第46卷 第5期
2022年9月

江西师范大学学报(自然科学版)
Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)

Vol. 46 No. 5
Sep. 2022

丁树良,罗芬,汪文义,等. 非结构化完备 Q 阵的构造与判定[J]. 江西师范大学学报(自然科学版),2022,46(5):441-446.
DING Shuliang,LUO Fen,WANG Wenyi,et al. The structure of unstructured complete Q matrices and their identification[J]. Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science),2022,46(5):441-446.

文章编号:1000-5862(2022)05-0441-06

非结构化完备 Q 阵的构造与判定

丁树良,罗　芬,汪文义,李　佳,熊建华

(江西师范大学计算机信息工程学院,江西 南昌　330022)

摘要:将向量版本的非结构化完备 Q 矩阵(NCQM)的判别定理拓展为矩阵版本.当 $K=3$ 时对于线性型层级结构,NCQM 的结构是布尔格.对于任意 K 和其他层级结构这个结果也被证明成立.

关键词:非结构化完备 Q 矩阵;判定定理;结构;布尔格

中图分类号:B 841　　文献标志码:A　　DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2022.05.01

0　研究背景

认知诊断的目的是:了解被试认知的长处和不足,为后期的补救教学提供指导性意见.假设欲考察 K 个属性掌握情况,被试的认知状态用一个 K 维0-1向量表示,其第 j 个分量等于1表示被试掌握了第 j 个属性,否则为0,称这个 K 维向量为知识状态(knowledge state),它是被试与属性的关联向量.若要测查被试对属性的掌握情况,则需要根据被试在标明测查属性的项目上的作答反应进行推断.题目属性向量表示试题与属性的关联,而在试卷中所有的题目关联的属性用项目-属性关联矩阵表示.这个关联矩阵被称为测验 Q 矩阵(简称 Q 矩阵).Q 矩阵在认知诊断测验中起着举足轻重的作用.

一般来说,Q 矩阵既能表示项目与所测属性之间的关系,又能反映被试与所测属性之间的关系[1].本文约定 Q 矩阵行表示属性,列对应知识状态或者题目属性向量.题目属性向量必须是非零向量.

认知诊断测验设计(test design for cognitive diagnosis)实质上是 Q 矩阵设计,即测验蓝图设计,它是认知诊断测验在编制和实施之前的重要工作.若在实施测验之前就遵循一定的理论进行测验设计,即 Q 矩阵设计,则可避免一些能够预见的失误,并节省人力、物力,提高效率.

完备 Q 矩阵(complete Q matrix)[2-3]是指能够识别所有被试知识状态的 Q 矩阵.因此,认知诊断测验设计追求的目标就是具有完备性(completeness)的 Q 矩阵设计.

不包含任何随机误差的反应模式被称为理想反应模式(ideal response patterns,IRPs),应用某个认知诊断模型对作答反应向量取期望而获得的向量被称为期望项目反应向量(expected item response vectors,EIRVs).基于 IRPs 而不是基于 EIRVs 导出的知识状态对被试进行分类,仅需考虑 Q 矩阵的构造对知识状态判准率的影响且能排除其他额外的因素,这是既简单又直接考察 Q 矩阵设计质量的方式.

IRPs 由 Q 矩阵、属性及其层级关系(A&H)、理想得分评分规则等因素决定.

A&H 通常包括线性型、收敛型、发散型、无结构型[4]和独立型这5种基本层级结构.无结构型是一种特殊的发散型,收敛型可以由更简单的逆金字塔型(inverted pyramid)[5]和发散型复合而成.因此,本文使用的4种基本属性层级关系是线性型、发散型、逆金字塔型和独立型.若给定 A&H,则对应1个可达阵 $\boldsymbol{R}$,反之亦然,即可达阵和 A&H 是一一对应的.给定1个 Q 矩阵,在一定条件下(如 Q 矩阵的列数不小于属性数 K)通过 Q 矩阵的行逐对比较[6-7],可以获得这个 Q 矩阵对应的属性层级关系.

