第45卷 第2期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 45 No. 2
2021年3月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Mar. 2021

文章编号:1000-5862(2021)02-0211-06

在帕累托模型中风险度量的统计分析

温利民,李俊雪,王正武,李　玮
(江西师范大学数学与统计学院,江西 南昌 330022)

摘要:在帕累托风险模型中,该文研究了在险价值及其相关风险度量的关系,给出了在险价值、期望短缺、尾条件期望、条件在险价值等风险度量的计算方法;进而,利用极大似然法和矩估计法得到了这些风险度量的估计,证明了估计的相合性和渐近正态性;最后利用数值模拟的方法验证了在不同样本下估计的收敛速度.
关键词:在险价值;风险度量;相合性;渐近正态性
中图分类号:O 212.1　　文献标志码:A　　DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2021.02.16

0 引言

风险是指在某一特定环境下在某一特定时间段内某种损失发生的可能性.风险是由风险因素、风险事故和风险损失等要素组成的.换句话说,风险是在某一个特定时间段里,人们所期望达到的目标与实际出现的结果之间产生的距离.正是由于风险的不确定性,因此对风险进行合理有效地度量是风险管理者的重要目标.在概率统计中,一般用随机变量来描述风险(不确定性).假定风险随机变量 X 具有某个概率分布 $F_X(x)$.风险度量 $\rho(x)$ 为从空间 $\chi=\{X: X$ 为非负随机变量,且 $E(X^2)<\infty\}$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个实函数.

在风险管理中,一种重要的风险度量为在险价值度量(Value at Risk,简记为VaR),它是指在一定置信水平下,某一金融资产(或证券组合)在未来特定的一段时间内的最大可能损失.在金融市场中,VaR是非常有用的风险度量工具,在风险管理中有重要应用[1-3],其在金融风险管理中的运用可参见文献[4-6].

然而,在实际使用中,人们发现在险价值不是一种好的风险度量,因为这种度量不满足在风险度量一致性公理中的"次可加性"[7].文献[8]首次从公理化的角度提出了Coherent风险度量的概念,认为风险度量至少应该满足转移不变性、次可加性、正齐次性以及单调性等4个性质,将风险度量建立在公理化体系下.因此,VaR不是一个一致性风险度量.在VaR基础上进行改进的风险度量包括期望短缺(Expected Shortfall)、条件尾期望(Conditional Tail Expectation)、条件在险价值(Conditional Value at Risk)、尾在险价值(Tail Value at Risk)、失真风险度量(Distortion Risk Measurement)等.在这些度量中大部分能满足风险度量的一致性公理.在风险管理中得到重要应用.

在实际运用中,风险度量 $\rho(x)$ 是未知的,需要根据已有的信息来进行估计.一般地,假设对风险 X 具有 n 年的观测值 $X_1, X_2, \cdots, X_n$.根据这些信息对风险度量 $\rho(X)$ 进行估计.本文将研究在帕累托风险模型中风险度量的估计及其统计推断问题.帕累托分布是在非寿险精算领域中常用的风险模型,常常用来描述再保险或具有免赔额保险的索赔分布,相关的研究可参见文献[9-11].

本文先利用极大似然法和矩方法得到在帕累托分布中未知参数的估计,从而得到在险价值、期望短缺、条件尾期望、条件在险价值的估计;然后证明这些估计的相合性和渐近正态性;最后利用数值模拟的方法比较这些风险度量估计的差异,并通过估计的均方误差分析其收敛性.

1 在险价值及其相关风险度量

在险价值(VaR),或称为"风险价值",是指在

收稿日期:2020-12-05
基金项目:国家自然科学基金(71761019)和江西省自然科学基金(20203ACB21227)资助项目.
作者简介:温利民(1979—),男,江西石城人,教授,博士,博士生导师,主要从事数理统计与风险管理研究.E-mail:wlmjxnu@163.com

一定置信水平下某一金融资产(或证券组合)在未来特定的一段时间内的最大可能损失. 若取置信水平为 α,则风险 X 的 VaR 定义为

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbf{R}: F_X(x) \geqslant \alpha\}, \tag{1}$$

其中 $F_X(x)$ 表示 X 的分布函数,这里 α 一般取较大的概率,如 $\alpha = 0.95$ 或 0.99. 注意到,当风险 X 服从连续型分布时,$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$.

