

文章编号: 1000-5862(2018)06-0610-06

一类时间分数阶扩散方程中的源项反演解法

邱淑芳, 王泽文, 曾祥龙, 胡 彬

(东华理工大学理学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 考虑了一类具有 Neumann 边界的时间分数阶扩散方程源项反演问题. 首先, 从分离变量法出发将反问题归结为第 1 类 Volterra 积分方程, 从而揭示出反问题的不适定性; 其次, 为了获得反问题的条件稳定性, 通过分数阶数值微分将第 1 类 Volterra 积分方程转化为第 2 类 Volterra 积分方程, 建立源项反问题的条件稳定性和误差估计; 最后, 引进磨光正则化, 获得稳定的分数阶数值导数, 将其代入求解第 2 类积分方程, 从而稳定地重建出仅依赖时间变量的源项. 数值实验结果验证了所得反演算法的有效性.

关键词: 不适定问题; 时间分数阶方程; 源项反演; 正则化方法; 磨光方法

中图分类号: O 175.8 文献标志码: A DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2018.06.11

0 引言

分数阶微分方程被广泛应用于反常扩散、流体力学、粘弹性力学、信号处理、管道的边界层效应等研究领域^[1]. 研究者发现, 不同于整数阶微分方程, 分数阶微分方程具有局部性质, 非常适合描述现实世界中具有记忆性和遗传性的现象^[2-3]. 时间分数阶扩散方程是在经典的整数阶扩散方程中用时间分数阶导数代替整数阶导数得到的, 它可以用来描述一些快扩散和慢扩散现象^[3-4]. 时间分数阶扩散方程的初边值问题, 即正问题, 已经被广泛地研究, 包括正问题解的存在唯一性^[5]、正问题的有限元^[6]与有限差分数值解法^[7-8]等. 在实际应用中, 分数阶扩散方程初边值问题的扩散系数、源项或者边界条件等可能是未知的, 而需要增加额外的测量数据来识别出这些未知的参数或函数, 这样的问题被称为分数阶扩散方程反问题. 国内外许多学者对分数阶扩散方程反问题也进行了研究. 如文献[9]考虑一类识别分数阶阶数和扩散系数的分数阶扩散方程反问题, 并给出了反问题的唯一性定理; 文献[10]提出一种拟逆正则化方法来重建了一类分数阶扩散方程的初始分布; 文献[11]利用 Fourier 正则化方法考虑一类分数阶扩散方程 Cauchy 问题, 即重建了边界条件. 本文主要考虑时间分数阶扩散方程的源项反问题, 即假设源项具时空变量分离形式 $p(t)f(x)$, 在

已知 $f(x)$ 的前提下反演仅与时间变量有关的项 $p(t)$. 该反问题是不适定的, 即反问题的解不连续依赖于测量数据. 关于分数阶源项反演问题的研究, 已经有一些非常有价值的研究成果^[12-16]. 如文献[12]利用边界元方法与广义 Tikhonov 正则化方法考虑一类分数阶扩散方程源项反演问题, 并利用广义交叉选取策略选取正则化参数而获得稳定化的数值解; 文献[13]通过傅立叶变换方法考虑了侧向方程中的时间依赖源逆问题, 并且在正则化参数的先验和后验选择规则下获得正则化解的误差估计; 文献[14]考虑了由积分形式的测量数据识别时间分数阶扩散方程中与时间相关的源项; 文献[15]证明了在 $f(x) \geq 0$ 且不恒为 0 的情况下通过单点观测数据 $u(x_0, t)$ ($0 < t < T$) 确定仅与时间变量相关的源项的唯一性. 文献[17-18]研究了重建分数阶扩散方程中仅与空间变量相关的源项反问题.

本文考虑时间分数阶扩散方程的 Neumann 边值问题:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(t)f(x) \quad x \in (0, l), t > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad x \in [0, l], \quad (3)$$

其中 $1/2 < \alpha < 1$, $\partial^\alpha u / \partial t^\alpha$ 是 Caputo 分数阶导数^[5], 即

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau.$$

若定解问题(1)中 $p(t)$ 和 $f(x)$ 已知, 则求解问

收稿日期: 2018-06-20

基金项目: 国家自然科学基金(11761007, 11561003), 江西省主要学科科学技术带头人计划(20172BCB22019), 江西省高校科技落地计划(KJLD14051)和江西省教育厅科技课题(GJJ170473)资助项目.