收稿日期:2022-07-10

基金项目:国家自然科学基金(62067005,61967009,31500909,31360237)资助项目.

作者简介:丁树良(1949—),男,江西樟树人,教授,主要从事计算机辅助教学和心理测量方面的研究.E-mail:ding06026@163.com

本文使用的理想得分评分规则与 DINA 模型的理想得分规则相同，即若知识状态 x_i 大于或等于题目属性向量 y_j，则理想得分 $s_{ij}=1$，否则 $s_{ij}=0$. 该评分规则意味着属性之间不可补偿.

定义 1 若在 Q 矩阵所有列中属性排列均不违反 R 的规定，则称这种 Q 矩阵为结构化 Q 矩阵(structured Q matrix)，否则称之为非结构化 Q 矩阵(unstructured Q matrix)[3,8].

出现非结构化 Q 矩阵的原因可能有: 1) 生手和熟手(如老师和学生)之间认知的差异[7]; 2) 有时候领域专家虽然对考察属性达成一致，但是划分的属性层级关系有比较大的分歧，此时某个专家可能认为其他的专家给出的 Q 矩阵为非结构化 Q 矩阵; 3) 对于可达阵的识别(或者估计)，也可能产生非结构化 Q 矩阵; 4) 甚至不同策略对应的 Q 矩阵也可能互为非结构化 Q 矩阵[9]; 5) 某些特殊考虑的认知诊断测验设计[10].

对于结构化 Q 矩阵而言，有研究表明: 在一定条件下，以可达阵 R 作为子矩阵的测验 Q 矩阵为完备 Q 矩阵[2-3]. 若将这里的可达阵 R 修改为 R 的列置换后的矩阵，则上述结论仍然成立. 本文 Q 矩阵的列表示项目的题目属性向量，变换项目的先后顺序不影响理想得分.

定义 2 给定属性及其层级关系(A&H)，可得到所有对应的知识状态，若基于理想反应模式，结构化 Q 矩阵能够判准所有知识状态，则称之为结构化完备 Q 矩阵. 若非结构化 Q 矩阵能够判准 A&H 对应的所有知识状态，则称之为非结构化完备 Q 矩阵.

迄今为止，从理论上探讨非结构化 Q 矩阵的设计是一个比较新的课题，所获得的成果并不多，囿于笔者目光，仅发现文献[3]讨论了这个问题.

定理 1[3] 在 DINA 模型的理想得分评分规则下，Q 是非结构化完备 Q 矩阵当且仅当 Q 以 R^* 为子矩阵，其中 $e_j \leqslant r_j^* \leqslant r_j$，$j=1,2,\cdots,K$，这里 $E=(e_j)$ 是 K 阶单位阵，$R=(r_j)$ 是 A&H 对应的可达阵，而 r_j^* 是 R^* 的第 j 列，$j=1,2,\cdots,K$.

对于同阶矩阵 A、B，$A \leqslant B$ 表示按照矩阵元素大小逐元比较，对所有 i、j 均有 $a_{ij} \leqslant b_{ij}$，这是定义在同阶矩阵集合上的偏序关系. 依照定理 1 中各个向量的排列顺序构成相应的矩阵，则得到一个矩阵不等式 $E \leqslant R^* \leqslant R$，注意到可达阵 R 具有自反性、反对称性和传递性，由自反和反对称的定义知，满足定理 1 条件的 R^* 具有自反性和反对称性，从而所有的 R^* 的对角元素均为 1 且均可表示为上三角 0-1 矩阵，但不一定满足传递性.

以下是将定理 1 的结果表达为矩阵形式.

定理 2 设 E 和 R 分别为 K 阶单位阵和可达阵，若 R^* 满足 $E \leqslant R^* \leqslant R$，则以 R^* 为子矩阵的 Q 矩阵当且仅当 Q 为非结构化完备 Q 矩阵.

显然，如同可达阵是完备 Q 矩阵的核心一样，定理 2 中的 R^* 是非结构化完备 Q 矩阵的核心. 同时也看到，这些“核心”矩阵是“有界”的，它们既不能“小于”单位阵 E，又不能“大于”可达阵 R.

