文章编号:1000-5862(2020)02-0202-04

关于群上的概周期函数的几点注记

陈叶君[1],丁惠生[1*],简伟刚[1,2]

(1. 江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022;2. 豫章师范学院数学与计算机学院,江西 南昌 330103)

摘要:该文研究了群上的 Banach 值概周期函数的性质,证明了值域为有限维 Banach 空间的右概周期函数与左概周期函数是等价的,研究了正规序列的相关条件以及局部紧交换群上的 Bohr 概周期函数的 ε 平移集的性质并得到了相关结果.

关键词:群;概周期函数;Banach 空间;正规序列

中图分类号:O 174.2;O 177.91 **文献标志码**:A **DOI**:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2020.02.16

0 引言及预备知识

自 20 世纪 20 年代起,有关概周期函数的研究就一直受到包括 S. Bochner、M. Frechet、J. Von Neumann、H. Weyl 等许多数学工作者的广泛关注. 在数学工作者的不懈努力下,概周期函数理论的内容已愈加丰富. 不少概周期专著[1-3]都较为细致地阐述了概周期函数的特性和它与微分方程之间的关系,有关的论文也是非常之多,其重要性不言而喻. 值得一提的是 1934 年 J. Von Neumann[4]提出了群上的概周期函数这一概念,将概周期函数的定义域从实数域推广到了一般的群上,并在群上定义了 Mean,证明了 Parseval 公式、唯一性定理和逼近定理等. 1935 年 J. Von Neumann 等[5]研究了值域为一般线性空间的概周期函数. 正因为这 2 篇经典之作,不少学者意识到对群上的概周期函数的研究是对经典概周期函数理论的进一步深入探索,是一项非常有意义的研究. 随后关于群上的概周期函数的论文接踵而至[6-11],如 1949 年 H. Bohr[10]阐述了一般的经典概周期函数理论如何可以延伸至群上,形成更为广泛的概周期函数理论;W. F. Eberlein[11]在拓扑群上定义了弱概周期函数. 事实上,近年来仍有不少数学工作者致力于关于群上的概周期函数的研究,并得到了一系列成果[12-16]. 显然关于群上的概周期函数的研究会更为复杂,而对群上的概周期函数的研究会深刻地揭示概周期性的本质. 在关于群上的概周期函数的以往研究中,大部分是讨论复值的情形,但是现有文献却较少研究 Banach 值的情形,因此本文将对群上的 Banach 空间值概周期函数的一些性质展开探索.

定义 1[4] 设 G 是群,f 是群 G 上的复值函数. 若任给群 G 上的一个序列 $\{s'_n\}$,存在子列 $\{s_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} f(xs_n) = g(x),\ \forall x \in G,$$

其中函数列 $\{f(xs_n)\}$ 对变量 $x \in G$ 一致收敛于 $g(x)$,则称函数 f 是右概周期的.

若将定义 1 中的 $f(xs_n)$ 改为 $f(s_nx)$,则得到了群上的左概周期函数的定义,将定义 1 中函数的值域改为 Banach 空间,则可定义群上的 Banach 值右概周期和左概周期函数. 当 f 既是左概周期函数又是右概周期函数时,称 f 为概周期函数. 许多关于概周期函数的文献阐述的是定义在 $\mathbf{R}$ 上的概周期函数,而 $\mathbf{R}$ 是一个加法群,所以并不用区分左概周期函数和右概周期函数. 值得注意的是在一般的群上,左概周期函数和右概周期函数的等价性并不明确. 有趣的是,C. Corduneanu[17]证明了群上的复值右概周期函数与左概周期函数是一致的.

引理 1[17] 设 G 是群,f 是群 G 上的复值函数. 若 f 是右概周期函数,则 f 也是左概周期函数.

注 1 由引理 1 易知当 f 的值域为 $\mathbf{C}$ 时,左概周期函数与右概周期函数是等价的.