然而,在实际使用中,人们发现 VaR 不满足在风险度量一致性公理中的"次可加性公理". 下面举例说明.

例 1 设有一批 1 年期可违约债券,面值为 10 元. 在当年购买时价格为 10 元. 若 1 年后债券违约,则购买债券者分文不得;若债券不违约,购买者赚取 0.5 元. 假设违约概率为 0.02. 投资组合 A 为 100 份相同的债券,该债券或者全部违约,或者全部不违约;投资组合 B 为 100 份相互独立的不同债券,即这些债券违约与不违约相互独立. 记 L_A 和 L_B 分别为 2 种投资的收益. 首先,计算 2 种投资的期望收益. 对投资组合 A 有

$$E(L_A) = 100 \times 0.5 \times 0.98 = 49.$$

对投资组合 B,记 $Y_i = \begin{cases} 0, & \text{违约}, \\ 0.5, & \text{不违约}, \end{cases}$ 则 $L_B = \sum_{i=1}^{100} Y_i$,因此

$$E(L_B) = E(\sum_{i=1}^{100} Y_i) = \sum_{i=1}^{100} 0.5 \times 0.98 = 49.$$

即这 2 个投资组合有相同的期望收益. 为了比较这 2 个投资组合的优劣,则需要比较 2 个投资组合的风险. 由于 2 个投资组合的方差分别为

$$\mathrm{Var}(L_A) = (100 \times 0.5)^2 \times 0.98 \times 0.02 = 49,$$
$$\mathrm{Var}(L_B) = 100 \times 0.5^2 \times 0.98 \times 0.02 = 0.49,$$

所以根据马科维茨投资组合理论,显然投资组合 B 的风险小于投资组合 A 的风险. 但接下来计算这 2 个投资组合的 VaR 度量.

由于

$$F_{L_A}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.02, & 0 \leqslant x < 50, \\ 1, & x \geqslant 50, \end{cases}$$

所以,若取 $\alpha = 0.95$,则由式(1)可得 $\mathrm{VaR}_{0.95}(L_A) = 50$. 对投资组合 B,根据中心极限定理有

$$(L_B - E(L_B)) / \sqrt{\mathrm{Var}(L_B)} \sim N(0,1),$$

从而有

$$\mathrm{VaR}_{0.95}(L_B) = Z_{0.95} \sqrt{\mathrm{Var}(L_B)} + E(L_B) \approx 50.15.$$

因此,$\mathrm{VaR}_{0.95}(L_A) < \mathrm{VaR}_{0.95}(L_B)$. 即从 VaR 度量来说,投资组合 A 的风险竟然比投资组合 B 的风险更小. 这主要是由 VaR 不满足次可加性所导致的.

虽然在险价值不满足次可加性,但是却满足风险度量的其他 3 个公理. 对风险随机变量 X、Y 及常数 C 有如下的性质.

引理 1[11] 对 VaR 风险度量,满足性质:

(i) 转移不变性,$\mathrm{VaR}_\alpha(X + C) = \mathrm{VaR}_\alpha(X) + C$;

(ii) 正齐次性,$\mathrm{VaR}_\alpha(CX) = C\mathrm{VaR}_\alpha(X)$;

(iii) 单调性,当 $X \leqslant Y$,a.s. 时有 $\mathrm{VaR}_\alpha(X) \leqslant \mathrm{VaR}_\alpha(Y)$.

为此,人们开始对 VaR 风险度量进行改进,提出了一些改进的风险度量,包括 ES、CTE、CVaR 等.

定义 1[12] 对风险随机变量 X,称

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = E(X - \mathrm{VaR}_\alpha(X))_+$$

为期望短缺(Expected Shortfall,简记为 ES). 另外,称

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(X) = E(X - \mathrm{VaR}_\alpha(X) \mid X > \mathrm{VaR}_\alpha(X))$$

为条件在险价值(Conditional Value at Risk,简记为 CVaR). 称

$$\mathrm{CTE}_\alpha(X) = \mathrm{E}(X \mid X > \mathrm{VaR}_\alpha(X))$$

为风险 X 的条件尾期望(Conditional Tail Expectation,简记为 CTE).