通信作者: 邱淑芳(1972-), 女, 江西南昌人, 副教授, 主要从事数学建模与反问题的数值解法研究. E-mail: shfqiu@ecit.cn

题(1)而得到 $u(x,t)$ 的分布是正问题.本文考虑的反问题是:设与时间相关的源项 $p(t)$ 未知,而 $f(x)$ 是已知的,目标是通过(1)式和附加的非局部测量数据

$$g(t) = \int_0^l \mu(x) u(x,t) dx \quad 0 < t < T \quad (4)$$

来重建源项 $p(t)$,其中 $\mu(x) \in L^2(0,l)$ 是有界非负权函数且不恒为0.此外,还需要假设权函数满足 $\langle \mu(x), f(x) \rangle \neq 0$,其中符号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是在 $L^2(0,l)$ 中的内积.将反问题归结为紧算子的第1类积分方程,从而揭示反问题的不适定性,并通过分数阶数值微分将第1类积分方程转化为第2类积分方程,从而获得反问题解的条件稳定性.然后,利用磨光正则化方法对噪声数据进行磨光处理,再解第2类积分方程而获得反问题的稳定化数值解,给出正则化解的误差估计.最后,给出数值算例来说明该算法的有效性.特别是对误差具有很强的鲁棒性.

1 反问题的适定性分析

为简单起见,符号 $\|\cdot\|_\infty$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示 L^∞ 范数和 L^2 范数.在讨论反问题的不适定性之前,先研究正问题的解并介绍与其紧密相关的 Mittag-Leffler 函数及其性质.对于任意常数 $a > 0$ 和 $b \in \mathbf{R}$, Mittag-Leffler 函数定义为

$$E_{a,b}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak+b)} \quad z \in \mathbf{C},$$

它具有如下的一些性质^[2,19-20].

引理1 令 $0 < a < 2$ 且 $b \in \mathbf{R}$.设 η_0 满足 $\pi a/2 < \eta_0 < \min\{\pi, \pi a\}$,则 $\exists C_0 = C_0(a,b,\eta_0) > 0$,使得 $|E_{a,b}(z)| \leq C_0/(1+|z|)$, $\eta_0 \leq |\arg(z)| \leq \pi$.

引理2 (i) 当 $0 < \alpha < 1$ 且 $\eta > 0$ 时,有

$$0 \leq E_{\alpha,1}(-\eta) < 1, E_{\alpha,1}(0) = 1,$$

$$d^\alpha E_{\alpha,1}(-\lambda \eta^\alpha) / d\eta^\alpha = -\lambda E_{\alpha,1}(-\lambda \eta^\alpha),$$

且 $E_{\alpha,1}(-\eta)$ 是完全单调,即 $(-1)^n d^n E_{\alpha,1}(-\eta) / d\eta^n \geq 0$;

(ii) 对于 $\lambda > 0$, $\alpha > 0$ 与正整数 m ,有

$$d^m E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) / dt^m = -\lambda t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha-m+1}(-\lambda t^\alpha),$$

$t > 0$;

(iii) 当 $0 < a \leq 1$, $b \geq a$ 且 $t > 0$ 时, $E_{a,b}(-t)$ 是完全单调的,即

$$(-1)^n d^n E_{a,b}(-t) / dt^n \geq 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

利用分离变量法和 Mittag-Leffler 函数的 Laplace 变换,求得问题(1)~(3)的级数形式解为

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k(t-\tau)^\alpha) \cdot p(\tau) d\tau X_k(x), \quad (5)$$

其中 $\lambda_0 = 0$, $X_0(x) = \sqrt{1/l}$, $\lambda_k = (k\pi/l)^2$, $X_k(x) = \sqrt{2/l} \cos(k\pi x/l)$, $k = 1, 2, \dots$, $f_k = \int_0^l f(x) X_k(x) dx$, $E_{\alpha,\alpha}(0) = 1/\Gamma(\alpha)$.为说明(5)式确实是初边值问题(1)~(3)的解,即说明(5)式在 $t > 0$, $0 \leq x \leq l$ 时关于 t 逐项微分1次和关于 x 逐项微分2次后所得级数一致收敛,且满足初边值条件,给出如下引理.

