第41卷 第3期
2017年5月

江西师范大学学报(自然科学版)
Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)

Vol.41 No.3
May 2017

文章编号:1000-5862(2017)03-0296-06

知识状态的不同表达及其应用

丁树良,罗　芬,汪文义,熊建华

(江西师范大学计算机信息工程学院,江西 南昌 330022)

摘要:知识状态可用可达阵 R 的列的布尔并表示,但表示方式不唯一,由此引出累赘表达式和简洁表达式的概念及其作用,并将某些结果推广到多值 Q 矩阵.

关键词:扩张算法;累赘表达式;R-等价类;多值 Q 矩阵

中图分类号:B 841.7　　文献标志码:A　　DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2017.03.16

0 引言

给定属性个数及其层级关系,就可计算可达矩阵 R,在 R 的基础上,应用扩张算法[1-3]可以获得潜在 Q 矩阵[4],或者使用缩减算法[5-6]获得简化 Q 矩阵.所谓潜在 Q 矩阵就是简化 Q 矩阵,也就是所有非零的知识状态(项目)的属性向量.扩张算法或者渐近式扩张算法[7]可以将可达阵扩张成为潜在 Q 矩阵.扩张算法是一个简单的算法,基于可达阵 R 的扩张算法如下:

1)给定 R,令 $Q=R$ 并且令 $j=1$;

2)将 Q 第 j 列和 j 列右边所有列作布尔并,若布尔并的结果和 Q 阵中已有列均不相同(即生成新的列),则在 Q 的最右边增加这个新列以扩充 Q,扩充后的 Q 阵仍然记为 Q;

3)$j=j+1$,若 $j\leqslant K$ 则转2),否则结束.

根据扩张算法,任意一个知识状态,可以表为 R 列的布尔并,也称为 R 列的线性组合[8],组合系数为0或1.这是可达阵的一个重要性质,而且已经证明,可达矩阵 R 的这个性质是潜在 Q 矩阵中任何其他的上三角子矩阵不可替代的[8].R 列的线性组合表示知识状态,但是表示的方式不一定唯一;实际上也就是知识状态分解为 R 列的布尔并时,分解方式不唯一.

R 的列(代表题目所测属性或者知识状态)经过交换以后(置换变换),虽然不是上三角矩阵,但知识状态仍然可以由它列的线性组合表示[8].本文试图从知识状态由可达阵列的线性组合表示,但是表示方式不一定唯一入手,讨论这些表示形式之间的关系和应用.以下将“知识状态可由可达阵的列的线性组合表示,但是表示方式不唯一”简称为“知识状态分解方式不唯一”.

本文先给出一些约定和符号,然后讨论非零知识状态的不同分解方式之间的关系,以及这些不同分解方式在定理证明、补救教学和对“教学目标诊断”的解释中的应用,并且将某些结果推广到多值 Q 矩阵.

1 记号和约定

给出 K 个属性 A_j,$j=1,2,\cdots,K$ 及其层级关系 H,可以获得相应的Hasse图[9],由Hasse图可获得邻接矩阵 A,它表示属性之间的直接先决关系(immediate prerequisite relation)[8].A 是反自反、反对称、反传递关系的关系矩阵.A 可以表示认知模型,即属性及其层级关系.令 $B=A+E$,这里 E 是和 A 同阶的单位矩阵.对 B 使用Warshall算法[9]可获得可达阵 R.R 表示属性之间的直接和间接关系,也就是 R 的第 j 列 r_j 表示1条到属性 A_j 的路,即 r_j 中非零元对应到 A_j 的结点.R 是满足自反、反对称、传递关系的偏序关系的关系矩阵,显然其对角元均为1.若无特别说明,本文的可达阵 R 是在Hasse图基础上导出的,因此是0-1上三角矩阵.如上所述,根据

收稿日期:2017-02-12

基金项目:国家自然科学基金(31360237,31500909,31300876,31160203,31100756,30860084,11401271)资助项目.