注 1 对于非负连续型风险随机变量 X,其期望短缺 $\mathrm{ES}_\alpha(X)$ 为

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = \int_{\mathrm{VaR}_\alpha(X)}^{\infty} \overline{F}(X)\,\mathrm{d}x.$$

而条件尾期望为

$$\mathrm{CTE}_\alpha(X) = (\int_{\mathrm{VaR}_\alpha(X)}^{\infty} x\mathrm{d}F(x)) / (P(X > \mathrm{VaR}_\alpha(X))) = (\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_q \mathrm{d}q) / (1 - \alpha), \tag{2}$$

式(2)右边在有些文献中也被称为尾在险价值(Tail Value at Risk,简记为 TVaR)[7].

注 2[11] 对于连续型随机变量 X,关于 $\alpha \in (0,1)$,容易证明这些风险度量有如下的关系:

$$\mathrm{CTE}_\alpha(X) = \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \mathrm{ES}_\alpha(X) / (1 - \alpha),$$
$$\mathrm{CVaR}_\alpha(X) = \mathrm{CTE}_\alpha(X) - \mathrm{VaR}_\alpha(X) = \mathrm{ES}_\alpha(X) / (1 - \alpha).$$

例 2 在例 1 中,分别计算投资组合 A 和 B 的其他几个风险度量的值. 对投资组合 A,有

$$\mathrm{ES}_{0.95}(L_A) = E(L_A - 50)_+ = 100 \times 0.98 - 0 \times 0.02 = 98,$$
$$\mathrm{CVaR}_{0.95}(L_A) = \mathrm{ES}_{0.95}(L_A) / (1 - 0.95) = 1\,960,$$
$$\mathrm{CTE}_{0.95}(L_A) = \mathrm{VaR}_{0.95}(L(A)) + \mathrm{CVaR}_{0.95}(L_A) = 2\,058.$$

对投资组合 B,有

$$\mathrm{ES}_{0.95}(L_B) = E(L_B - 50.15)_+ = E(0) = 0,$$

$CVaR_{0.95}(L_B) = ES_{0.95}(L_B)/(1-0.95) = 0$,

$CTE_{0.95}(L_B) = VaR_{0.95}(L(B)) + CVaR_{0.95}(L_B) \approx 50.15$.

从上面的计算可看出,无论是 ES 度量、CTE 度量还是 CVaR 度量,投资组合 B 均有较小的风险.

2　在帕累托风险模型中相关风险度量的计算

帕累托(Pareto)分布是意大利经济学家 V. Pareto 将其作为一种收入分布而引入的. 在现代风险管理中,通常用它来描述各种社会经济、物理以及生物现象的随机规律,因此帕累托分布在城市人口、股票价格、保险风险、江河流量和某种药理过程后病人的存活时间等领域中都有重要应用.

定义 2[13]　若随机变量 X 的分布函数为

$$F(x;\theta,\beta) = 1-(\beta/(x+\beta))^{-\theta}, x>0.$$

则称随机变量 X 具有参数为 θ 和 β 的帕累托分布,记为 $X \sim \text{Pareto}(\theta,\beta)$.

容易得到帕累托分布的密度函数为

$$f(x;\theta,\beta) = \theta/(\beta(1+x/\beta)^{\theta+1}), x>0,$$

则 X 的数学期望和方差分别为

$$\mu = E(X) = \beta/(\theta-1),$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \theta\beta^2/((\theta-1)^2(\theta-2)).$$

由于当 $\theta \leqslant 2$ 时 X 的方差不存在,因此在后面的讨论中,均假设 $\theta > 2$.

若所考虑的风险 X 具有帕累托分布 $\text{Pareto}(\theta,\beta)$,则令 $F(x;\theta,\beta) = 1-(\beta/(x+\beta))^{-\theta} = \alpha$,得到 $F^{-1}(x;\theta,\beta) = \beta((1-x)^{-1/\theta}-1)$. 因此风险 X 的在险价值度量为

$$VaR_\alpha(X) = \beta((1-\alpha)^{-1/\theta}-1).$$

根据相关风险度量的关系,计算得到 ES、CTE 和 CVaR.