引理3^[21] 若 $f(x) \in C^m[0,l]$,其 $m+1$ 阶导数 $f^{(m+1)}(x)$ 分段连续,且

$$f^{(n)}(0) = f^{(n)}(l) = 0 \quad n = 1, 2, \dots, 2[m/2] + 1,$$

将函数 $f(x)$ 在区间 $[0,l]$ 上展开为余弦级数 $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k X_k(x)$,则由系数 f_k 所构成的级数 $\sum_{k=0}^{\infty} k^m |f_k|$ 是收敛的,从而 $f(x)$ 的余弦级数可逐项求导 m 次.

定理1 若 $f(x) \in C^1[0,l]$ 且 $f'(0) = f'(l) = 0$, $p(t) \in {}_0C^1[0,T] = \{p \in C^1[0,T] : p(0) = 0\}$,则(5)式是初边值问题(1)~(3)的解.

证 根据引理1,注意到 $1/2 < \alpha < 1$,且 $E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k(t-\tau)^\alpha) > 0$,于是有

$$\left| \lambda_k \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k(t-\tau)^\alpha) p(\tau) d\tau \right| \leq$$

$$\lambda_k \|p(\tau)\|_\infty \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k(t-\tau)^\alpha) d\tau = \lambda_k \|p(\tau)\|_\infty t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k t^\alpha) \leq \lambda_k \|p(\tau)\|_\infty t^\alpha \cdot C_0/(1+|\lambda_k t^\alpha|) \leq C_0 \|p(\tau)\|_\infty.$$

另一方面,由 $f(x)$ 满足的条件可知级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \text{收敛. 于是,当 } f(x) \in C^1[0,l] \text{ 且 } f'(0) = f'(l) = 0 \text{ 时, (5) 式关于 } x \text{ 逐项微分 2 次后所得级数一致收敛.}$$

下证(5)式关于 t 逐项微分1次后所得级数一致收敛.事实上,

$$\frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k(t-\tau)^\alpha) p(\tau) d\tau =$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{1}{\lambda_k} \frac{dE_{\alpha,1}(-\lambda_k(t-\tau)^\alpha)}{d\tau} p(\tau) d\tau =$$

$$\frac{1}{\lambda_k} \frac{dE_{\alpha,1}(-\lambda_k(t-\tau)^\alpha)}{d\tau} p(\tau) \Big|_{\tau=t} -$$

$$\frac{1}{\lambda_k} \int_0^t \frac{d^2 E_{\alpha,1}(-\lambda_k(t-\tau)^\alpha)}{d\tau^2} p(\tau) d\tau =$$

$$\frac{1}{\lambda_k} \int_0^t \frac{dE_{\alpha,1}(-\lambda_k(t-\tau)^\alpha)}{d\tau} p'(\tau) d\tau =$$

$$\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k(t-\tau)^\alpha) p'(\tau) d\tau.$$

从而,有

$$\left| \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k(t-\tau)^\alpha) p(\tau) d\tau \right| =$$

$$\left| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k(t-\tau)^\alpha) p(\tau) d\tau \right| \leq \\ \|p(\tau)\|_\infty \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k(t-\tau)^\alpha) d\tau = \\ \|p(\tau)\|_\infty t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k t^\alpha) \leq \|p(\tau)\|_\infty t^\alpha \cdot \\ C_0/(1+|\lambda_k t^\alpha|) \leq C_0 \|p(\tau)\|_\infty.$$

由级数 $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|$ 收敛知 (5) 式关于 t 逐项微分 1 次后所得级数一致收敛.

显然 (5) 式满足初边值条件. 于是 (5) 式确实是初边值问题 (1) ~ (3) 的解. 定理 1 得证.

将 (5) 式代入附加条件 (4) 式得

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k f_k \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k(t-\tau)^\alpha) p(\tau) d\tau, \quad (6)$$

其中 $\mu_k = \int_0^l \mu(x) X_k(x) dx$. 记

$$K_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k f_k t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha),$$

$$K_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \mu_k f_k t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha).$$

于是对于 $p(t) \in L^2(0, T)$, 记算子 M_1 和算子 M_2 分别为

$$(M_1 p)(t) = \int_0^t K_1(t-\tau) p(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T],$$

$$(M_2 p)(t) = \int_0^t K_2(t-\tau) p(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T],$$

显然, 由 (6) 式知

$$g(t) = (M_1 p)(t), \quad t \in [0, T]. \quad (7)$$

定理 2 (i) M_1 是 $C[0, T]$ 上紧的线性算子;

(ii) 若 $f(x) \in C^3[0, l]$ 且 $f'(0) = f'(l) = 0$, $f'''(0) = f'''(l) = 0$ 则 M_2 是 $C[0, T]$ 上紧的线性算子.