定义 2[18] 设 X 是 Banach 空间,f 是 $\mathbf{R}$ 上的 X 值概周期函数,$\{s_n\} \subset \mathbf{R}$. 若函数列 $\{f(t+s_n)\}$ 对变量 $t \in \mathbf{R}$ 一致收敛,则称序列 $\{s_n\}$ 是正规的(关于 f).

收稿日期:2019-10-10

基金项目:国家自然科学基金(11861037),江西省自然科学基金重点课题(20192ACB20012)和江西省研究生创新基金(YC2018-S152)资助项目.

通信作者:丁惠生(1979-),男,安徽无为人,教授,博士,博士生导师,主要从事非线性泛函分析研究. E-mail:dinghs1979@jxnu.edu.cn

定义 3[19]　设 G 是局部紧拓扑群,f 是群 G 上的复值函数. 若 $\forall \varepsilon > 0$,存在 G 的一个紧子集 C,使得 $\forall z \in G$, $\exists w \in zC$,满足 $\sup\limits_{x,y \in G} | f(xy) - f(xwy) | < \varepsilon$,则称函数 f 是 Bohr 概周期的.

注 2　定义 3 是对 $\mathbf{R}$ 上的 Bohr 概周期函数定义的一个推广,如下引理表明定义 3 是有意义的.

引理 2[19]　设 f 是局部紧拓扑群 G 上的连续复值函数,则 f 是 Bohr 概周期的当且仅当 f 是概周期的.

1　主要结果及证明

引理 1 的结论显示:当值域为 $\mathbf{C}$ 时,即使群不是加法群,右概周期函数也一定是左概周期函数. 自然而然的一个问题是:当值域为一般的 Banach 空间时,右概周期函数也一定是左概周期函数吗?对此,有下述结果.

定理 1　设 G 是群,X 是有限维 Banach 空间,f 是群 G 上的 X 值函数,则 f 是右概周期函数当且仅当 f 是左概周期函数.

证　显然 f 是从 G 到 X 上的右概周期函数等价于 $\{R_s f: s \in G\}$ 是 $B(G,X)$ 中的相对紧集,其中 $R_s f: x \to f(xs)$, $s \in G$, $B(G,X)$ 是从 G 到 X 的所有有界函数的全体,关于范数 $\|\cdot\|$ ($\|f\| = \sup\limits_{x \in G} \|f(x)\|_X$) 构成 Banach 空间. 故 $\forall \varepsilon > 0$,存在 G 中的有限个元素 $s_1, s_2, \cdots, s_p$,使得 $\forall \varphi \in \{R_s f: s \in G\}$,存在某个 s_r, $r \in \{1,2,\cdots,p\}$ 满足 $\|\varphi - R_{s_r} f\| < \varepsilon$.

下证存在 G 的子集 $T_1, T_2, \cdots, T_m$ 使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{m} T_i = G$,且当 $x, y \in T_i$ ($i = 1,2,\cdots,m$) 时,有

$$\|R_{s_r} f(x) - R_{s_r} f(y)\|_X < \varepsilon/3, r = 1,2,\cdots,p.$$

X 是有限维 Banach 空间,不妨设 X 是 2 维的,e_1、e_2 是它的基(多维的情形可同样处理),故 $\forall z \in X$, $z = a_1 e_1 + a_2 e_2$ ($a_1, a_2 \in \mathbf{R}$),令 $\|z\|_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$,则 $\|\cdot\|_1$ 是 X 上的一个范数. 由 X 是有限维的可知存在常数 C_1、C_2 使得 $C_1 \|z\|_1 \leqslant \|z\|_X \leqslant C_2 \|z\|_1$. 由 f 是右概周期函数可知 f 有界,故 $\exists M' > 0$, $\|f(z)\|_X < M'$, $\forall z \in X$. 从而存在常数 $M > 0$, $\|f(z)\|_1 < M$, $\forall z \in X$. 令 $k = 3\sqrt{2} M C_2 / \varepsilon$,不妨设 k 为整数. 令

