

文章编号: 1000-5862(2019)01-0031-04

## 2 维 Maxwell 方程的局部 1 维高阶紧致格式

孔令华, 田娜娜, 张 鹏

(江西师范大学数学与信息科学学院, 江西 南昌 330022)

摘要: 将算子分裂方法与高阶紧致差分方法相结合, 构造了 2 维 Maxwell 方程的局部 1 维紧致时域有限差分格式. 该格式在时间方向和空间方向分别具有 1 阶和 4 阶收敛精度, 并且具有计算效率高、无条件稳定的优点. 数值实验表明: 新构造的格式是能量守恒、高效率的.

关键词: Maxwell 方程; 局部 1 维格式; 高阶紧致格式

中图分类号: O 241.8 文献标志码: A DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2019.01.06

### 0 引言

现代电子技术的发展离不开电磁学的研究, 而 Maxwell 方程是电磁学领域最基本的数学模型, 对它的理论与数值方法研究一直是非常热门的重要的研究课题. 自从 K. S. Yee<sup>[1]</sup> 在 1966 年提出 Maxwell 方程的时域有限差分(FDTD)方法以来, 这种数值方法一直在计算电磁学领域得到重视并积极推动. 本文主要考虑 2 维 Maxwell 方程<sup>[2-4]</sup>

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ \frac{\partial H_z}{\partial z} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (1)$$

高效的数值格式, 其中  $\varepsilon$  和  $\mu$  分别是介电系数和磁导率,  $\vec{H}_z = H_z(t, x, y)$  和  $\vec{E} = (E_x(t, x, y), E_y(t, x, y))^T$  分别表示磁场和电场. 为方便起见, 假设所考虑的空间区域为矩形区域  $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ ,  $t \in (0, T]$ , 电磁场满足理想导体边界条件<sup>[5-8]</sup>

$$\begin{aligned} E_x(t, x, 0) = E_x(t, x, b) = E_y(t, 0, y) = \\ E_y(t, a, y) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

和初始条件

$$\begin{aligned} E_x(x, y, 0) = E_{x0}(x, y), E_y(x, y, 0) = \\ E_{y0}(x, y), H_z(x, y, 0) = H_{z0}(x, y). \end{aligned} \quad (3)$$

满足边界条件(2)和初始条件(3)的 2 维 Maxwell 方程(1)具有以下能量守恒律:

命题 1 Maxwell 方程(1)~(3)的解  $H_z = H_z(t, x, y)$ ,  $\vec{E} = (E_x(t, x, y), E_y(t, x, y))^T$  满足以下能量守恒律

$$\begin{aligned} \|\vec{E}(t)\|^2 + \|H_z(t)\|^2 = \|\vec{E}(0)\|^2 + \|H_z(0)\|^2, \\ \text{其中 } \|\vec{E}(t)\|^2 = \|E_x(t)\|^2 + \|E_y(t)\|^2, \\ \|E_x(t)\|^2 = \int_0^a \int_0^b \varepsilon |E_x(t, x, y)|^2 dx dy, \quad s = x \text{ 或 } y. \end{aligned}$$

证 将 Maxwell 方程(1)在  $\Omega$  上与  $E_x, E_y, H_z$  做内积, 并把得到的方程相加得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|E_x(t)\|^2 + \|E_y(t)\|^2 + \|H_z(t)\|^2) = \\ \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} E_x(t, x, y) - \frac{\partial H_z}{\partial x} E_y(t, x, y) \right) + \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) H_z(t, x, y) \right] dx dy = 0. \end{aligned}$$

在此利用了 Green 公式和边界条件(2).

对于此类空间多维微分方程, 类似于 Yee 格式的显式格式受到较为苛刻的稳定性条件的限制, 如对于 Yee 格式必须满足  $\Delta t / \sqrt{\mu\varepsilon} \leq [1/(\Delta x)^2 + 1/(\Delta y)^2]^{-1/2}$ , 使得计算时间层数迅速增加, 而隐式格式将产生规模巨大(大约为  $O(N^2)$  阶)的代数方程组, 需要大量的存储空间和计算时间, 甚至用一般计算机无法求解<sup>[6-10]</sup>. 为了克服这些数值格式各

收稿日期: 2018-09-26

基金项目: 国家自然科学基金(11301234, 11271171)和江西省自然科学基金(20161ACB20006, 20142BCB23009, 20181BAB201008)资助项目.

