，必有 $x^*\in X$，使 $\varphi(x^*,y)\leqslant 0\ (\forall y\in X)$. 称该 $x^*$ 为 $\varphi$ 的 Fan Ky 点，记 $\varphi$ 的全体 Fan Ky 点集为 $F(\varphi)$，则 $\varphi\to F(\varphi)$ 定义了一个集值映射，记为 $F: M\to 2^X$，它是 Fan Ky 点的解映射. 紧度量空间 $(X,d)$ 必完备，首先确定指标集 $I=X$，定义集族空间 $Y_I=\{\{\beta_y\}_{y\in X}\mid\{\beta_y\}_{y\in X}$ 为 $X$ 的紧集族，适合 $\bigcap_{y\in X}\beta_y\neq\varnothing\}$，由定理 1 可知集族空间 $(Y_I,\rho_I)$ 完备.

对每一 $\varphi\in M$，定义 $\{\beta_y^\varphi\}_{y\in X}$，$\beta_y^\varphi=\{x\mid\varphi(x,y)\leqslant 0\}$. 由 $\varphi(\cdot,y)$ 下半连续知，$\beta_y^\varphi=\{x\mid\varphi(x,y)\leqslant 0\}$ 闭从而紧. 又 $\varphi: X\times X\to\mathbf{R}$ 存在 Fan Ky 点，全体 Fan Ky 点集 $F(\varphi)=\bigcap_{y\in X}\beta_y^\varphi\neq\varnothing$，则 $\{\beta_y^\varphi\}_{y\in X}\in Y_I$. 记 $\{\beta_y^\varphi\}_{y\in X}=L(\varphi)$，则 $\varphi\to L(\varphi)$ 定义了单值映射 $L: M\to Y_I$. 此处的 $\beta_y^\varphi$ 是一个特定的水平集.

在 $M$ 上引入函数 $\rho_M$ 为 $\forall\varphi_1,\varphi_2\in M,\rho_M(\varphi_1,\varphi_2)=\rho_I(\{\beta_y^{\varphi_1}\}_{y\in X},\{\beta_y^{\varphi_2}\}_{y\in X})$. 显然 $\rho_M$ 是非负值的且 $\rho_M(\varphi_1,\varphi_2)=\rho_M(\varphi_2,\varphi_1)$，$\rho_M(\varphi_1,\varphi_2)\leqslant\rho_M(\varphi_1,\varphi_3)+\rho_M(\varphi_3,\varphi_2)$ 适合三角不等式，$\varphi_1=\varphi_2\Rightarrow\rho_M(\varphi_1,\varphi_2)=0$. 事实上，$\rho_M$ 是在特定水平集上定义度量函数，但当 $\rho_M(\varphi_1,\varphi_2)=0$ 时未必有 $\varphi_1,\varphi_2$ 是 $M$ 中同一元，故称 $\rho_M$ 为伪度量. 如取 $\varphi_1\in M$，$F(\varphi_1)\neq\varnothing$，对每个 $x^*\in F(\varphi_1)$，$\forall y\in X$ 有 $\varphi_1(x^*,y)\leqslant 0$，定义

$$\varphi_2(x,y)=\begin{cases}\varphi_1(x,y), & x\neq x^*,\\ \varphi_1(x,y)-1, & x=x^*,\end{cases}$$

显然 $\varphi_2\in M$ 且 $\rho_M(\varphi_1,\varphi_2)=0$.