作者简介:丁树良(1949-),男,江西樟树人,教授,主要从事计算辅助教学及教育和心理测量方面的研究.E-mail:ding06026@163.com

可达阵，使用文献 [5-6] 的方法或者扩张算法可以得到行对应属性、列对应题目的潜在 Q 矩阵(记为 Q_p)；使用文献 [4] 的术语，潜在 Q 矩阵添加一个零列，称为学生 Q 矩阵，记为 Q_s. 扩张算法可以揭示学生 Q 矩阵中每一列的构成和可达阵列之间的关系. 每 1 个认知诊断测验，对应一个 Q 矩阵，本文称之为测验 Q 矩阵，记为 Q_t，它是 Q_p 的子矩阵. 这里约定，测验 Q 矩阵的列不重复.

可达阵 R 的每 1 列表示的是 1 条路. 为了便于引用，本文将其列为如下引理.

引理 1　可达阵的第 j 列表示 1 条到属性 A_j 的路，r_j 中非零元对应这条路上的结点(属性)，这些结点对应 A_j 的先决属性，反之 A_j 的所有先决属性均在这条路上，$j = 1, 2, \cdots, K$.

通俗地说，对以上三角矩阵形式出现的可达阵来说，第 j 列上非零元素表达“目的地”为属性 A_j 的路上的“接力站”.

由于属性可能存在层级关系，采取基本层级关系划分为独立型、根树型和菱形的方式 [10-11]，这是 K. K. Tatsuoka 等 [12] 的 4 种基本层级关系的补充和概括.

本文用 $x \leqslant y$ 表示 2 个维数相同的向量之间的“大小”关系，如果 y 的每 1 个分量不小于 x 的相应分量; 如果 $x \leqslant y$ 并且至少 y 有 1 个分量大于 x 的对应分量，这时称 x 小于 y，记为 $x < y$.

2　0-1 情形下扩张算法的进一步的结果

前文述及 Q_s 中任何 1 个列向量均可表示为 R 列的线性组合，但是表述方式不唯一. 因为零向量的表示是微不足道(trivial) 的，所以本文不考察零向量的表示，而仅仅考察非零向量的表示.

若 x 是 Q_p 中 1 列，则由扩张算法，由上所示，x 可以由可达阵 R 的列线性表示，但表示方式可以不唯一.

令 $S_x = \{r \mid (r \text{ 是 } R \text{ 的列}) \text{ 并且} (r \leqslant x)\}$.

定义 1　S_x 中所有向量的布尔并称为 x 的“累赘”表达式. S_x 中每 1 个列均称为 x 的组合分量，也称组合分量为构成向量 [13].

定义 2　S_x' 是 S_x 的子集，并且 S_x' 中任何 2 个不同的向量均不可比较，则 S_x' 中所有向量的布尔并称为 x 的简洁表达式.

例 1　$K = 5$，层级关系如图 1 所示.

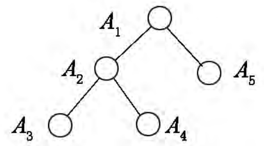

图 1　5 属性根树型

$$R = \begin{bmatrix} 11111 \\ 01110 \\ 00100 \\ 00010 \\ 00001 \end{bmatrix} = [r_1 r_2 r_3 r_4 r_5],$$

$$Q_p = \begin{bmatrix} 1111111111 \\ 0111011111 \\ 001\ 0001101 \\ 0001001011 \\ 0000110111 \end{bmatrix} = [r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 q_6 q_7 q_8 q_9 q_{10}],$$

$q_6 = r_2 \vee r_5$(q_6 的简洁表达式) $= r_1 \vee r_2 \vee r_5$(q_6 的累赘表达式).

显然，任何一个知识状态 x 既有累赘表达式又有简洁表达式，这是因为集合 S_x 和 S_x' 都不是空集. 而且知识状态 x 的累赘表达式和简洁表达式相等，当且仅当简洁表达式中仅含 1 个组合分量. 事实上，如果简洁表达式至少包含 2 个不同的组合分量，则任意选取 2 个不同的组合分量的布尔并必然是累赘表达式中的 1 个组合分量，这和 2 种表达式相等的假设矛盾.