命题 1　假设风险 $X \sim \text{Pareto}(\theta,\beta)$,且参数 $\theta>2$,则 X 的期望短缺为

$$ES_\alpha(X) = \beta(1-\alpha)^{-(1-\theta)/\theta}/(\theta-1);$$

条件在险价值度量 CVaR 度量为

$$CVaR_\alpha(X) = \beta(1-\alpha)^{-1/\theta}/(\theta-1);$$

进而,风险 X 的尾在险价值度量为

$$CTE_\alpha(X) = \beta((1-\alpha)^{-1/\theta}-1) + \beta(1-\alpha)^{-1/\theta}/(\theta-1).$$

证　根据 ES 度量的定义,并利用分部积分公式,有

$$ES_\alpha(X) = E(X-VaR_\alpha(X))_+ = -\int_{VaR_\alpha(X)}^{\infty}(x-VaR_\alpha(X))\,d\bar{F}_X(x) = \int_{VaR_\alpha(X)}^{\infty}\bar{F}_X(x)\,dx = \beta\int_{VaR_\alpha(X)}^{\infty}(1+x/\beta)^{-\theta}d(1+x/\beta) = \beta(1-\alpha)^{-(1-\theta)/\theta}/(\theta-1);$$

因此得到

$$CVaR_\alpha(X) = ES_\alpha(X)/(1-\alpha) = \beta(1-\alpha)^{-1/\theta}/(\theta-1);$$

进而,得到

$$CTE(X) = E(X \mid X > VaR_\alpha(X)) = \left(\int_{VaR_\alpha(X)}^{\infty}(x-VaR_\alpha(X)+VaR_\alpha(X))\,dF_X(x)\right)/(P(x>VaR_\alpha(X))) = (ES_\alpha(X)+VaR_\alpha(X)(1-\alpha))/(1-\alpha) = VaR_\alpha(X)+ES_\alpha(X)/(1-\alpha) = \beta((1-\alpha)^{-1/\theta}-1)+\beta(1-\alpha)^{-1/\theta}/(\theta-1).$$

3　风险度量的估计及大样本性质

在实际风险管理中,由于在帕累托风险中的参数 θ、β 都是未知的,因此风险度量 VaR 及其相关风险度量也是未知的,需要根据已有的信息来估计.

假设对风险 X 已有 n 次独立同分布的观测,得到观测值 $X_1, X_2, \cdots, X_n$. 先估计参数 θ、β,进而得到这些风险度量的估计.

考虑极大似然估计. 注意到 θ、β 的似然函数为 $L(\theta,\beta) = \prod_{i=1}^{n}(\theta(1+x_i/\beta)^{-\theta-1}/\beta)$. 因此对数似然函数为

$$l(\theta,\beta) = n\ln(\theta/\beta) - (\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln(1+x_i/\beta).$$

将对数似然函数关于参数 θ 和 β 求偏导,并令导数为 0,得到如下的似然方程

$$\begin{cases} n/\theta - \sum_{i=1}^{n}\ln(1+x_i/\beta) = 0, \\ -n+(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}(x_i/(x_i+\beta)) = 0. \end{cases}$$

因此,参数 θ 和 β 的极大似然估计为方程

$$\begin{cases} \hat{\theta}_M = n/\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(1+X_i/\hat{\beta}_M)\right), \\ (\hat{\theta}_M+1)\sum_{i=1}^{n}(X_i/(X_i+\hat{\beta}_M)) = n \end{cases}$$

的解. 然而,似然方程没有显式解. 只能依靠软件求其数值解. 因此下面将考虑参数 θ 和 β 的矩估计. 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,$$

它们分别表示样本均值和样本方差.

根据帕累托分布的总体期望和方差,令

$$\begin{cases}\overline{X}=\beta/(\theta-1),\\ S^2=\theta\beta^2/((\theta-1)^2(\theta-2)),\end{cases}$$

则得到 θ、β 的矩估计为

$$\begin{cases}\hat{\theta}_L=2S^2/(S^2-\overline{X}^2),\\ \hat{\beta}_L=\overline{X}(S^2+\overline{X}^2)/(S^2-\overline{X}^2).\end{cases}$$

因此得到 VaR 及其相关风险度量的估计,即命题 2.