$A_{ij} = \{x \in G: R_{s_1} f(x) = a_1 e_1 + a_2 e_2, a_1 \geqslant 0, a_2 \geqslant 0, (i-1)\varepsilon/(3\sqrt{2}C_2) \leqslant |a_1| \leqslant i\varepsilon/(3\sqrt{2}C_2), (j-1)\varepsilon/(3\sqrt{2}C_2) \leqslant |a_2| \leqslant j\varepsilon/(3\sqrt{2}C_2)\}$, $i,j = 1, 2, \cdots, k$,

$B_{ij} = \{x \in G: R_{s_1} f(x) = a_1 e_1 + a_2 e_2, a_1 \leqslant 0, a_2 \geqslant 0, (i-1)\varepsilon/(3\sqrt{2}C_2) \leqslant |a_1| \leqslant i\varepsilon/(3\sqrt{2}C_2), (j-1)\varepsilon/(3\sqrt{2}C_2) \leqslant |a_2| \leqslant j\varepsilon/(3\sqrt{2}C_2)\}$, $i,j = 1, 2, \cdots, k$,

$C_{ij} = \{x \in G: R_{s_1} f(x) = a_1 e_1 + a_2 e_2, a_1 \geqslant 0, a_2 \leqslant 0, (i-1)\varepsilon/(3\sqrt{2}C_2) \leqslant |a_1| \leqslant i\varepsilon/(3\sqrt{2}C_2), (j-1)\varepsilon/(3\sqrt{2}C_2) \leqslant |a_2| \leqslant j\varepsilon/(3\sqrt{2}C_2)\}$, $i,j = 1, 2, \cdots, k$,

$D_{ij} = \{x \in G: R_{s_1} f(x) = a_1 e_1 + a_2 e_2, a_1 \leqslant 0, a_2 \leqslant 0, (i-1)\varepsilon/(3\sqrt{2}C_2) \leqslant |a_1| \leqslant i\varepsilon/(3\sqrt{2}C_2), (j-1)\varepsilon/(3\sqrt{2}C_2) \leqslant |a_2| \leqslant j\varepsilon/(3\sqrt{2}C_2)\}$, $i,j = 1, 2, \cdots, k$,

将上述集合按任意顺序排列,记为 $Y_1^1, Y_2^1, \cdots, Y_{l_1}^1$. 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{l_1} Y_i^1 = G$ 且当 $x, y \in Y_i^1$ ($i = 1,2,\cdots,l_1$) 时,$\|R_{s_1} f(x) - R_{s_1} f(y)\| < \varepsilon/(3C_2)$,同理对 $R_{s_k} f$, $k = 2,3,\cdots,p$,可以得到 $\{Y_n^k\}_{n=1}^{l_k}$. 让 $\{Y_n^1\}_{n=1}^{l_1}$ 和 $\{Y_n^2\}_{n=1}^{l_2}$ 两两相交,得到的集合记为 $\{K_q\}_{q=1}^{l_1 \times l_2}$;再让 $\{K_q\}_{q=1}^{l_1 \times l_2}$ 与 $\{Y_n^3\}_{n=1}^{l_3}$ 两两相交,得到 $\{K_{\bar{q}}\}_{\bar{q}=1}^{l_1 \times l_2 \times l_3}$,不断重复此步骤 $(p-1)$ 次,最终得到一族集合,将其记作 $\{T_i\}_{i=1}^{m}$. 故 $\bigcup\limits_{i=1}^{m} T_i = G$ 且当 $x, y \in T_i$ ($i = 1,2,\cdots,m$) 时,有

$$\|R_{s_r} f(x) - R_{s_r} f(y)\|_1 < \varepsilon/(3C_2), r = 1,2,\cdots,p.$$

由上式可得

$$\|R_{s_r} f(x) - R_{s_r} f(y)\|_X < \varepsilon/3, r = 1,2,\cdots,p.$$

下证 f 是左概周期函数. 当 $x, y \in T_i$ ($i = 1, 2,\cdots,m$) 时, $\forall \varphi \in \{R_s f: s \in G\}$, $\exists r \in \{1,2,\cdots, p\}$,使得 $\|\varphi - R_{s_r} f\| < \varepsilon/3$,因此有