更进一步，如果知识状态 x 的这 2 种表达式相等，这时，x 是单位矩阵中的某 1 列. 反证之，如果这 1 列至少包含 2 个不等于 0 的分量，注意到 x 的累赘表达式和简洁表达式相等，这时 x 本身就是 R 中的某 1 列. 由于 R 表达属性之间直接或间接关系，如果至少包含 2 个非零元素的 x 表达的是属性之间的直接关系，则必定有一个属性是另一个属性的直接先决(immediately prerequisite) 属性 [6]，比如说 u 是 v 的直接先决，则属性 u 所在的行对应的第 u 列的元素为 1，这个 u 列必定是 R 的列并且一定小于 x，于是 u 列和 x 列应该在累赘表达式之中. 这和累赘表达式仅仅包含 1 列矛盾; 如果 x 表达的是属性之间间接关系，则 x 当然可以表示成为 R 的若干个表示属性之间直接关系的列的布尔并. 这又和累赘表达式仅仅包含 1 列矛盾. 因此这时候 x 只能够包含 1 个且仅仅 1 个非零元素，即为单位矩阵的某 1 列.

累赘表达式和简洁表达式的可能应用: 1) 如果某个题目当中所有属性代表一个教学目标，而有的

学生达到这个目标有困难,老师对这一类学生的辅导可能有的路径对应于累赘表达式中组合分量的数目,而对应的简洁表达式是最快的补救路径;2) 教学目标可以分成"简单"和"复杂"2 类.所谓"简单"的教学目标,对应表示成上三角形式的可达阵的对角元对应的属性;要达到这个教学目标,可能要掌握若干个位于这条路(对应可达阵的 1 列)上的所有属性."复杂"的教学目标是几个"简单"的教学目标的复合,对应于潜在 Q 矩阵中由可达阵扩张出来的列,或者说对应复合成为这 1 列的组合分量."复杂"教学目标的命名要由学科专家、命题专家给出.这样,有可能将传统的基于经典测量理论的"教学目标诊断"方法转向和基于使用认知诊断模型的现代认知诊断方法结合.比如可以找出 2 种方法的不同,又比如"教学目标诊断"可以采用现代的认知诊断测验的设计原理进行设计;3) 其他应用见本文的定理 1 和定理 2.

定理 1 $\boldsymbol{\alpha} \in Q_S$,$\boldsymbol{\alpha} = \bigvee_{j=1}^{h} \boldsymbol{r}_{ij}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的累赘表达式,将单位阵 E 按列划分,$E = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_k)$,则 $\boldsymbol{\alpha} = \bigvee_{j=1}^{h} \boldsymbol{r}_{ij} = \sum_{j=1}^{h} \boldsymbol{e}_{ij}$,$\sum_{j=1}^{h} \boldsymbol{e}_{ij} = \bigvee_{j=1}^{h} \boldsymbol{e}_{ij}$.

证 注意到 R 是对角元均为 1 的上三角阵,故 $\bigvee_{j=1}^{h} \boldsymbol{r}_{ij}$ 在 $i_1,i_2,\cdots,i_h$ 位置必定为 1,从而

$$\sum_{j=1}^{h} \boldsymbol{e}_{ij} \leqslant \bigvee_{j=1}^{h} \boldsymbol{r}_{ij}, \tag{1}$$