证 显然 M_1 与 M_2 均是线性算子. 下面只需分别证明它们是紧算子.

(i) 根据引理 1 可知

$$|K_1(t)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k f_k t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha) \right| \leq \\ \sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k| |f_k| |t|^{\alpha-1} |E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha)| \leq C_0 |t|^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k| \cdot \\ |f_k| \leq C_0 \|\mu\|_\infty |t|^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|.$$

由引理 3 知积分核 $K_1(t)$ 是弱奇异的, 故 M_1 是 $C[0, T]$ 上的紧算子^[20].

(ii) 根据引理 1 可推出

$$|K_2(t)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \mu_k f_k t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha) \right| \leq \\ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k |\mu_k| |f_k| |t|^{\alpha-1} |E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha)| \leq C_0 |t|^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \cdot \\ |\mu_k| |f_k| \leq C_0 \|\mu\|_\infty |t|^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k |f_k|.$$

由引理 3 可知积分核 $K_2(t)$ 是弱奇异的, 故 M_2 是 $C[0, T]$ 上的紧算子^[22]. 定理 2 得证.

因为 M_1 是紧算子, 所以算子方程 (7) 是不适定的, 即在 $C[0, T]$ 上反演源项 $p(t)$ 是不适定的. 此时, 测量数据 $g(t)$ 的微小变化将导致解的急剧变化. 为得到解的条件稳定性, 结合算子 M_2 在 $C^1[0, T]$ 空间中讨论解的稳定性.

定理 3 设 $f(x) \in C^3[0, l]$ 且 $f'(0) = f'(l) = 0$, $f'''(0) = f'''(l) = 0$. 若 $p(t) \in C^1[0, T]$ 则 $p(t)$ 满足

$$\partial^\alpha g(t) / \partial t^\alpha = v p(t) - (M_2 p)(t), \quad t \in (0, T), \quad (8)$$

其中 $v = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu_k f_k$, 且方程 (8) 存在唯一解, 以及存在常数 C 使得

$$\|p\| \leq C \|\partial^\alpha g(t) / \partial t^\alpha\|. \quad (9)$$

证 根据解 $u(x, t)$ 的一致收敛性, 且注意到 $g(t) \in H^\alpha(0, T)$ 将分数阶算子 $\partial^\alpha / \partial t^\alpha$ 作用于 (7) 式两边, 得到

$$\frac{\partial^\alpha g(t)}{\partial t^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k f_k \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k(t-\tau)^\alpha) p(\tau) d\tau \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k f_k \frac{1}{\Gamma(1-\alpha) \lambda_k} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} ds \cdot \\ \int_0^s \frac{d}{d\tau} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k(s-\tau)^\alpha) p(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k f_k \cdot \\ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha) \lambda_k} \int_0^t p(\tau) d\tau \int_\tau^t \frac{d}{d\tau} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k(s-\tau)^\alpha) (t-s)^{-\alpha} ds = - \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k f_k \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t p(\tau) \frac{\partial^\alpha}{\partial \zeta^\alpha} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \zeta^\alpha) \Big|_{\zeta=t-\tau} d\tau = \\ \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k f_k \left(p(t) - \int_0^t p(\tau) \frac{d}{d\tau} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k(t-\tau)^\alpha) d\tau \right) = \\ \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k f_k \left(p(t) - \int_0^t p(\tau) \lambda_k (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k(t-\tau)^\alpha) d\tau \right),$$

即 (8) 式成立. 下证积分方程 (8) 的解是唯一的.