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_X \leqslant \|\varphi(x) - R_{s_r} f(x)\|_X + \|R_{s_r} f(x) - R_{s_r} f(y)\|_X + \|R_{s_r} f(y) - \varphi(y)\|_X < \varepsilon.$$

从 T_i ($i = 1,2,\cdots,m$) 中任取一个元素 $b_1, b_2, \cdots, b_m$,则 $L_{b_1} f, L_{b_2} f, \cdots, L_{b_m} f$ 是集合 $\{L_s f: s \in G\}$ 的一个 ε-网,其中 $L_s f: x \to f(sx)$, $\forall s \in G$. 实际上,$\forall t \in G$,则 t 属于某个 T_i. 由 t 和 b_i 同属于 T_i 可知 $\forall s \in G$ 有

$$\|R_s f(t) - R_s f(b_i)\|_X = \|f(ts) - f(b_i s)\|_X < \varepsilon,$$

即 $\sup\limits_{s \in G} \|f(ts) - f(b_i s)\|_X = \sup\limits_{s \in G} \|L_t f(s) - L_{b_i} f(s)\|_X < \varepsilon$. 因此 f 是左概周期函数.

同理可证当 f 是左概周期函数时,f 也是右概周期函数.

注 3　定理 1 说明若 f 是从群到有限维 Banach 空间上的左(右)概周期函数,则它也必然是右(左)概周期函数,即 2 者是等价的. 定理 1 是对引理 1 的一个自然推广. 由于有限维 Banach 空间与 $\mathbf{R}^n$ 拓

扑同构,所以可类似于处理 $\mathbf{R}^n$ 的情况,运用引理 1 中的方法便得到了这一结果.

定理 2 设 G 是群,X 是有限维 Banach 空间,f 是群 G 上的 X 值有界函数,则 f 是右概周期函数当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$,存在 G 的有限个子集 $T_1, T_2, \cdots, T_m$,使得 $G = \bigcup_{i=1}^{m} T_i$,且当 $x, y \in T_i (i = 1,2,\cdots,m)$ 时,有

$$\| R_s f(x) - R_s f(y) \| < \varepsilon, \forall s \in G,$$

其中 $R_s f: x \to f(xs)$.

证 必要性 由定理 1 的证明可推出.

充分性 任给序列 $\{s'_n\} \subset G$. 对 $n = 1,2,\cdots$,令 $\varepsilon_n = 1/n$,取上述条件中的集合 $\{T_i^n\}_{i=1}^{m_n}$,在每个 $T_i^n (i = 1,2,\cdots,m_n)$ 中取 1 个元素得到 $\{b_k^n\}_{k=1}^{m_n}$,这些有限集(可数多个)的并集为至多可数集,记为 $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$. 由 f 是有界函数可知 $\forall i \in \mathbf{N}^+$,序列 $\{f(b_i s'_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中有界集,在 X 中有界集必是相对紧集,故存在收敛子列,用对角线法取 $\{s'_n\}$ 的子列 $\{s_n\}$ 得到 $\{R_{s_n} f(x)\}_{n=1}^{\infty}$,且对每个 $b_i (i = 1,2,\cdots)$ 有 $\{R_{s_n} f(b_i)\}$ 收敛.