往证 $\sum_{j=1}^{h} \boldsymbol{e}_{ij} < \bigvee_{j=1}^{h} \boldsymbol{r}_{ij}$ 不成立.若不然,存在某个 $\boldsymbol{r}_t \in S_\alpha$,$\boldsymbol{r}_t$ 中有 1 个元素 $r_{wt} = 1$,且 $w \notin \{i_1,i_2,\cdots,i_h\}$.由于 $\boldsymbol{r}_t$ 中不等于 0 的元素的最大足标为 t,且 $w < t$,于是可知 R 中第 w 列 $\boldsymbol{r}_w \leqslant \boldsymbol{r}_t$,但 $\boldsymbol{r}_t \leqslant \boldsymbol{\alpha}$,故 $\boldsymbol{r}_w \leqslant \boldsymbol{\alpha}$,由 $\boldsymbol{\alpha}$ 的累赘表达式定义,知 $\boldsymbol{r}_w$ 应在 $\bigvee_{j=1}^{h} \boldsymbol{r}_{ij}$ 之中,这与 $w \notin \{i_1,i_2,\cdots,i_h\}$ 矛盾,所以 $\bigvee_{j=1}^{h} \boldsymbol{r}_{ij} = \sum_{j=1}^{h} \boldsymbol{e}_{ij}$.证毕.

例 2 (续例 1).例 1 中的 $\boldsymbol{q}_6 = \boldsymbol{r}_1 \vee \boldsymbol{r}_2 \vee \boldsymbol{r}_5 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_5$.

任意一个知识状态当然可表示为单位矩阵列的线性组合,定理 1 还指出,任意一个知识状态也可表示为可达阵的列的线性组合,有趣的是,累赘表达式中组合分量的下标和由单位矩阵列的线性组合的组合分量的下标完全一致.而 R-等价类中不等于 R 的矩阵的列虽然可以将知识状态表示出来,但是其表达形式不一定满足定理 1.例如 $K = 4$,独立属性,将单位矩阵的第 1,2,3,4 列分别放在第 2,3,4,1 列,得到的是 R-等价类中的矩阵,记为 R_2,若 R_2 按列剖分为 $(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_4)$,对于知识状态 $(0,1,1,1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{r}_1 \vee \boldsymbol{r}_2 \vee \boldsymbol{r}_3$.这时 2 组的组合分量的下标不重合.

引理 2 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 Q_S 的列,$\boldsymbol{\alpha}$ 中等于 1 的元素的个数,等于其累赘表达式中组合分量的个数.

证 定理 1 中 $\boldsymbol{\alpha}$ 的累赘表达式中组合分量和单位矩阵的列一一对应,而由单位矩阵列的相加,立即得到这个结论.证毕.

假设 $\boldsymbol{r}$ 是测验项目的属性向量,$\boldsymbol{\alpha}$ 是被试的知识状态,用 $\boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{r}$ 表示 $\boldsymbol{\alpha}$ 在测验项目上的理想反应.如果 Q_t 是测验 Q 矩阵,用 $\boldsymbol{\alpha} \circ Q_t$ 表示在这个测验上的理想反应模式.

定理 2 在 0-1 评分和属性之间无补偿条件下[14-15],$\forall \boldsymbol{\alpha} \in Q_s$,有

$$\boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}. \tag{2}$$

注意,这时 $\boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{R}$ 为行向量,$\boldsymbol{\alpha}$ 为列向量,所以(2)式最右边必须加上转置符号.

证 取 $\boldsymbol{\alpha}$ 的累赘表达式 $\boldsymbol{\alpha} = \bigvee_{j=1}^{h} \boldsymbol{r}_{ij}$.则对所有 $\boldsymbol{r}_{ij} \in \{\boldsymbol{r}_{i1},\boldsymbol{r}_{i2},\cdots,\boldsymbol{r}_{ih}\}$,有 $\boldsymbol{r}_{ij} \leqslant \boldsymbol{\alpha}$,从而 $\boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{r}_{ij} = 1$.从而 $\boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{R} = (\boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{r}_k) = \sum_{j=1}^{h} \boldsymbol{e}_{ij}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$.证毕.

丁树良等[14-15]给出定理 2,但是这里的证明使用学生 Q 矩阵中的向量的累赘表达式的概念,证明的思路是新的.