命题 2 在险价值度量的估计为

$$\widetilde{\mathrm{VaR}}_\alpha(X)=\overline{X}(S^2+\overline{X}^2)((1-\alpha)^{(\overline{X}^2-S^2)/(2S^2)}-1)/(S^2-\overline{X}^2),$$

期望短缺价值度量 ES 的估计为

$$\widetilde{\mathrm{ES}}_\alpha(X)=\overline{X}(1-\alpha)^{(\overline{X}^2+S^2)/(2S^2)},$$

条件在险价值度量 CVaR 的估计为

$$\widetilde{\mathrm{CVaR}}_\alpha(X)=\overline{X}(1-\alpha)^{(\overline{X}^2-S^2)/(2S^2)},$$

风险 X 的尾在险价值度量 CTE 的估计为

$$\widetilde{\mathrm{CTE}}_\alpha(X)=\widetilde{\mathrm{VaR}}_\alpha(X)+\overline{X}(1-\alpha)^{(\overline{X}^2-S^2)/(2S^2)},$$

且当 $n\to\infty$ 时,估计 $\widetilde{\mathrm{VaR}}_\alpha(X)$、$\widetilde{\mathrm{ES}}_\alpha(X)$、$\widetilde{\mathrm{CVaR}}_\alpha(X)$、$\widetilde{\mathrm{CTE}}_\alpha(X)$ 分别是各自风险度量的强相合估计.

根据强大数定律可知,当 $n\to\infty$ 时有 $\overline{X}\xrightarrow{\text{a.s.}}E(X)=\beta/(\theta-1)$,$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{\text{a.s.}}E(X^2)$;

又由连续性定理知,

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2\xrightarrow{\text{a.s.}}E(X^2)-(E(X))^2=\mathrm{Var}(X)=\theta\beta^2/((\theta-1)^2(\theta-2));$$

因此有

$$\widetilde{\mathrm{VaR}}_\alpha(X)=\overline{X}(S^2+\overline{X}^2)((1-\alpha)^{-(S^2-\overline{X}^2)/(2S^2)}-1)/(S^2-\overline{X}^2)\xrightarrow{\text{a.s.}}\beta((1-\alpha)^{-1/\theta}-1)=\mathrm{VaR}_\alpha(X).$$

同理,由于 $\widetilde{\mathrm{ES}}_\alpha(X)$、$\widetilde{\mathrm{CVaR}}_\alpha(X)$ 以及 $\widetilde{\mathrm{CTE}}_\alpha(X)$ 都是 $\overline{X}$ 与 S^2 的连续函数,根据连续性定理容易得到 $\widetilde{\mathrm{ES}}_\alpha(X)$、$\widetilde{\mathrm{CVaR}}_\alpha(X)$ 与 $\widetilde{\mathrm{CTE}}_\alpha(X)$ 的相合性.

为了证明估计的渐近正态性,暂时记 $Y_i=X_i^2$,将 $(X_i,Y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 看作 (X,Y) 的样本. 经过计算得到 X 和 Y 的方差和协方差[13] 分别为

$$\mathrm{Var}(X)=\sigma_x^2=\theta\beta^2/((\theta-1)^2(\theta-2)),$$

$$\mathrm{Var}(Y)=\sigma_y^2=4\theta(5\theta-11)\beta^4/((\theta-1)^2(\theta-2)^2(\theta-3)(\theta-4)),\theta>4,$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\sigma_{xy}=4\theta\beta^3/((\theta-1)^2(\theta-2)(\theta-3)).$$

记随机向量 (X,Y) 的协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 可表示为

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_x^2 & \sigma_{xy}\\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2\end{pmatrix}.$$

命题 3 在帕累托风险模型中,估计 $\widetilde{\mathrm{VaR}}_\alpha(X)$ 是渐近正态的,有

$$\sqrt{n}(\widetilde{\mathrm{VaR}}_\alpha(X)-\mathrm{VaR}_\alpha(X))\xrightarrow{L}N(0,\sigma_1^2),$$

其中 $\sigma_1^2=P_1^2\sigma_x^2+2P_1Q_1\sigma_{xy}+Q_1^2\sigma_y^2$ 以及

$$P_1=(\theta-1)(2\theta-3)((1-\alpha)^{-1/\theta}-1)+2(\theta-1)^2(\theta-2)M/\theta^2,$$

$$Q_1=-(\theta-1)(\theta-2)^2((1-\alpha)^{-1/\theta}-1)/(2\beta)-(\theta-1)^2(\theta-2)^2M/(2\theta^2\beta),$$

这里 $M=(1-\alpha)^{-1/\theta}\ln(1-\alpha)$.