下证函数列 $\{R_{s_n} f(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 对 $x \in G$ 一致收敛. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbf{N}^+$, $\varepsilon_{n_0} < \varepsilon/3$. 则对 $b_1^{n_0}$、$b_2^{n_0}$、$\cdots$、$b_{m_{n_0}}^{n_0}$ 存在公共的 $N(\varepsilon)$,当 $m > n > N(\varepsilon)$ 时有

$$\| R_{s_m} f(b_j^{n_0}) - R_{s_n} f(b_j^{n_0}) \| < \varepsilon/3, j = 1,2,\cdots,m_{n_0}.$$

$\forall x \in G$,存在某个 $b_j^{n_0}$,x 和 $b_j^{n_0}$ 同属于 $T_j^{n_0}$. 从而有

$$\| R_{s_m} f(x) - R_{s_m} f(b_j^{n_0}) \| < \varepsilon_{n_0} < \varepsilon/3,$$

$$\| R_{s_n} f(x) - R_{s_n} f(b_j^{n_0}) \| < \varepsilon_{n_0} < \varepsilon/3.$$

结合上面 3 式可得

$$\| R_{s_m} f(x) - R_{s_n} f(x) \| = \| R_{s_m} f(x) - R_{s_m} f(b_j^{n_0}) + R_{s_m} f(b_j^{n_0}) - R_{s_n} f(b_j^{n_0}) + R_{s_n} f(b_j^{n_0}) - R_{s_n} f(x) \| \leq \| R_{s_m} f(x) - R_{s_m} f(b_j^{n_0}) \| + \| R_{s_m} f(b_j^{n_0}) - R_{s_n} f(b_j^{n_0}) \| + \| R_{s_n} f(b_j^{n_0}) - R_{s_n} f(x) \| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

由 X 的完备性可知序列 $\{R_{s_n} f(x)\}$ 收敛且对变量 $x \in G$ 一致收敛. 故 f 是右概周期函数.

注 4 定理 2 是对文献[17]的定理 7.1 的推广,这里运用构造分解的思想给出了从群到复数域上的有界函数成为右概周期函数的一个等价条件,对其类似地处理便可推广到有限维 Banach 空间,主要还是用到了有限维 Banach 空间的特征. 在无限维 Banach 空间下该等价条件是否成立还是一个值得进一步思考的问题.

定理 3 设 G 是拓扑群,X 是 Banach 空间,f 是拓扑群 G 上的 X 值连续函数. 若 f 是右概周期函数,Λ 是 G 的稠密子集,序列 $\{s_n\} \subset G$ 满足 $\forall x \in \Lambda$,$\lim_{n\to\infty} f(xs_n) = g(x)$,则函数列 $\{f(xs_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 对变量 $x \in G$ 一致收敛.

证 反证法. 假设该结论不成立. 由 f 是群 G 上的右概周期函数可知,对序列 $\{s_n\}$ 存在子列 $\{s_n^1\}$ 使得 $\{f(xs_n^1)\}$ 对 $x \in G$ 一致收敛,记 $h(x) = \lim_{n\to\infty} f(xs_n^1)$. 又 $\{f(xs_n)\}$ 对 $x \in G$ 不一致收敛,故 $\exists \varepsilon > 0$, $\forall N \in \mathbf{N}^+$, $\exists n > N$,使得 $\sup_{x\in G} \| f(xs_n) - h(x) \| > \varepsilon$. 因此可取 $\{f(xs_n^2)\}$,使得 $\{f(xs_n^2)\}$ 任一子列都不一致收敛于 $h(x)$. 再由 f 是群 G 上的右概周期函数可知存在 $\{s_n^2\}$ 的子列(仍记为 $\{s_n^2\}$)使得序列 $\{f(xs_n^2)\}$ 对变量 $x \in G$ 一致收敛,记 $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} f(xs_n^2)$. 显然 $h(x) \not\equiv \varphi(x)$.