称可达阵的列经过置换以后使得到的矩阵的全体为 R-等价类.准确地说,R-等价类 $= \{P \mid P = RG, G$ 是置换矩阵$\}$.需要注意的是如果 R_1 是 R-等价类中和 R 不相等的元素(矩阵),则 R_1 作为测验 Q 矩阵,却不可能保证任何一个知识状态对应的理想反应模式的转置仍然是这个知识状态.因为对于 R_1,这时候知识状态对应的理想反应模式的转置中,分量的顺序发生了变化[8].这一点,在文献[10-11]中没有考虑到,所以这里作为一个引理给出.

引理 3 假设 R_1 是 R-等价类中不等于 R 的矩阵,则对任意 2 个不同的知识状态 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$,$\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$,则 $\boldsymbol{\alpha} \circ R_1 \neq \boldsymbol{\beta} \circ R_1$;然而对于任意的知识状态 $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\alpha} \circ R_1 = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不一定成立,而 $\boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 一定成立.

证 因为 $\boldsymbol{\alpha} \circ R_1$ 仅仅是 R 的列经过置换而得,所以 $\boldsymbol{\alpha} \circ R_1$ 只是 $\boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{R}$ 经过置换即得.从而得出第 1

个结论；文献［14-15］已经证明对于任意的知识状态 α，$\alpha \circ R = \alpha^T$ 一定成立，但是对于任意的知识状态 α，$\alpha \circ R_1$ 是 α 的转置，所以不能够保证 $\alpha \circ R_1 = \alpha^T$. 证毕.

R 经过列的置换以后，不能够保持上三角这种阶梯形的形状. 若 R 的行，列经过相同的置换后（记为 $R0$）可保持是三角阶梯形，但还是不能保证对一切知识状态 x，$x \circ R_0 = x^T$

3　多值 Q 矩阵情形

0-1 矩阵的扩张算法是在可达阵的基础上进行的（当然也可以在任意 Q 矩阵的基础上进行形式上的扩张，但是这样做不能够保证所有的知识状态都能够扩张出来），所以讨论多值情形下的扩张算法，首先介绍将 0-1 可达阵转化为多值拟可达阵的膨胀算法[13-14]. 这个膨胀算法是根据 Sun Jianan 等[15]的做法开发的. 设有 K 个属性 $A_1, A_2, \cdots, A_K$，属性 A_i 的最高水平为且为 w_i，$w_i \geqslant 1$ 整数，$i = 1, 2, \cdots, K$，记 $w = \sum_{j=1}^{K} w_j$. 先依照属性及其层级关系给出 $K \times K$ 的 2 值可达阵 R_2，然后对 R_2 的（i，i）元，扩充为 1 个 w_i 行向量（$1, 2, \cdots, w_i$），$i = 1, 2, \cdots, K$，于是将 $K \times K$ 的 R_2 矩阵“膨胀”为 1 个 $K \times \sum_{i=2}^{K} w_i$ 的多值可达阵 R_p.

多值情形的扩张算法实质上是将 0-1 情形的扩张算法中布尔并运算 $a \vee b$ 修改为 $\max(a, b)$ 即可. 具体地讲，第 1 步将拟可达阵 R_p 按列剖分：$R_p = (r_1, r_2, \cdots, r_w)_{K \times w}$；第 2 步，对 R_p 实施扩张算法.

将基于 R_p 使用多值扩张算法获得的矩阵称为多值潜在 Q 阵（记为 $Q_p^{(p)}$），由此可以得到多值学生 Q 阵和多值测验 Q 阵. 可以得到如下的引理.

引理 4[13]　任取 $Q_p^{(p)}$ 中 1 列记为 α，则 $\alpha = \bigvee_{t=1}^{h} r_{i_t}$，$r_{i_t}$ 是 R_p 中的列，即 α 可以表示为 R_p 中列的布尔并.

证　由扩张算法即得.

对于多值 Q 矩阵中的向量表成拟可达阵[13]中的列的线性组合，同样定义累赘表达式和简洁表达式. 以下讨论累赘表达式中包含多少个组合分量的问题.

定理 3　假设 α 是多值 Q 矩阵的列向量，并且它具有累赘表达式 $\alpha = \bigvee_{t=1}^{h} r_{i_t}$，则 α 中所有元素的和等于组合分量的个数 h.