证 根据 2 元随机向量的中心极限定理可得

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}E(X)\\ E(Y)\end{pmatrix}\right)\xrightarrow{L}N(0,\boldsymbol{\Sigma}),$$

其中 $E(X)=\beta/(\theta-1)$,$E(Y)=E(X^2)=2\beta^2/((\theta-1)(\theta-2))$. 为了证明 $\widetilde{\mathrm{VaR}}_\alpha(X)$ 的渐近正态性,令

$$g_1(x,y)=xy((1-\alpha)^{(2x^2-y)/(2(y-x^2)^2)}-1)/(y-2x^2),y\neq x^2.$$

其偏导数在 $(E(X),E(Y))$ 的值为

$$\partial g_1(x,y)/\partial x\triangleq P_1=((\theta-1)(2\theta-3)((1-\alpha)^{-1/\theta}-1)+2(\theta-1)^2(\theta-2)(1-\alpha)^{-1/\theta}\ln(1-\alpha)/\theta^2,$$

$$\partial g_1(x,y)/\partial y\triangleq Q_1=-(\theta-1)(\theta-2)^2((1-\alpha)^{-1/\theta}-1)/(2\beta)-(\theta-1)^2(\theta-2)^2(1-\alpha)^{-1/\theta}\cdot(\ln(1-\alpha))/(2\theta^2\beta);$$

注意到

$$\widetilde{\mathrm{VaR}}_\alpha(X)=g_1(\overline{X},\overline{Y}),\mathrm{VaR}_\alpha(X)=g_1(x,y),$$

则由 Cramer 定理[13,14] 有

$$\sqrt{n}(\widetilde{\mathrm{VaR}}_\alpha(X)-\mathrm{VaR}_\alpha(X))\xrightarrow{L}N\left(0,(P_1,Q_1)\boldsymbol{\Sigma}\begin{pmatrix}P_1\\ Q_1\end{pmatrix}\right)=N(0,\sigma_1^2).$$

类似地,可证明其他风险度量 $\widetilde{\mathrm{ES}}_\alpha(X)$、$\widetilde{\mathrm{CVaR}}_\alpha(X)$、$\widetilde{\mathrm{CTE}}_\alpha(X)$ 的渐近正态性.

命题 4 在帕累托风险模型中,估计 $\widetilde{\mathrm{ES}}_\alpha(X)$、$\widetilde{\mathrm{CTE}}_\alpha(X)$、$\widetilde{\mathrm{CVaR}}_\alpha(X)$ 都满足渐近正态性,即有

$$\sqrt{n}(\widetilde{\mathrm{ES}}_\alpha(X)-\mathrm{ES}_\alpha(X))\xrightarrow{L}N(0,\sigma_2^2),$$

$$\sqrt{n}(\widetilde{\mathrm{CVaR}}_\alpha(X)-\mathrm{CVaR}_\alpha(X))\xrightarrow{L}N(0,\sigma_3^2),$$

$$\sqrt{n}(\widetilde{\mathrm{CTE}}_\alpha(X)-\mathrm{CTE}_\alpha(X))\xrightarrow{L}N(0,\sigma_4^2);$$

其中渐近方差 σ_i^2 分别为

$\sigma_i^2 = P_i^2\sigma_x^2 + 2P_iQ_i\sigma_{xy} + Q_i^2\sigma_y^2, i = 2,3,4;$

这里

$P_2 = (1-\alpha)^{1-1/\theta} + 2(\theta-1)^2(\theta-2)(1-\alpha)M/\theta^2,$

$Q_2 = -(\theta-1)(\theta-2)^2(1-\alpha)M/(2\theta^2\beta),$

$P_3 = (1-\alpha)^{-1/\theta} + 2(\theta-1)^2(\theta-2)M/\theta^2,$

$Q_3 = -(\theta-1)(\theta-2)^2M/(2\theta^2\beta),$

$P_4 = ((\theta-1)(2\theta-3)((1-\alpha)^{-1/\theta}-1) + 4(\theta-1)^2(\theta-2)(\ln(1-\alpha)+M)/\theta^2,$

$Q_4 = -(\theta-1)(\theta-2)^2((1-\alpha)^{-1/\theta}-1)/(2\beta) - (\theta-1)^2(\theta-2)^2M/(\theta^2\beta).$

证　类似于命题 3 的证明，这里从略.