以下定理 1 被称为非结构化完备 Q 矩阵的判定定理或者被简称为判定定理，定理 2 是定理 1 的矩阵版本. 定理 2 揭示了非结构化完备 Q 矩阵(NC-QM)和结构化完备 Q 矩阵之间的关系，并给出了非结构化完备 Q 矩阵的构造方法.

给定一个可达阵 R，对于满足定理 2 条件的所有 R^* 构成的集合，先讨论其构造，再指出定理 2 中 R^* 的列顺序可以重新排列从而扩展了定理 1.

1 非结构化完备 Q 矩阵集合的构造

1.1 一个有启发意义的例子

先考察一个最简单的但是富有启发性的例子.

例 1 $K=3$，线性型层级关系，可达阵

$$R=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

若将 R 第 1 行中的第 2 和第 3 元素置于 0，则所得矩阵 R^* 就是一个非结构化完备 Q 矩阵. 因为 R^* 表达的是属性 1 与属性 2 和属性 3 独立，而 R 表达的是属性 1、属性 2、属性 3 呈线性型结构，所以 R^* 是非结构化 Q 矩阵，以 R^* 作为测验 Q 矩阵，可以判准线性型对应的所有知识状态，因此 R^* 是完备 Q 矩阵. 注意，这个 R^* 满足自反性、反对称性和传递性，故它仍然是可达阵.

例 2 将例 1 中 R 的(1,3)元素置为 0，其他元素不变，获得的矩阵记为 D，$D=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相对于 R 来讲，这个矩阵也是非结构化完备 Q 矩阵，但是由于 D 中(1,2)元素与(2,3)元素均为 1，而(1,3)元素为 0，因此 D 不满足传递性，故它不是可达阵. 由行逐对比较方法[6-7]知 D 与例 1 中 R^* 对应的属性层级关系相同. 然而 D 比例 1 中 R^* 包含的非零元的数量多 1 个.

例 3 对于例 1 中 $K=3$ 的线性型结构，由定理 1 知，可以生成 7 个非结构化完备 Q 矩阵，它们分别

是 Q_j($j=0,1,2,\cdots,5$) 和 D，其中 Q_0 是单位阵 E，它们的具体形式如下:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{Q}_0=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}_4=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}_5=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

使用 Q 矩阵行的逐对比较方法，可以挖掘这 3 阶线性型可达阵和它对应的 7 个非结构化完备 Q 矩阵的层级关系. 它们实质上对应 4 类层级结构. 第 1 类是 3 个属性独立型结构(E，即 Q_0) . 第 2 类是 2 个属性之间有先决和后裔关系且另外一个属性与前面 2 个属性独立. 它对应 4 个不同的 Q 矩阵(Q_1，Q_2，Q_3，D) ，其中 Q_1、Q_2、Q_3 非对角元素仅仅包含 1 个非零元素，而 D 却包含 2 个非零元素. 第 3 类是 3 个属性的发散型结构(或者说无结构型) (Q_4) . 第 4 类是 3 个属性逆金字塔型结构(Q_5) . Q_4、Q_5 与 D 有相同之处，即非对角元素都有 2 个非零元素. 上述 Q 矩阵除 D 之外均满足自反性、反对称性、传递性，即它们均是可达阵. 接下来考察这 8 个布尔矩阵的构造.

对 2 个布尔矩阵定义一个布尔并(交) 运算，即逐元布尔并(交) ，则在例 3 中的 8 个布尔矩阵可以构成一个格(lattice) ，且还是布尔格(布尔格又被称为布尔代数) ，其最大元为 R，最小元为单位阵 E(见图 1) .

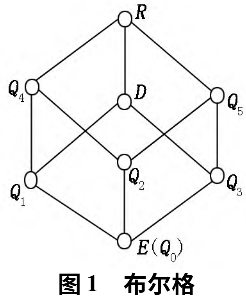

图 1　布尔格

布尔格既可以用偏序关系定义，又可以用运算定义 [11]，涉及并、交、补 3 种运算.