对于定理 3，最简单的证明方法是采用膨胀算法将多值 Q 矩阵（包括拟可达阵）进行膨胀，化成 0-1（布尔）矩阵[13]，然后用上述布尔矩阵的相关结论.

虽然丁树良等[13-14]讨论了多值 Q 矩阵中拟可达阵的重要作用，但是多值 Q 矩阵的理想反应模式的计算仍然采用 Sun Jianan 等[15]的方式. 事实上，多值 Q 矩阵中理想反应模式的计算问题，由评分规则确定，也就是说，不同的评分规则，导致不同的理想反应和理想反应模式. 这里介绍另外一种计算 $\alpha \circ R_p$ 的方法，使用这种评分规则，可以使得 $\alpha \circ R_p$ 的维数和知识状态 α 的维数相同. 一般来讲，如果将 R_p 的每 1 列当做 1 个题目，知识状态在所有题目上的理想反应，构成这个知识状态在测验 R_p 上的理想反应模式. 这时候理想反应模式的维数是 w 维，它大于 K. 如果想获得 K 维的理想反应模式，可以按照“膨胀算法”的“反方向”，即压缩的方式这样设计评分规则.

注意属性 A_i 的最高水平为 w_i，$w_i \geqslant 1$ 且为整数，$i = 1, 2, \cdots, K$，将 R_p 按照 A_i 的最高水平为 w_i 进行列的剖分，分成 K 列块，而知识状态 α 在第 i 列块的 w_i 个列（对应 w_i 个题目）的理想反应模式进行布尔并，获得这个知识状态在第 i 个题目上的理想得分，$i = 1, 2, \cdots, K$. 这里所谓的知识状态 α 在题目 q 上的理想得分 $\alpha \circ q$，其中 $q^T = (q_1, q_2, \cdots, q_K)$，是指若 $\alpha \geqslant q$，则 $\alpha \circ q = \max\{q_1, q_2, \cdots, q_K\}$；如果 $\alpha < q$，则理想得分等于 0；而 α 在第 i 列块的 w_i 个列（对应 w_i 个题目）的理想反应模式进行布尔并（即再对 w_i 个理想得分进行求取最大运算），得到知识状态 α 在第 i 列块的 w_i 个列的综合得分. 这个评分规则就是对于同一个属性的不同水平，被试可以对这一组题目反应，但是仅仅选择这组题目中的那个适合被试水平的题目评分.

例 3　3 个属性 A_1, A_2, A_3，并且 A_i 的最高水平数分别为 $w_i = 4 - i$，$i = 1, 2, 3$ 这 3 个属性的层级关系图如图 2 所示.

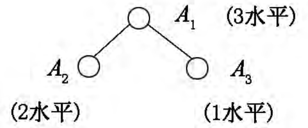

图 2　3 属性多水平的例子

每一个属性对应 1 个子块，第 i 个子块有 w_i 个题目，但仅仅给出 1 个分数. 在第 i 个子块上的评分方

式为: $\max\limits_i\{(\max\limits_h\{q_{hi}\}\cdot I(\boldsymbol{\alpha}\geqslant \boldsymbol{q}_i))\}$. 最里面 max 比较的范围是 $h=1,2,\cdots,K$, $I(x\geqslant y)$ 是示性函数, 当且仅当 $x\geqslant y$ 时, $I(x\geqslant y)=1$, 否则 $I(x\geqslant y)=0$, 最外面比较的范围是 i, $i=1,2,\cdots,w_i$.

$$\boldsymbol{R}_2=\begin{pmatrix}111\\010\\001\end{pmatrix}\to\boldsymbol{R}_p=\left(\begin{array}{ccc|cc|c}1&2&3&1&1&1\\0&0&0&1&2&0\\0&0&0&0&0&1\end{array}\right),$$ $\boldsymbol{R}_p$ 是 3×6 矩阵.

$$\boldsymbol{Q}_p=\begin{bmatrix}123111222333123123\\000120120120111222\\000001001001111111\end{bmatrix},$$ $\boldsymbol{Q}_p$ 是 3×18 矩阵.