4　数值模拟与比较

本部分将给出在险价值及其相关风险度量估计的统计模拟，比较这些估计的均方误差和收敛速度. 在模拟中，取不同的 θ 和 β 值，每次从总体中抽样得到样本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，根据第 3 节得到的 VaR、ES、CTE、CVaR 的估计，计算其均方误差(MSE). 取重复次数 $m = 10\ 000$，关于给定的样本容量 n 和 θ、β，对上述过程重复 m 次，得到每个估计的均方误差的平均值. 结果如表 1 ~ 表 4 所示.

表 1　在 Pareto 模型下风险度量的估计($\alpha = 0.95, n = 100$)

(θ,β)	VaR_α	$\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha(X)$	MSE_1	ES_α	$\widehat{\mathrm{ES}}_\alpha(X)$	MSE_2
(3,2.5)	4.286 0	4.150 5	0.668 2	0.169 7	0.136 5	0.673 4
(3,3.0)	5.143 3	4.992 4	0.986 0	0.203 6	0.161 5	0.992 8
(3,4.0)	6.857 7	6.636 2	1.706 4	0.281 4	0.216 1	1.718 6
(4,4.0)	4.459 0	4.329 8	0.497 9	0.141 0	0.122 7	0.500 8
(5,4.0)	3.282 3	3.208 2	0.244 1	0.091 0	0.081 2	0.245 3

表 2　在 Pareto 模型下风险度量的估计($\alpha = 0.95, n = 1\ 000$)

(θ,β)	VaR_α	$\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha(X)$	MSE_1	ES_α	$\widehat{\mathrm{ES}}_\alpha(X)$	MSE_2
(3,2.5)	4.286 0	4.243 5	0.073 5	0.169 7	0.157 1	0.074 7
(3,3.0)	5.143 3	5.091 3	0.105 5	0.203 6	0.187 0	0.107 3
(3,4.0)	6.857 7	6.778 4	0.191 8	0.271 4	0.250 1	0.194 7
(4,4.0)	4.459 0	4.431 7	0.056 4	0.141 0	0.136 0	0.057 0
(5,4.0)	3.282 3	3.368 7	0.026 4	0.091 0	0.089 4	0.026 7

表 3　在 Pareto 模型下风险度量的估计($\alpha = 0.95, n = 100$)

(θ,β)	CVaR_α	$\widehat{\mathrm{CVaR}}_\alpha(X)$	MSE_3	CTE_α	$\widehat{\mathrm{CTE}}_\alpha(X)$	MSE_4
(3,2.5)	3.393 0	2.703 3	2.592 1	7.679 1	7.804 3	8.921 6
(3,3.0)	4.071 6	3.215 8	3.735 0	9.214 9	7.119 4	12.900 4
(3,4.0)	5.428 8	4.328 2	6.638 4	12.286 5	6.981 3	39.870 7
(4,4.0)	2.819 7	2.430 4	1.683 7	7.278 6	6.288 6	6.579 1
(5,4.0)	1.820 6	1.632 0	0.682 1	5.102 8	6.652 2	8.822 4

表 4　在 Pareto 模型下风险度量的估计($\alpha = 0.95, n = 1\ 000$)

(θ,β)	CVaR_α	$\widehat{\mathrm{CVaR}}_\alpha(X)$	MSE_3	CTE_α	$\widehat{\mathrm{CTE}}_\alpha(X)$	MSE_4
(3,2.5)	3.393 0	3.123 9	0.547 4	7.679 1	9.348 3	7.027 4
(3,3.0)	4.071 6	3.769 2	0.806 0	9.214 9	9.398 9	3.870 1
(3,4.0)	5.428 8	4.992 1	1.405 2	12.286 5	8.061 7	21.024 7
(4,4.0)	2.819 7	2.714 9	0.306 6	7.278 6	7.278 6	1.803 5
(5,4.0)	1.820 6	1.787 7	0.682 1	5.102 8	7.265 4	6.372 0