实际上, 根据紧算子的 Riesz 理论^[22], 积分方程 (8) 的解的唯一性等价于它的齐次方程只有平凡解, 即只需证明积分方程

$$v p(t) - (M_2 p)(t) = 0, \quad t \in (0, T)$$

只有零解. 根据对权函数 $\mu(x)$ 的假设 $\langle \mu(x), f(x) \rangle \neq 0$, 即有 $\int_0^l \mu(x) \sum_{k=0}^{\infty} f_k X_k(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k f_k \neq 0$, 以及 $f(x)$ 的假设和引理 3 可知, 分别存在正常数 C_1 使得

$$C_1 \leq |v| \leq C_2 \text{ 和 } \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k \lambda_k f_k| \leq C_2. \text{ 利用 Cauchy-Schwarz 不等式和引理 1 可得}$$

$$|p(t)| \leq \frac{1}{C_1} |(M_2 p)(t)| \leq \frac{1}{C_1} \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k \lambda_k f_k| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot$$

$$E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_k(t-\tau)^\alpha) p(\tau) d\tau < \frac{C_0}{C_1} \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k \lambda_k f_k| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} p(\tau) d\tau \leq \frac{C_0}{C_1} \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k \lambda_k f_k| \left(\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2} d\tau \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^t p^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \leq \frac{C_0 C_2 T^{\alpha-1/2}}{C_1 \sqrt{2\alpha-1}} \left(\int_0^t p^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}.$$

根据 Gronwall 不等式可以得到在 $[0, T]$ 上有 $p(t) = 0$. 因此, 积分方程 (8) 有唯一解(解的存在性是显然的). 于是, 由文献 [22] 的推论 3.6 可知算子 $vI - M_2$ 是 $C[0, T]$ 上既单又满的线性算子, 且逆算子有界, 即存在常数 C 使得

$$\|p\| = \|(vI - M_2)^{-1} \partial^\alpha g / \partial t^\alpha\| \leq C \|\partial^\alpha g / \partial t^\alpha\|.$$

称 (9) 式为本文考虑的源项反问题的条件稳定性. 即在提高源项 $p(t)$ 的光滑性到满足 $p(t) \in_0 C^1[0, T]$ 的条件下获得的稳定性估计. 这说明就积分方程 (8) 而言, 求解它是适定的. 但附加数据 $g(t)$ 往往是测量所得, 从而不可避免地带有误差, 不妨设测量数据为 $g^\delta(t)$, 且有

$$\|g^\delta - g\|_\infty \leq \delta.$$

此时, 从带有绝对误差水平不超过 δ 的 $g^\delta(t)$ 数值来计算分数阶导数 $\partial^\alpha g^\delta / \partial t^\alpha$ 是不稳定的, 即它是不适定的. 这说明了将源项反演归结为适定的第 2 类积分方程 (8) 并没有改变原问题的不适定性, 只是将不适定性转移到了分数阶数值微分上. 为此, 引进磨光正则化方法对测量数据进行磨光处理.

2 测量数据的磨光正则化及反问题解的误差估计

设 $\rho > 0$, $\beta > 0$, $A_\rho = \left(\int_{-\rho}^{\rho} \exp(-s^2) ds \right)^{-1}$. 定义 $g(t)$ 的磨光函数^[23] 为

$$(J_\beta g)(t) = (\rho_\beta * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{\beta\rho}(t-s) g(s) ds,$$

其中 $*$ 表示卷积且卷积核 $H_{\beta\rho}(t)$ 为

$$H_{\beta\rho}(t) = \begin{cases} (A_\rho/\beta) \exp(-t^2/\beta^2), & |t| \leq \rho\beta, \\ 0, & |t| > \rho\beta. \end{cases}$$

为了从噪声数据 $g^\delta(t)$ 中获得其稳定的分数阶导数, 在对 $g^\delta(t)$ 合理延拓的基础上进行磨光处理, 然后对其磨光函数利用文献 [24] 中的方法计算分数阶导数, 即数值计算 $\partial^\alpha (J_\beta g^\delta) / \partial t^\alpha$. 这里的 β 被称为磨光半径, 起到正则化参数的作用; ρ 为磨光半径的伸缩因子参数. 实际上, 正则化参数在反问题与不适定问题的数值反演中往往起到很重要的作用^[25]. 注意到 Caputo 分数阶导数也是卷积, 则由卷积的性质易得

$$\partial^\alpha (J_\beta g^\delta) / \partial t^\alpha = J_\beta (\partial^\alpha g^\delta / \partial t^\alpha).$$

引理 4^[23] 假设 $g(t)$ 和 $g^\delta(t)$ 在 $[0, 1]$ 上均为一致 Lipschitz 连续的, 且 $\|g^\delta - g\|_\infty \leq \delta$, 则存在一个与 β 无关的常数 C , 使得

$$\|\partial^\alpha (J_\beta g^\delta) / \partial t^\alpha - \partial^\alpha g / \partial t^\alpha\|_{\infty, [0, 1]} \leq C(\beta + \delta/\beta) / [(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)]. \quad (10)$$

将 $\partial^\alpha (J_\beta g^\delta) / \partial t^\alpha$ 取代第 2 类积分方程 (8) 的左端项 $\partial^\alpha g / \partial t^\alpha$ 后求得的源项记为 $p^\delta(t)$, 称 $p^\delta(t)$ 为源项 $p(t)$ 的正则化解.