由 f 是从 G 到 X 上的连续函数可知,$\forall n \in \mathbf{N}^+$,$f(\cdot s_n^1)$ 和 $f(\cdot s_n^2)$ 都是连续函数,其中 $f(\cdot s): x \to f(xs)$, $\forall s \in G$. 事实上,$\forall s \in G$,$f(\cdot s)$ 都是连续函数. 又 X 是完备的度量空间,从而由文献[20]的定理 9.2.3 可知 $h(x)$ 和 $\varphi(x)$ 都是连续函数. 又因为 $\{s_n^1\}$ 和 $\{s_n^2\}$ 都是 $\{s_n\}$ 子列且 $\lim_{n\to\infty} f(xs_n) = g(x)$ ($\forall x \in \Lambda$),所以有 $h(x) = \varphi(x)$, $\forall x \in \Lambda$. 又 Λ 是 G 的稠密子集,由文献[20]的定理 5.2.1 可知,$\forall x \in G$,有 $h(x) = \varphi(x)$,即 $h(x) \equiv \varphi(x)$. 矛盾. 故序列 $\{f(xs_n)\}$ 对变量 $x \in G$ 一致收敛.

注 5 L. Amerio 等[18]给出了正规序列的概念. 显然正规序列和概周期函数的联系非常紧密,如 Bochner 概周期函数 f 的定义为任给一个序列都存在一个正规子列(关于 f). L. Amerio 等[18]研究了 $\mathbf{R}$ 上的一个序列成为正规序列的相关条件,定理 3 便是将其推广到了拓扑群上,给出了类似的条件.

定理 4 设 G 是交换的局部紧拓扑群,f 是群 G 上的连续复值函数. 若 f 是 Bohr 概周期函数,则 $\forall \varepsilon > 0$,存在 G 中有限个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,使得 $G = \bigcup_{k=1}^{n} a_k P_\varepsilon$,其中 $P_\varepsilon = \{\tau: \sup_{x\in G} | f(x) - f(x\tau) | < \varepsilon\}$, $a_k P_\varepsilon = \{a_k \tau: \tau \in P_\varepsilon\}$.

证 反证法. 假设该结论不成立,则 $\exists \varepsilon > 0$,任给 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, $G \neq \bigcup_{k=1}^{n} a_k P_\varepsilon$. 任取 $s_1 \in G$,由 $G \neq s_1 P_\varepsilon$ 知可取 $s_2 \in G$, $s_2 \notin s_1 P_\varepsilon$. 由条件知 $\exists s_3 \in G$, $s_3 \notin s_1 P_\varepsilon \cup s_2 P_\varepsilon$,即 $s_3 s_1^{-1} \notin P_\varepsilon$, $s_3 s_2^{-1} \notin P_\varepsilon$. 不断重复上述步骤取得序列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $s_n s_k^{-1} \notin P_\varepsilon$, $k < n$. 由引理 2 可知对序列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$,存在子列(不妨仍记为 $\{s_n\}$)使得 $g(x) = \lim_{n\to\infty} f(xs_n)$ 存在且对 $x \in G$ 一致收敛. 故对上述 ε, $\exists N$,当 $m > n > N$ 时有 $\sup_{x\in G} | f(xs_n) - g(x) | < \varepsilon/2$, $\sup_{x\in G} | f(xs_m) - g(x) | < \varepsilon/2$. 从而

$\sup\limits_{x\in G}|f(x)-g(xs_n^{-1})|<\varepsilon/2$, $\sup\limits_{x\in G}|f(xs_ms_n^{-1})-g(xs_n^{-1})|<\varepsilon/2$. 结合上述2式,$\sup\limits_{x\in G}|f(xs_ms_n^{-1})-f(x)|<\varepsilon$. 这说明 $s_ms_n^{-1}\in P_\varepsilon,m>n$,矛盾.

注 6　类似于 **R** 上的概周期函数的结果,交换的局部紧群 G 上的 Bohr 概周期函数的 ε-平移数的全体在群 G 中也是非常多的,经过有限次平移就能"铺满"整个群.