作者简介: 孔令华(1977-), 男, 江西石城人, 教授, 博士, 博士生导师, 主要从事偏微分方程数值解法研究. E-mail: konglh@mail.ustc.edu.cn

自的不足,在此充分发挥分裂步方法和高阶紧致格式各自的优点(如分裂步格式的灵活性、子问题的容易求解性、高阶紧致格式的模版小、精度高、边界易于处理<sup>[11-15]</sup>)为2维 Maxwell 方程(1)构造高效的分裂紧致格式.

### 1 格式的建立

为简单起见,仅讨论常系数的情形,这里所用的方法容易推广到变系数的情形.对空间区域  $\Omega$  及时间区域  $[0, T]$  采取如下剖分:  $x_i = i\Delta x$ ,  $x_{i+1/2} = (i + 1/2)\Delta x$ ,  $y_j = j\Delta y$ ,  $y_{j+1/2} = (j + 1/2)\Delta y$ ,  $t^{n+1/2} = t^n + \tau/2$ , 其中  $\Delta x$  和  $\Delta y$  分别是沿  $x$  轴方向和沿  $y$  轴方向的空间离散步长,  $\tau$  是时间步长,  $i, j, n$  为非负整数.对于任意一个网格函数  $F(t, x, y)$ , 引入以下记号:

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}^m &= F(m\tau, \alpha\Delta x, \beta\Delta y), \\ \delta_x F_{\alpha\beta}^m &= (F_{\alpha\beta}^{m+1/2} - F_{\alpha\beta}^{m-1/2})/\tau, \\ \delta_x F_{\alpha\beta}^m &= (F_{\alpha+1/2, \beta}^m - F_{\alpha-1/2, \beta}^m)/\Delta x, \\ \delta_y F_{\alpha\beta}^m &= (F_{\alpha, \beta+1/2}^m - F_{\alpha, \beta-1/2}^m)/\Delta y, \\ A_x F_{\alpha\beta}^m &= (F_{\alpha-1, \beta}^m + 22F_{\alpha, \beta}^m + F_{\alpha+1, \beta}^m)/24, \\ A_y F_{\alpha\beta}^m &= (F_{\alpha, \beta-1}^m + 22F_{\alpha, \beta}^m + F_{\alpha, \beta+1}^m)/24. \end{aligned}$$

为简单起见,线性变换  $A_x, A_y$  对应的矩阵仍记为  $A_x, A_y$ , 其它线性变换类似.显然  $A_x, A_y$  是循环对称正定矩阵,  $B_x, B_y$  是循环矩阵.定义网格函数  $U = \{U_{i+1/2, j}\}, V = \{V_{i, j+1/2}\}, W = \{W_{i+1/2, j+1/2}\}, \vec{F} = \{(U_{i+1/2, j}, V_{i, j+1/2})\}$ , 定义离散内积  $\langle U, V \rangle = \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} U_{i+1/2, j} V_{i, j+1/2} \Delta x \Delta y$ . 离散  $L^2$  能量范数为

$$\begin{aligned} \|U\|_{E_x}^2 &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \varepsilon |U_{i+1/2, j}|^2 \Delta x \Delta y, \\ \|V\|_{E_y}^2 &= \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \varepsilon |V_{i, j+1/2}|^2 \Delta x \Delta y, \\ \|W\|_H^2 &= \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \mu |W_{i+1/2, j+1/2}|^2 \Delta x \Delta y, \\ \|\vec{F}\|_E^2 &= \|U\|_{E_x}^2 + \|V\|_{E_y}^2. \end{aligned}$$

为计算高效简单,把2维 Maxwell 方程(1)分裂为2个局部1维的方程组:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_x}{\partial y}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_y}{\partial x}. \end{aligned}$$

在交错网格上,对上面2组微分方程在时间方向应用中心差分,在空间方向应用高阶紧致格式离散<sup>[5, 8]</sup>, 得到如下格式.