$$\boldsymbol{\alpha}_1\circ\boldsymbol{R}_p=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\circ\left(\begin{array}{c|c|c}123&11&1\\000&12&0\\000&00&1\end{array}\right)=(1\vee2\vee3,1\vee0,1)=(3,1,1)=\boldsymbol{\alpha}_1{}^{\mathrm T}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2\circ\boldsymbol{R}_p=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\circ\left(\begin{array}{c|c|c}123&11&1\\000&12&0\\000&00&1\end{array}\right)=(1\vee0\vee0,1\vee2,1)=(1,2,1)=\boldsymbol{\alpha}_2{}^{\mathrm T}.$$

定理 4 在上述理想得分模式的约定下, 有 $\boldsymbol{\alpha}\circ\boldsymbol{R}_p=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}$.

证 显然, 根据评分规则, $\boldsymbol{\alpha}\circ\boldsymbol{R}_p$ 是 K 维行向量. 根据 2 值可达阵膨胀出多值拟可达阵的算法[13-14], 多值拟可达阵的第 j 列块包含 w_j 列, 而且第 j 列块的第 j 行块包含第 j 个属性的最高水平, $j=1,2,\cdots,K$.

然后根据上述评分方式, 知识状态的第 t 元素和拟可达阵的第 j 列块的第 t 行块中元素进行比较, 注意只有知识状态向量 α 不小于题目 j 的属性向量, 具有知识状态 α 的被试在题目 j 上的理想得分才不等于 0; 此时, 知识状态向量 α 和第 j 题属性向量每 1 个分量进行比较, 即 $t=1,2,\cdots,K$, 取第 j 题属性向量中最大分量作为理想得分. 根据拟可达阵的构造, 这个最大分量位于拟可达阵的第 j 行块, 实际上是拟可达阵的第 j 行, 也就是题目属性向量的第 j 个分量.

由于第 j 个属性有 w_j 个水平, 对应 w_j 个题目, 根据上述法则, 可以导出知识状态 α 在每 1 个题目的理想得分. 将这些理想得分进行比较, 取其最大者作为在属性 j 对应的 w_j 个题目上的得分. 记这个理想得分为 s, 再一次注意当且仅当知识状态不小于题目属性向量时, 理想得分才不为 0, 所以 s 等于知识状态的第 j 分量, $j=1,2,\cdots,K$. 定理 4 证毕.

如果定理 4 用于 0-1 矩阵, 则由于 0-1 矩阵中最大元素是 1, 也可以想象为最高水平为 1, 分块矩阵的每 1 个子块刚好是 1 行 1 列, 所以定理 2 的结论可以作为定理 4 的特殊情况.

4 结论和讨论

本文从扩张算法给出任一个知识状态可以表成可达阵的列的线性组合入手, 给出累赘表达式和简洁表达式的概念及其初步应用. 在 0-1 评分且属性之间无补偿条件下, 指出知识状态的累赘表达式中组合分量的数目等于这个知识状态中非零元的个数, 并且给出可达阵的重要性质另外的证明. 对于多值 Q 矩阵也进行了类似的讨论.

在多值 Q 矩阵的情形下, 知识状态的累赘表达式(简洁表达式)在定理 4 的证明中, 没有起到累赘表达式在定理 2 那样的作用, 这似乎有一点遗憾. 但是, 如果在多阶段自适应诊断测验中[16], 第 1 阶段的题目的属性向量对应多值可达阵(题目属性向量不变, 但是内容可以变化), 采用这种评分模式, 或许对知识状态的估计更加直接.

关于多值 Q 矩阵, 有研究者质疑先决属性的低水平能达到后继属性的较高水平的假设(比如例 3 中知识状态 $(1,2,0)^{\mathrm T}$ 是不是合乎逻辑), 这一点和本文讨论的多值扩张算法相关, 但是限于本文主旨, 不在此讨论这个问题.