但文献[17]证明 $(M,\rho_M)$ 按 $\rho_M$ 的柯西列完备，而在拓扑意义上可以证明任意剩余集都稠密. 事实上，设 $G_1,G_2,\cdots,G_n,\cdots$ 是可数个开稠集，只要证 $G=\bigcap_{i=1}^{\infty}G_i$ 也在 $M$ 上稠密，为此要证任意开集 $u$，必有 $u\cap G\neq\varnothing$. 现设 $u$ 为 $M$ 中的开集，对于每个 $i\in\mathbf{N}$（自然数集），定义开球 $B(x_i,\varepsilon_i)$ 如下：首先，任取 $x_1\in M,\varepsilon_1>0$ 使 $\bar{B}(x_1,\varepsilon_1)\subset u$；对于 $i\geqslant 1$ 假设 $B(x_i,\varepsilon_i)$ 已定义，如下作出 $B(x_{i+1},\varepsilon_{i+1})$，由于 $G_i$ 是开稠集，则 $B(x_i,\varepsilon_i)\cap G_i$ 是非空开集，任取 $x_{i+1}\in B(x_i,\varepsilon_i)\cap G_i$，限 $\varepsilon_{i+1}<1/(i+1)$，使 $\bar{B}(x_{i+1}\varepsilon_{i+1})\subset B(x_i,\varepsilon_i)\cap G_i$. 根据作法知序列 $\{B(x_i,\varepsilon_i)\}$ 满足：对任何 $i\in\mathbf{N},\varepsilon_i<1/i,\bar{B}(x_{i+1},\varepsilon_{i+1})\subset B(x_i,\varepsilon_i)\cap G_i$ 且 $B(x_{i+1},\varepsilon_{i+1})\subset B(x_i,\varepsilon_i)$. 注意到伪度量空间 $M$ 是完备的（柯西列有极限），则 $\bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{B}(x_{i+1},\varepsilon_{i+1})\neq\varnothing$. 于是，$\bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{B}(x_{i+1},\varepsilon_{i+1})\subset\bigcap_{i=1}^{\infty}(u\cap G_i)=u\cap G$. 故 $u\cap G\neq\varnothing$，这说明 $M$ 的任何剩余集都稠密.

**定理 4** 在 $M$ 上必存在一个稠密剩余集 $Q$，使 $F$ 在 $Q$ 上连续.

证 作映射 $L: M\to Y_I$ 为 $L(\varphi)=\{\beta_y^\varphi\}_{x\in X}$. 显然 $L$ 是连续单射，且 $L$ 是 $M\to Y_I$ 的半连续映射. 而 $F: M\to 2^X$ 可以写为 $F=F_I\circ L$，根据定理 3 结论成立.

定理 4 说明 Fan Ky 点关于水平集度量是通有稳

定的,当然这里的度量是伪度量. 文献[18]中设$(M,\rho_M)$为伪度量空间,定义$B(x,r)=\{y:\rho_M(x,y)<r\}$为以$x$为球心、$r$为半径的开球,把开球作为开集,则所有开球形成了$M$的一个拓扑子基,故伪度量空间也能够导出拓扑空间,并且这里导出的拓扑未必比严格的度量空间导出的拓扑更弱.

### 3.2 Hausdorff 拓扑下 Fan Ky 点的通有稳定性

按水平集拓扑确定指标集$I=X$,定义集族空间$Y_I=\{\{\beta_y\}_{y\in X}\}$,$(Y_I,\rho_I)$完备. 但在这里的$Y_I=\{\{\beta_y\}_{y\in X}\}$赋予 Hausdorff 拓扑时,虽然有关 Fan Ky 点的解映射能够表示为由问题空间到集合族空间上的映射和公共元映射的合成,但从问题空间到集合族空间上的映射不是半连续的,所以需要重新设置新集合族空间.

同样,设线性度量空间$(E,d)$的子集$X$非空紧凸,$\varphi:X\times X\to\mathbf{R}$适合

(i) $\forall y\in X$,$\varphi(\cdot,y)$下半连续;

(ii) $\forall x\in X$,$\varphi(x,\cdot)$为拟凹函数;

(iii) $\forall y\in X$,均有$\varphi(y,y)\leqslant 0$.

同样设$M=\{\varphi:X\times X\to\mathbf{R}\mid\varphi$适合上述3个条件且$\sup\limits_{(x,y)\in X\times Y}|\varphi(xy)|\leqslant+\infty\}$;$\forall f,g\in M$,记$\rho_M(f,g)=\sup\limits_{(x,y)\in X\times Y}|f(x,y)-g(x,y)|$,易证$(M,\rho_M)$完备. 记$\varphi$的全体 Fan Ky 点之集合为$F(\varphi)$,$\varphi\to F(\varphi)$定义了解映射$F:M\to 2^X$.