第1步:

$$A_x (E_{yi+1/2, j+1/2}^{n+1} - E_{yi, j+1/2}^n) / \tau = -\delta_x (H_{zi+1/2, j+1/2}^{n+1/2} + H_{zi, j+1/2}^n) / (2\varepsilon), \quad (4)$$

$$A_x (H_{zi+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - H_{zi+1/2, j+1/2}^n) / \tau = -\delta_x (E_{yi+1/2, j+1/2}^{n+1} + E_{yi+1/2, j+1/2}^n) / (2\mu); \quad (5)$$

第2步:

$$A_y (E_{xi+1/2, j}^{n+1} - E_{xi+1/2, j}^n) / \tau = \delta_x (H_{zi+1/2, j}^{n+1/2} + H_{zi+1/2, j}^n) / (2\varepsilon), \quad (6)$$

$$A_y (H_{zi+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - H_{zi+1/2, j+1/2}^n) / \tau = \delta_y (E_{xi+1/2, j+1/2}^{n+1} + E_{xi+1/2, j+1/2}^n) / (2\mu). \quad (7)$$

边界条件和初始条件分别离散为

$$E_{xi+1/2, 0}^n = E_{xi+1/2, J}^n = E_{y0, j+1/2}^n = E_{yI, j+1/2}^n = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} E_{x\alpha\beta}^0 &= E_{x0}(\alpha\Delta x, \beta\Delta y), \quad E_{y\alpha\beta}^0 = E_{y0}(\alpha\Delta x, \beta\Delta y), \\ H_{z\alpha\beta}^0 &= H_{z0}(\alpha\Delta x, \beta\Delta y). \end{aligned} \quad (9)$$

可以把格式(4)~(9)写成如下矩阵形式,以便于进行编程运算与理论分析.

$$\begin{bmatrix} A_{x(I-1) \times (I-1)} & \varepsilon_\tau D_{x(I-1) \times I} \\ \mu_\tau D_{xI \times (I-1)} & A_{xI \times I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y^{n+1} \\ H_z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{x(I-1) \times (I-1)} & -\varepsilon_\tau D_{x(I-1) \times I} \\ -\mu_\tau D_{xI \times (I-1)} & A_{xI \times I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y^n \\ H_z^n \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} A_{x(I-1) \times (I-1)} &= \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 22 & 1 & & & \\ 1 & 22 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 22 \\ & & & & & 1 & 22 \end{bmatrix}_{(I-1) \times (I-1)}, \\ A_{xI \times I} &= \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 22 & 1 & & & & & \\ 1 & 22 & \ddots & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & 1 & 22 & & \\ & & & & & 1 & 22 \\ & & & & & & & 1 & 22 \end{bmatrix}_{I \times I}, \\ D_{x(I-1) \times I} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(I-1) \times I}, \\ D_{xI \times (I-1)} &= \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ -1 & \ddots & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & -1 \end{bmatrix}_{I \times (I-1)}, \\ [E_x^{n+1} \quad H_z^{n+1}] & \begin{bmatrix} A_{y(J-1) \times (J-1)} & -\mu_\tau D_{y(J-1) \times J} \\ -\varepsilon_\tau D_{yJ \times (J-1)} & A_{yJ \times J} \end{bmatrix} = \\ [E_x^n \quad H_z^n] & \begin{bmatrix} A_{y(J-1) \times (J-1)} & \mu_\tau D_{y(J-1) \times J} \\ \varepsilon_\tau D_{yJ \times (J-1)} & A_{yJ \times J} \end{bmatrix}, \quad (11) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{y(J-1) \times (J-1)} &= \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 22 & 1 & & & \\ 1 & 22 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 22 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}_{(J-1) \times (J-1)}, \\
 \mathbf{A}_{yJ \times J} &= \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 22 & 1 & & & 1 \\ 1 & 22 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 22 \\ 1 & & & & 1 \end{bmatrix}_{J \times J}, \\
 \mathbf{D}_{yJ \times (J-1)} &= \begin{bmatrix} -1 & & & & \\ 1 & -1 & & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}_{J \times (J-1)}, \\
 \mathbf{D}_{y(J-1) \times J} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & & 1 & -1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & -1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}_{(J-1) \times J}.
 \end{aligned}$$

为分析格式(4) ~ (9) 的守恒性 给出引理 1.

引理 1 若  $A$  是循环实对称正定矩阵, 则总存在循环矩阵  $R$ , 使得  $A = R^T R$ , 而且任意能与  $A$  交换的矩阵亦能与  $R$  交换.

由引理 1 易知,  $\exists R_1, R_2$  使得  $A_x^{-1} = R_1^T R_1, A_y^{-1} = R_2^T R_2, A_x^{-1} B_x = B_x A_x^{-1}, A_y^{-1} B_y = B_y A_y^{-1}$ .