定理 4 在定理 2 和引理 4 的条件下, 磨光正则化解 $p^\delta(t)$ 有误差估计

$$\|p^\delta - p\| \leq Cl(\beta + \delta/\beta),$$

其中 C 是与 β 无关的正常数.

证 显然有 $\|p^\delta - p\| \leq C \|\partial^\alpha (J_\beta g^\delta) / \partial t^\alpha - \partial^\alpha g / \partial t^\alpha\|$. 联合 (10) 式可知结论成立.

将上述讨论总结为如下算法.

重建源项 $p(t)$ 的算法:

Step 1^[21] 对噪声数据 $g^\delta(t)$ 进行磨光正则化处理得到 $J_\beta g^\delta$;

Step 2^[22] 求分数阶导数 $\partial^\alpha (J_\beta g^\delta) / \partial t^\alpha$;

Step 3 解第 2 类积分方程 (8) 得到源项的正则化解 $p^\delta(t)$.

注 1 在 Step 3 中积分方程 (8) 的离散方法参见文献 [12].

3 数值算例

在数值算例中取 $T = 1$, 对区间 $[0, T]$ 进行 100 等分得到 $t_i = iT/100$, $i = 0, 1, \dots, 100$, 且带有噪声的观测数据 $g^\delta(t_i)$ 是由 $g^\delta(t_i) = g(t_i) + \delta(2R_i - 1)g(t_i)$ 生成, 其中 R_i 是服从区间 $[0, 1]$ 上均匀分布的随机数, δ 是相对误差水平. 在对数据进行磨光时, 始终取磨光半径 $\beta = 0.04$, 伸缩因子参数 $\rho = 1$.

例 1 设 $\alpha = 0.7$, $I = 1$, $f(x) = \cos(\pi x)$, 以及

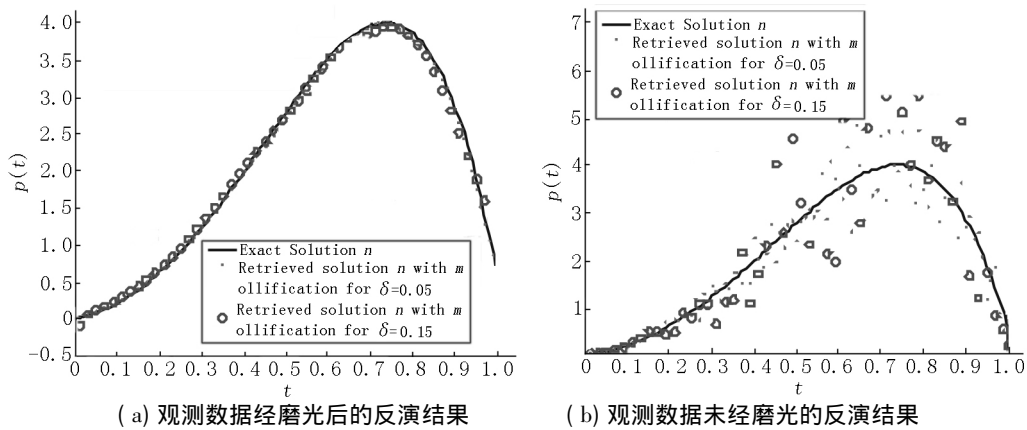
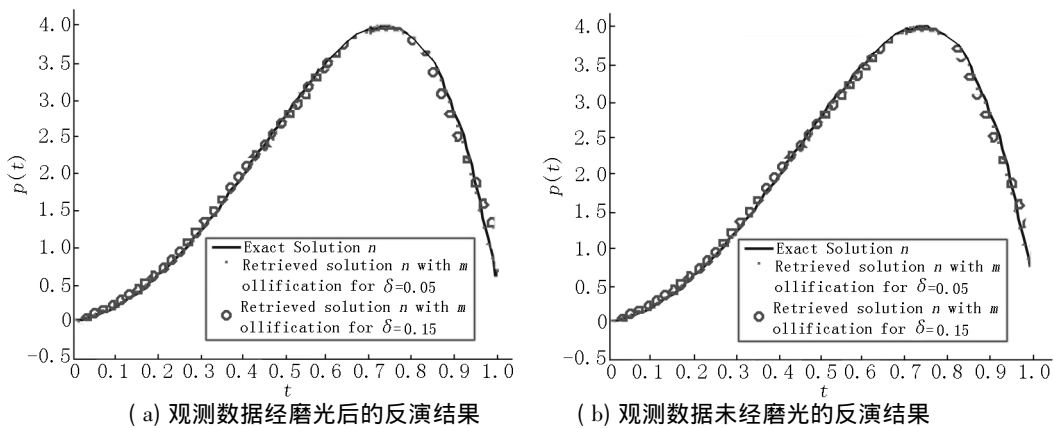
$$p(t) = \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha} - \frac{102}{\Gamma(6-\alpha)} t^{5-\alpha} + \pi^2(t^2 - 0.85t^5).$$