表 1 ~ 表 4 给出在不同 θ、β、n 的情况下，$\mathrm{VaR}_\alpha(X)$、$\mathrm{ES}_\alpha(X)$、$\mathrm{CVaR}_\alpha(X)$、$\mathrm{CTE}_\alpha(X)$ 和它们的估计 $\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha(X)$、$\widehat{\mathrm{ES}}_\alpha(X)$、$\widehat{\mathrm{CVaR}}_\alpha(X)$、$\widehat{\mathrm{CTE}}_\alpha(X)$ 的值，并给出了在不同参数下的均方误差. 从表 1 ~ 表 4 中可以看出，当样本容量增大时，每个风险度量的均方误差都是减小的，这说明风险度量估计是相合的. 另外当样本容量较大时，$\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ 和 ES_α 估计的均方误差都很小(如当 $n = 100, \theta = 3, \beta = 3$ 时，$\mathrm{MSE}_1 = 0.986\ 0, \mathrm{MSE}_2 = 0.992\ 8$)，这满足实际使用的需要. 而 $\mathrm{CVaR}_\alpha(X)$、$\mathrm{CTE}_\alpha(X)$ 这 2 种估计的

均方误差就相对比较大.

5 参考文献

[1] Gelman A,Carlin J B,Stern H S,et al. Bayesian data analysis [M]. New York: Chapman-Hall,1995.

[2] Szegö G. Measures of risk [J]. European Journal of Operational Research,2005,163(1):5-19.

[3] Denuit M,Dhaene J,Goovaerts M,et al. Actuarial theory for dependent risks: measures,orders and models [M]. Chichester: John Wiley and Sons,2005.

[4] Chen Chen,Zhang Limao,Tiong R L K. A novel learning cloud Bayesian network for risk measurement [J]. Applied Soft Computing Journal,2020,87: 105947.

[5] 王洁,李志民. 基于聚类分析的系统性风险度量研究 [J]. 重庆工商大学学报: 自然科学版,2019,36(6): 35-41.

[6] 张良超,周金亮,温利民. 零膨胀泊松模型中风险参数的贝叶斯估计 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2020,44(3):269-274.

[7] 章溢,周东琼,温利民. 柏拉图-伽玛模型下 TVaR 风险度量的贝叶斯估计 [J]. 工程数学学报,2015,32(5): 667-676.

[8] Artzner P,Delbaen F,Eber J M,et al. Coherent measures of risk [J]. Mathematical Finance,1999,9(3):203-228.

[9] Albrecher H,Kortschak D. On ruin probability and aggregate claim representations for pareto claim size distributions [J]. Insurance: Mathematics and Economics,2009,45(3):362-373.

[10] 黄娅,王京,周杰明,等. 风险相依下再保险双方的联合最优再保险问题 [J]. 运筹学学报,2019,23(4):13-33.

[11] Sarabia J M,Gómez-Déniz E,Prieto F,et al. Risk aggregation in multivariate dependent Pareto distributions [J]. Insurance: Mathematics and Economics,2016,71: 154-163.

[12] 王正武,温利民,刘志强. 风险度量的贝叶斯估计及其统计分析 [J]. 应用概率统计,2019,35(3):249-262.

[13] 茆诗松,王静龙,濮晓龙. 高等数理统计 [M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社,2006.

[14] 杜梦颖,章溢,温利民. 基于 Copula 相依模型的指数保费预测 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2018,42(1):19-22.

The Statistical Analysis of Risk Measure in Pareto Risk Model

WEN Limin,LI Junxue,WANG Zhengwu,LI Wei

(School of Mathematics and Statistics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: In the Pareto risk model,the relationship between the VaR and its associated risk measure is discussed,and the expressions of value at risk,expectation shortfall,tail value at risk and conditional value at risk are given. Furthermore,the estimation of these risk measures is obtained by using the maximum likelihood method and the moment estimation method,and the consistency and asymptotic normality of those estimators are also proved. Finally,the numerical simulation method is used to verify the convergence rate under different samples.

Key words: value at risk; risk measure; consistency; asymptotic normality

(责任编辑: 曾剑锋)