为利用度量空间$(E,d)$的紧子集$X$上导出的 Hausdorff 拓扑定义扰动,需要在更大数量的集合形成集族空间. 为此,对于以上紧度量空间$(X,d)$,$(X,d)$完备,以$X\times\mathbf{N}$为指标集(其中$\mathbf{N}$为自然数集),定义集族空间$Y_I=\{\{\beta_{(y,n)}\}_{(y,n)\in X\times\mathbf{N}}\mid\{\beta_{(y,n)}\}_{(y,n)\in X\times\mathbf{N}}$闭集族且适合$\bigcap\limits_{(y,n)\in X\times\mathbf{N}}\beta_{(y,n)}\neq\varnothing\}$. 显然$(Y_I,\rho_I)$完备,这里$\rho_I$是集族空间上的度量,公共元映射$F_I$是 usco 映射.

又对每一$\varphi\in M$,定义$\{\beta^{\varphi}{}_{(y,n)}\}_{(y,n)\in X\times\mathbf{N}}$,其中$\beta^{\varphi}_{(y,n)}=\{x\mid\varphi(x,y)\leqslant 1/n\}$. 由于$\varphi(\cdot,y)$下半连续,故$\beta^{\varphi}_{(y,n)}=\{x\mid\varphi(x,y)\leqslant 1/n\}$闭. 又由于$\varphi:X\times X\to\mathbf{R}$存在 Fan Ky 点,明显$\varphi$的全体 Fan Ky 点的集合$F(\varphi)=\bigcap\limits_{(y,n)\in X\times\mathbf{N}}\beta^{\varphi}_{(y,n)}\neq\varnothing$,则$\{\beta^{\varphi}_{(y,n)}\}_{(y,n)\in X\times\mathbf{N}}\in Y_I$. 记$\{\beta^{\varphi}_{(y,n)}\}_{(y,n)\in X\times\mathbf{N}}=L(\varphi)$,则$\varphi\to L(\varphi)$定义了一个单值映射$L:M\to Y$.

**定理5** 在$M$上存在一个稠密剩余集$Q$,使$F$在$Q$上连续.

**证** 显然$F=F_I\circ L$,故$F_I$非空紧致,只需证明$F_I$的上半连续性,即可证明$F$是 usco 映射.

对任意$\{\varphi_n\}$,$\varphi_n\to\varphi_0$,取$X$中任何开集$G\supset F(\varphi_0)$,则$\bigcap\limits_{(y,n)\in Y\times\mathbf{N}}\beta^{\varphi_0}_{(y,n)}\subset G$,由于紧必有有限个成员之交含于$G$中,故设$\beta^{\varphi_0}_{(y_i,n_i)}(1\leqslant i\leqslant k)$使得$\bigcap\limits_{i=1}^{k}\beta^{\varphi_0}_{(y_i,n_i)}\subset G$.

又设$n_0=\max\{n_1,n_2,\cdots,n_k\}$,则$\bigcap\limits_{i=1}^{k}\beta^{\varphi_0}_{(y_i,n_0)}\subset G$,另取$n_l=n_0+1$,则$1/n_l<1/n_0$. 由于$\varphi_n\to\varphi_0$,取$2\varepsilon=1/n_0-1/n_l$,$\exists N>0$,当$n>N$时,$|\varphi_n(x,y)-\varphi_0(x,y)|<\varepsilon$恒成立. 当$x$适合$\varphi_n(x,y_i)\leqslant 1/n_l$时,则有$\varphi_0(x,y_i)\leqslant 1/n_0$,故$\beta^{\varphi_n}_{(y_i,n_l)}\subset\beta^{\varphi_0}_{(y_i,n_0)}$,从而$\bigcap\limits_{i=1}^{k}\beta^{\varphi_n}_{(y_i,n_l)}\subset G$,即有$F_I(L(\varphi_n))\subset G$,则$F(\varphi_n)\subset G$,$F$的上半连续得证

综合上述,$F:M\to 2^X$是 usco 的. 由引理1知,在$M$上存在一个稠密剩余集$Q$,使$F$在$Q$上连续.

定理5说明,Hausdorff 拓扑下 Fan Ky 点具有通有稳定性.