此时初边值问题 (1) ~ (3) 的解为 $u(x, t) = (t^2 - 0.85t^5) \cos(\pi x)$. 分别取非负权函数

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 10, & 0 \leq x \leq 1/5, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 10, & 2/5 \leq x \leq 3/5, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

生成测量数据, 利用重建源项 $p(t)$ 的算法来反演 $p(t)$. 数值模拟结果如图 1 和图 2 所示.

图1 使用权函数 $\mu_1(x)$ 的源项 $p(t)$ 反演结果图2 使用权函数 $\mu_2(x)$ 的源项 $p(t)$ 反演结果

从图1和图2可看出,结合数据磨光解第2类积分方程(8)得到的反演结果是非常有效的,且2种权函数下的源项反演结果也几乎相同.特别值得注意的是,本文给出的源项反演算法对误差有很强的鲁棒性,即当相对误差水平为15%时能得到非常满意的反演结果.另外,利用正问题的分离变量方法,本文给出的反演算法可直接推广到高维分数阶扩散方程反问题.

4 结论与展望

本文研究了一类 Neumann 边界条件下的时间分数阶扩散源项反问题.首先,讨论了反问题的不适定性;然后,通过将反问题归结为第2类 Volterra 积分方程获得了反问题的条件稳定性和误差估计;最后,结合磨光正则化方法给出了重建源项的稳定化算法,且数值算例结果验证了所给算法是有效的且对噪声具有很强的稳定性.本文利用分离变量方法给出的分数阶扩散源项反演的算法和理论,可直接推广到1维空间域上其它边界条件的分数阶方程源项反演,也可推广到如矩形域等规则区域上的高维方程情形,但对于不规则的空间区域因很难

得到其特征函数系,故一般难以推广.

5 参考文献

- [1] Sun Hongguang, Chen Wen, Li Changpin, et al. Fractional differential models for anomalous diffusion [J]. Physica A Statistical Mechanics and Its Applications, 2010, 389 (14): 2719-2724.
- [2] Podlubny I. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations to methods of their solution and some of their applications [M]. San Diego, CA: Academic Press, 1999.
- [3] Berkowitz B, Scher H, Silliman S E. Anomalous transport in laboratory-scale heterogeneous porous media [J]. Water Resources Research, 2000, 36(1): 149-158.
- [4] Metzler R, Klafter J. Subdiffusive transport close to thermal equilibrium: from the Langevin equation to fractional diffusion [J]. Physical Review E Statistical Physics Plasmas Fluids and Related Interdisciplinary Topics, 2000, 61(6): 6308-6311.
- [5] Luchko Y. Some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems for the generalized time-fractional diffusion equation [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2010, 59(5): 1766-1772.
- [6] Jiang Yingjun, Ma Jingtang. High-order finite element