2　总结

本文对群上的 Banach 值概周期函数的性质展开了一些探索. 当值域为 Banach 空间时,得到了关于概周期函数的序列成为正规序列的一个充分条件. 当值域为有限维 Banach 空间时,证明了群上的左概周期函数与右概周期函数是等价的. 对无限维 Banach 空间,2 者是否等价还是一个值得进一步思考的问题. 类似于经典的概周期函数,证明了交换的局部紧拓扑群上的 Bohr 概周期函数的 ε 平移集可以经过有限次平移来"铺满"整个群.

3　参考文献

[1] Levitan B M, Zhikov V V. Almost periodic functions and differential equations [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

[2] Fink A M. Almost periodic differential equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1974.

[3] Zhang Chuanyi. Almost periodic type functions and ergodicity [M]. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2003.

[4] Von Neumann J. Almost perioidc functions in a group: I [J]. Trans Amer Math Soc, 1934, 36(3): 445-492.

[5] Von Neumann J, Bochner S. Almost periodic functions in groups: II [J]. Trans Amer Math Soc, 1935, 37(1): 21-50.

[6] Van Kampen E R. Almost periodic functions and compact groups [J]. Ann of Math, 1936, 37(1): 78-91.

[7] Von Neumann J, Wigner E P. Minimally almost periodic groups [J]. Ann of Math, 1940, 41(2): 746-750.

[8] Iyanaga S, Kodaira K. On the theory of almost periodc functions in a group [J]. Proc Imp Acad Tokyo, 1940, 16(4): 136-140.

[9] Følner E. Almost periodic functions on Abelian groups [M]. Copenhagen: C R Dixième Congrès Math Scandinaves, 1946: 356-362.

[10] Bohr H. On almost periodic functions and the theory of groups [J]. Amer Math Monthly, 1949, 56(9): 595-609.

[11] Eberlein W F. Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions [J]. Trans Amer Math Soc, 1949, 67(1): 217-240.

[12] Zheng Zheming, Ding Huisheng. On completeness of the space of weighted pseudo almost automorphic functions [J]. J Funct Anal, 2015, 268(10): 3211-3218.

[13] Shtern A I. Almost periodic functions on connected locally compact groups [J]. Russ J Math Ohys, 2010, 17(4): 509-510.

[14] Gabriyelyan S S. Minimally almost periodic group topologies on countably infinite Abelian groups [J]. Proc Amer Math Soc, 2015, 143(4): 1823-1829.

[15] Bergelson V, Christopherson C, Robertson D, et al. Finite products sets and minimally almost periodic groups [J]. J Funct Anal, 2016, 270(6): 2126-2127.

[16] Gabriyelyan S S. Maximally almost periodic groups and respecting properties [J]. Springer Proc Math Stat, 2019, 286(1): 103-136.

[17] Corduneanu C. Almost periodic functions [M]. New York: Interscience Publisher, 1968.

[18] Amerio L, Prouse G. Almost-periodic functions and functional equations [M]. New York, Toronto, Melbourne: Van Nostrand Reinhold Company, 1971.

[19] Struble R A. Almost periodic functions on locally compact groups [J]. Proc Nat Acad Sci, 1953, 39(2): 122-126.

[20] 熊金城. 点集拓扑讲义 [M]. 北京:高等教育出版社, 2011.

Some Notes about Almost Periodic Function on Groups

CHEN Yejun[1], DING Huisheng[1*], JIAN Weigang[1,2]

(1. College of Mathematics and Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China;

2. School of Mathematics and Computer Science, Yuzhang Normal university, Nanchang Jiangxi 330103, China)

Abstract: In this paper, the properties of Banach-valued almost periodic functions on groups are studied and it is proved that the right almost periodic functions and the left almost periodic functions are equivalent in Banach spaces which are finite dimension. In addition, the conditions of normal sequences and the properties of ε translation sets of almost periodic functions on locally compact Abelian groups are studied and some relevant results are obtained.

Key words: group; almost periodic function; Banach space; normal sequence

(责任编辑:曾剑锋)