## 4 结束语

Fan Ky 点的通有稳定性可以转化为集族空间的公共元通有稳定性. 由于 Fan Ky 点可以采用不同的拓扑结构来描述扰动,所以它们都可以用集族空间的公共元通有稳定性来分析,这也说明集族空间公共元通有稳定性方法具有很好的适用性. 有文献表明即使当问题空间的解映射不能只由$F_I\circ L$合成,而要包含投影映射时,集族空间公共元通有稳定性方法仍然具有很好的适用性. 当然,对集族空间还可以进一步研究,一方面,可以赋予指标集以拓扑结构,这将有更强的结论;另一方面,可以减弱对指标集的要求,直至去掉指标集,这样将使集族空间有更广泛应用. 而通过运用交运算的方法研究通有稳定性,进而判断现实问题中模型构造和相关解概念构造的合理性也更为便利.

## 5 参考文献


[1] Tan K K,Yu Jian,Yuan Xianzhi. The stability of coincident points for multivalued mappings [J]. Nonlinear Analysis,1995,25(2):163-168.

[2] Carbonell-Nicolau O. Further results on essential Nash equilibria in normal-form games [J]. Economic Theory,2015,59(2):277-300.

[3] Fort M K. Points of continuity of semi-continuous functions [J]. Publ Math Debrecen,1951(2):100-102.

[4] Yu Jian，Xiang Shuwen. The stability of the set of KKM points [J]. Nonlinear Analysis，2003，54(5)：839-844.
[5] Fan K. A minimax inequality and applications：Inequalities III [M]. New York：Academic Press，1972.
[6] 陈剑尘，龚循华. 锥凸对称向量拟均衡问题解集的通有稳定性 [J]. 数学物理学报，2010，30(4)：1006-1017.
[7] 贾文生，向淑文. 信息集广义多目标对策弱 Pareto-Nash 平衡点的存在性和稳定性 [J]. 运筹学学报，2015，19(1)：9-17.
[8] 高静，邬冬华，张广. 不确定条件下 $n$ 人非合作博弈均衡点集的通有稳定性 [J]. 应用数学与计算数学学报，2014，28(3)：336-342.
[9] 杨光惠，向淑文. 广义极大元的通有稳定性 [J]. 广西师范大学学报：自然科学版，2013，31(1)：54-56.
[10] 左勇华. 集合族交运算的上半连续性和公共元的通有稳定性 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2012，36(1)：67-70.
[11] 张德金. 有限理性与 KKM 点集的稳定性 [J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2011，28(1)：31-34.
[12] 俞建. 关于良定问题 [J]. 应用数学学报，2011，34(6)：1007-1022.
[13] 俞建. 良定叠合点问题 [J]. 贵州科学，2001，19(3)：1-4.
[14] 俞建，袁先智. 樊畿不等式及其在博弈论中的应用 [J]. 应用数学与计算数学学报，2015，29(1)：59-68.
[15] 文开庭. 转移紧开覆盖的新的 Fan Ky 匹配定理及其对极大元的应用 [J]. 数学进展，2009，38(3)：295-301.
[16] 张石生，康世焜，郭伟平. Fan Ky 匹配定理的推广及应用 [J]. 四川大学学报：工程科学版，1994(6)：53-59.
[17] 左勇华，卢美华. 集族交运算的连续性和不动点、Fan Ky 点的通有稳定性 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2016，40(1)：39-42.
[18] Klein E，Thomson A. Theory of correspondences [M]. New York：Wiley，1984.

# The Generic Stability of Fixed Point and Fan Ky Point in Diverse Topology

HUANG Hui[1,2]，ZUO Yonghua[3*]，LU Meihua[4]
(1. College of Education，Jiangxi Normal University，Nanchang Jiangxi 330022，China；
2. Duchang No. 2 Middle School in Jiangxi，Jiujiang Jiangxi 332600，China；
3. Graduate School at Shenzhen，Tsinghua University，Shenzhen Guangdong 518055，China；
4. School of Science，Jiangxi University of Technology，Nanchang Jiangxi 330022，China)

**Abstract**：A family-of-set space is established. And its common elements´ generic stability is studied. The upper semi-continuity of operation of sets´ intersection in family-of-closed-set space is obtained. And generic stability of Fan Ky point is studied in diverse topology. It has good applicability of the method of sets´ intersection in family-of-closed-set space.

**Key words**：family-of-set space；common elements；Fan Ky point

(责任编辑：曾剑锋)