- methods for time-fractional partial differential equations [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, 235(11): 3285-3290.
- [7] Zhuang Pinghui, Liu Fawang. Implicit difference approximation for the time fractional diffusion equation [J]. *Journal of Applied Mathematics and Computing* 2006, 22(3): 87-99.
- [8] Gao Guanghua, Sun Haiwei, Sun Zhizhong. Stability and convergence of finite difference schemes for a class of time-fractional sub-diffusion equations based on certain superconvergence [J]. *Journal of Computational Physics*, 2015, 280: 510-528.
- [9] Cheng Jin, Nakagawa J, Yamamoto M et al. Uniqueness in an inverse problem for a one-dimensional fractional diffusion equation [J]. *Inverse Problems* 2009, 25(11): 115002.
- [10] Liu Jijun, Yamamoto M. A backward problem for the time-fractional diffusion equation [J]. *Applicable Analysis*, 2010, 89(11): 1769-1788.
- [11] Zheng Guanghui, Wei Ting. A new regularization method for a Cauchy problem of the time fractional diffusion equation [J]. *Advances in Computational Mathematics* 2012, 36(2): 377-398.
- [12] Wei Ting, Zhang Zhengqiang. Reconstruction of a time-dependent source term in a time-fractional diffusion equation [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 2013, 37(1): 23-31.
- [13] Yang Fang, Fu Chuli, Li Xiaoxiao. A mollification regularization method for identifying the time-dependent heat source problem [J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 2016, 100(1): 1-14.
- [14] Alroev T S, Kirane M, Malik S A. Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determining condition [J]. *Electronic Journal of Differential Equations* 2013, 2013(270): 584-609.
- [15] Liu Yikan, Rundell W, Yamamoto M. Strong maximum principle for fractional diffusion equations and an application to an inverse source problem [J]. *Fractional Calculus and Applied Analysis* 2016, 19(4): 888-906.
- [16] Ruan Zhousheng, Wang Zewen. Identification of a time-dependent source term for a time fractional diffusion problem [J]. *Applicable Analysis* 2017, 96(10): 1638-1655.
- [17] 阮周生, 王泽文, 张文. 数值求解时间分数阶扩散方程源项反问题 [J]. *黑龙江大学自然科学学报*, 2015, 32(5): 586-590.
- [18] 阮周生, 张文, 王泽文. 带周期边界条件时间分数阶扩散方程逆时反问题的条件稳定性 [J]. *河北大学学报: 自然科学版* 2015, 35(6): 561-565.
- [19] Schneider W R. Completely monotone generalized Mittag-Leffler functions [J]. *Expositiones Mathematicae*, 1996, 14(1): 3-16.
- [20] Miller K S, Samko S G. A note on the complete monotonicity of the generalized Mittag-Leffler function [J]. *Real Analysis Exchange*, 1997, 23(2): 753-755.
- [21] 谷超豪, 李大潜, 陈恕行, 等. 数学物理方程 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1987.
- [22] Kress R. Linear integral equations [M]. New York: Springer-Verlag, 2014.
- [23] Murio D A. On the stable numerical evaluation of Caputo fractional derivatives [J]. *Computers and Mathematics with Applications* 2006, 51(9): 1539-1550.
- [24] Cao Jianxiong, Li Changpin, Chen Yangquan. High-order approximation to Caputo derivatives and Caputo-type advection-diffusion equations (II) [J]. *Fractional Calculus and Applied Analysis* 2015, 18(3): 735-761.
- [25] 胡彬, 徐会林, 王泽文, 等. 基于模型函数与 L -曲线的正则化参数选取方法 [J]. *江西师范大学学报: 自然科学版* 2014, 38(6): 569-573.

The Numerical Method for Reconstructing Source Term in a Time Fractional Diffusion Equation

QIU Shufang, WANG Zewen, ZENG Xianglong, HU Bin

(School of Science, East China University of Technology, Nanchang Jiangxi 330013, China)

Abstract: An inverse source problem in a time fractional diffusion equation with Neumann boundary is considered. Firstly, from the method of separation of variables for solving the direct problem, the inverse source problem is turned into a Volterra integral equation of the first kind, which reveals ill-posedness of the inverse problem. Secondly, for obtaining conditional stability of the inverse problem, the Volterra integral equation of the first kind is transformed into a second kind Volterra integral equation by using fractional derivative, then the conditional stability and error estimate are established. Lastly, from stable approximation of the fractional derivative computed by utilizing the mollification regularization, the time-dependent source term is reconstructed stably by solving the Volterra integral equation of the second kind. Results of numerical experiments verify the effectiveness of the inversion algorithm.

Key words: ill-posed problem; time fractional equation; source inversion; regularization method; mollification method

(责任编辑: 曾剑锋)