定理 1 2 维 Maxwell 方程(1) ~ (3) 的局部 1 维高阶紧致格式(4) ~ (9) 的解  $E_x^{n+1}, E_y^{n+1}, H_z^{n+1}$  满足能量守恒律的离散类似, 即满足离散的能量守恒律

$$P^{n+1} = (\|E_x^{n+1}\|^2 + \|E_y^{n+1}\|^2) + \|H_z^{n+1}\|^2 = (\|E_x^0\|^2 + \|E_y^0\|^2) + \|H_z^0\|^2 = P^0. \quad (12)$$

同时此守恒律说明格式(4) ~ (9) 是无条件稳定的.

证 将(4) 式与  $(E_y^{n+1} + E_y^n)$  作内积, (5) 式与

$(H_z^{n+1/2} + H_z^n)$  作内积, 然后把得到的两式相加, 有

$$(\|E_y^{n+1}\|^2 - \|E_y^n\|^2) + (\|H_z^{n+1/2}\|^2 - \|H_z^n\|^2) = -\tau \langle A_x^{-1} B_x (H_z^{n+1/2} + H_z^n), E_y^{n+1} + E_y^n \rangle / 2 - \langle A_x^{-1} B_x (E_y^{n+1} + E_y^n), H_z^{n+1/2} + H_z^n \rangle = 0, \quad (13)$$

在此第 2 个等号应用了引理 2 及 Green 公式, 类似地, 有

$$(\|E_x^{n+1}\|^2 - \|E_x^n\|^2) + (\|H_z^{n+1/2}\|^2 - \|H_z^n\|^2) = 0, \quad (14)$$

将(13) 式和(14) 式相加得

$$P^{n+1} = (\|E_x^{n+1}\|^2 + \|E_y^{n+1}\|^2) + \|H_z^{n+1}\|^2 = (\|E_x^n\|^2 + \|E_y^n\|^2) + \|H_z^n\|^2 = P^n,$$

利用递推法, 得离散的能量守恒律(12).

## 2 数值实验

本部分将数值验证新构造的高阶紧致局部 1 维格式(10) ~ (11) 的能量守恒性及其他一些数值性质. 在 2 维 Maxwell 方程(1) 中取电导率和磁导率均为 1, 即  $\varepsilon = \mu = 1$ , 空间区域为正方形区域  $\Omega = [0, 2] \times [0, 2]$ , 取初始条件为  $H_{z,0} = 0, E_{x,0} = \cos(\pi(1-x)) \sin(\pi(1-y)), E_{y,0} = -\sin(\pi(1-x)) \cos(\pi(1-y))$ . 可以验证此模型的解析解为  $E_x = \cos(\sqrt{2}\pi t) \cos(\pi(1-x)) \sin(\pi(1-y)), E_y = -\cos(\sqrt{2}\pi t) \sin(\pi(1-x)) \cos(\pi(1-y)), H_z = -\sqrt{2} \sin(\sqrt{2}\pi t) \cos(\pi(1-x)) \cos(\pi(1-y))$ .

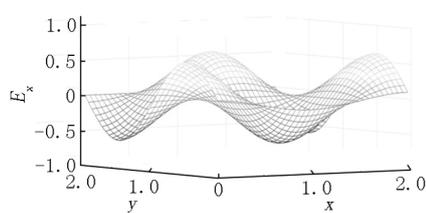
用格式(10) ~ (11) 进行数值模拟到  $t = 1$ . 首先考虑数值解与精确解在无穷范数意义下得到的误差与空间收敛阶, 所得到的数值结果如表 1 所示. 由表 1 可看出局部 1 维高阶紧致格式(10) ~ (11) 在空间方向具有 4 阶收敛精度, 数值解的误差在迅速减小.

表 1 数值解的误差与空间收敛阶 ( $\tau = 10^{-5}$ )

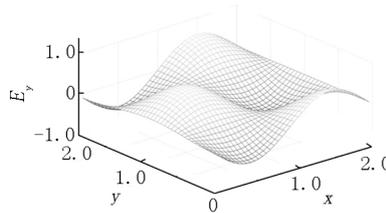
$h$	$E_x$		$E_y$		$H_z$	
	误差	阶	误差	收敛阶	误差	收敛阶
0.20	$3.684E-3$	-	$3.704E-3$	-	$1.529E-3$	-
0.10	$2.238E-4$	4.04	$2.452E-4$	3.92	$9.164E-5$	4.06
0.05	$3.821E-6$	5.87	$2.523E-5$	3.28	$5.675E-6$	4.01