本文定理 2 和定理 4 属于 Q 矩阵理论的内容. 且介 绍的多值 Q 矩阵的理想得分的评分方式是多级评分, 它仍然是在属性之间非补偿作用的假设之下做出的. 不论 0-1 评分还是多级评分, 也不管是 0-1 Q 矩阵还是多值 Q 矩阵, 在属性之间存在补偿条件下, Q 矩阵理论的探索, 是一个具有挑战性的问题.

5 参考文献

[1] 左孝凌, 李为鑑, 刘永才. 离散数学[M]. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1982.

[2] Tatsuoka K K. Cognitive assessment: an introduction to the rule space method [M]. New York: Taylor & Francis Group, 2009.

[3] 杨淑群, 丁树良. 有效对象的判定理论与方法[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2011, 35(1): 1-4.

[4] 丁树良, 罗芬. 求偏序关系 Hasse 图的算法[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2005, 29(2): 150-152.

[5] Ding Shuliang,Luo Fen,Cai Yan,et al. Complement to Tatsuoka's Q matrix theory [A]. Shigemasu K,Okada A,Imaizumi T,et al. New trends in psychometrics [C]. Tokyo: Universal Academy Press: 2008: 417-423.
[6] 丁树良,祝玉芳,林海菁,等. Tatsuoka Q 矩阵理论的修正 [J]. 心理学报,2009,41(2): 175-181.
[7] 杨淑群,蔡声镇,丁树良,等. 求解简化 Q 矩阵的扩张算法 [J]. 兰州大学学报: 自然科学版,2008,44(3): 87-91,96.
[8] Yang Shuqun,Ding Shuliang,Ding Qiulin. The incremental augment algorithm of Q_r matrix [J]. Transactions of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics,2010,27(2): 183-189.
[9] 丁树良,杨淑群,汪文义. 可达矩阵在认知诊断测验编制中的重要作用 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2010,34(5): 490-495.
[10] 丁树良,汪文义,杨淑群. 认知诊断测验蓝图的设计 [J]. 心理科学,2011. 34(2): 258-265.
[11] 丁树良,汪文义,罗芬,等. 可达阵功能的不可替代性 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2016,40(3): 290-294,298.
[12] Tatsuoka K K. Architecture of knowledge structure and cognitive diagnosis: a statistical pattern recognition and classification approach [A]. Nichols P D,Chipman S F,Brennan R L. Cognitively diagnostic assessment [C]. Hillsdale,NJ: Erlbaum,1995: 327-361.
[13] 丁树良,罗芬,汪文义,等. 0-1 和多值可达矩阵的性质及应用 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2015,39(1): 64-68.
[14] 丁树良,汪文义,罗芬,等. 多值 Q 矩阵理论 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2015,39(4): 365-370.
[15] Sun Jianan,Xin Tao,Zhang Shumei,et al. A polytomousextension of the generalized distance discriminating method [J]. Applied Psychological Measurement,2013,37(7),503-521.
[16] Luo Fen,Ding Shuliang,Wang Xiaoqing,et al. Application study on online multistage intelligent adaptive testing for cognitive diagnosis [A]. Abdries van der Ark L,Daniel M Bolt,Wang Wenchung,et al. Quantitative Psychology Research [C]. Switzerland: Springer Proceedings in Mathematics & Statistics,2016: 265-275.

The Different Expressions of a Knowledge State and Their Applications

DING Shuliang,LUO Fen,WANG Wenyi,XIONG Jianhua
(College of Computer Information Engineering,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: For boolean matrices,any knowledge state is a column of a student $\boldsymbol{Q}$ matrix and it can be expressed as a boolean union of the columns of the reachability matrix $\boldsymbol{R}$ based on the augment algorithm. So there may be several expression forms,a redundant expression and a concise expression are defined,and their applications are given. Some analogues for polytomous $\boldsymbol{Q}$ matrix are given.

Key words: the augment algorithm; redundant expression; $\boldsymbol{R}$-equivalent class; polytomous $\boldsymbol{Q}$ matrix

(责任编辑: 冉小晓)