接下来将对格式(10) ~ (11) 的长时间数值行为和能量守恒性进行模拟检验. 将上述问题模拟到  $t = 50$ , 取步长  $\tau = 0.01, \Delta x = \Delta y = 0.05$ . 所得到的

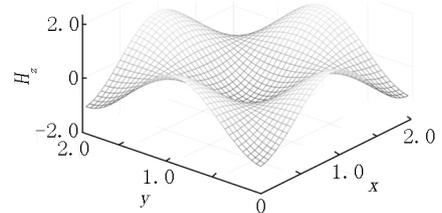
电磁波解在  $t = 50$  时刻的波形如图 1 所示, 而图 2 展示了能量误差  $P^{n+1} - P^0$  随时间的演化关系.



(a)  $E_x$



(b)  $E_y$



(c)  $H_z$

图 1 电磁波在  $t = 50$  时刻的轮廓图

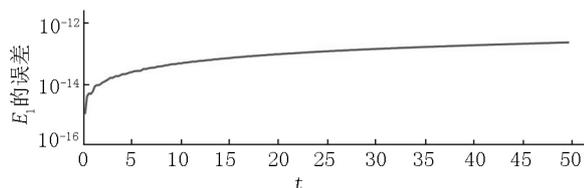


图2 电磁波的能量误差随时间的演化关系

由图1和图2可看出:新构造的格式能够在长时间内模拟原电磁波,并且能量一直得到了精确保持,误差控制在舍入误差的范围之内。

### 3 参考文献

- [1] Yee K S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media [J]. IEEE Trans Antenna and Propagation, 1966, 14(3): 302-307.
- [2] 马玉杰, 谢正. 离散外微分在计算电磁学中的应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [3] 葛德彪, 闫玉波. 电磁波时域有限差分方法 [M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2002.
- [4] 孔金瓯. 麦克斯韦方程: 影印版 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
- [5] Gao Liping, Zhang Bo, Liang Dong. The splitting-difference time-domain methods for Maxwell's equations in two dimensions [J]. J Comput Appl Math, 2007, 205(1): 207-230.
- [6] Chen Wenbin, Li Xingjie, Liang Dong. Energy-conserved splitting finite difference time-domain methods for Maxwell's equation in three dimensions [J]. SIAM J Numer Anal, 2010, 48(4): 1530-1554.
- [7] Lee J, Fornberg B. A split step approach for the 3-D Maxwell equations [J]. J Comput Appl Math, 2003, 158(2): 485-505.
- [8] Zheng Fenghua, Chen Zhizhang, Zhang Jiazong. Toward the development of a three-dimensional unconditionally stable finite difference time domain method [J]. IEEE Trans Micro Wave Theory Tech, 2000, 48(9): 1550-1558.
- [9] Kong Linghua, Hong Jialin, Zhang Jingjing. Splitting multi-symplectic method for Maxwell equation [J]. J Comput Phys, 2010, 229(11): 4259-4278.
- [10] 周文英, 孔令华, 王兰, 等. 3维 Maxwell 方程局部 1 维多辛格式的能量恒等式 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2015, 39(1): 55-58.
- [11] 匡立群, 孔令华, 王兰, 等. 2 维 Ginzburg-Landau 方程的分裂 LOD 高阶紧致格式 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2017, 41(1): 35-38.
- [12] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution [J]. J Comput Phys, 1992, 103(1): 16-42.
- [13] 王兰. 杆振动方程的高阶紧致差分格式 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2015, 39(4): 351-354.
- [14] Strang G. On the construction and comparison of difference schemes [J]. SIAM J Numer Anal, 1968, 5(3): 506-517.
- [15] McLachlan R, Quispel G. Splitting methods [J]. Acta Numer, 2002, 11(11): 341-434.

## The Local One-Dimensional and High-Order Compact Scheme for Two-dimensional Maxwell Equation

KONG Linghua, TIAN Nana, ZHANG Peng

(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

**Abstract:** The main interests in this paper are to combine the splitting method and high-order compact finite different time domain for two-dimensional(2D) Maxwell equation. This scheme is of first order convergent rate in time and fourth order in space by Taylor expansion. Moreover, it does focus the advantages of both local one-dimensional method and high order compact schemes, such as highly efficient, unconditionally stable. Numerical experiments illustrate the correctness of the theoretical analysis.

**Key words:** Maxwell equation; local one-dimensional method; high order compact method

(责任编辑: 曾剑锋)