1.2　几个新的定义

例 3 中 8 个矩阵对应图 1 中 8 个单元，若以在矩阵非对角元素中非零元素的数量作为考察对象，数目相同的单元作为一层(layer) ，则图 1 包含 4 层，全下界不包含任何元素，其上一层每个单元包含 1 个元素，再上一层每个单元包含 2 个元素，最后一层就是格的全上界，它包含 3 个元素.

定义 3　假设 K 阶 Q 矩阵为具有自反性和反对称性的布尔矩阵，它可以表为上三角矩阵，除对角元素以外的非零元素被称为本质非零元. 所有本质非零元之和 m 被称为 Q 的本质非零元数. 而 $2m/(K(K-1))$ 被称为 Q 的稠密度.

特别地，当 $Q=R$ 时，称 m 为可达阵 R 的本质非零元数.

定义 4　在可达阵 R 中本质非零元所处的足码位置(即 R 中本质非零元所占的位置) 被称为关键位置(key location) .

除以上这些新定义之外，回顾一个已有的关于矩阵等价的定义.

定义 5　2 个 Q 矩阵 Q_1、Q_2 等价是指在交换 Q_2 的列后的矩阵等于 Q_1(或者说在 Q_2 右乘一个置换矩阵后的矩阵等于 Q_1) ，或者说存在一个交换矩阵 P，使得 $Q_1=Q_2P$. 也可以说 Q_1 与 Q_2 的列集合相等.

1.3　非结构化完备 Q 矩阵构成布尔格

设 R 为 K 阶可达阵，E 为 K 阶单位阵. 可达阵的行对应属性和列对应题目属性向量.

只要适当地给属性编号和适当地安排题目属性向量位置，可达阵就必定可以对应一个上三角矩阵，这是因为可达阵对应一个自反、反对称、传递关系的关系矩阵. 以下总假定可达阵是上三角矩阵.

令 $\mu=\{R^*\mid E\leqslant R^*\leqslant R\}$，$E$ 和 R 分别为 K 阶单位阵与可达阵.

引理 1　$\forall X\in\mu$，则 X 是具有自反性和反对称性的关系矩阵.

证　由 $E\leqslant X$ 知，X 的对角元素均为 1，由 $X\leqslant R$ 及 R 为上三角阵知，$\forall i\neq j$，$x_{ij}x_{ji}=0$，i，$j=1,2,\cdots,K$，故 X 是反对称的. 尽管 E 与 R 均具有传递性，但是 X 不一定具有传递性.

引理 2　在 μ 上定义 2 个 2 元运算 $\vee$ 与 $\wedge$，$\forall X,Y\in\mu$，$X\vee Y=(x_{ij}\vee y_{ij})$，$X\wedge Y=(x_{ij}\wedge y_{ij})$，其中矩阵元素 x_{ij} 和 y_{ij} 的 $\vee$ 与 $\wedge$ 分别为布尔并和布尔交，则在 $\langle\mu,\vee,\wedge\rangle$ 中 $\vee$、$\wedge$ 满足交换律、结合律、等幂律和吸收律，同时 $\vee$ 对 $\wedge$($\wedge$ 对 $\vee$) 满足分配律.

证　由于 $X\vee Y$、$X\wedge Y$ 的定义式及在 $x_{ij}\vee y_{ij}$、$x_{ij}\wedge y_{ij}$ 中 $\vee$ 与 $\wedge$ 实际上等同于逻辑运算中的逻辑与和逻辑交运算，所以这 2 个 2 元运算具有这些性质. 同理可知，$\vee$ 对 $\wedge$ 满足分配律，$\wedge$ 对 $\vee$ 也满足分配律.

引理 3　$\langle\mu,\vee,\wedge\rangle$ 是代数系统，在 μ 上存在偏

序关系$\leqslant$,使$\langle \mu, \leqslant \rangle$是格.

证 由引理2知2元运算$\vee$、$\wedge$满足交换律、结合律、吸收律,故引理3成立[11],且$\forall X, Y \in \mu$,$X \leqslant Y$当且仅当$X \wedge Y = X$,$X \vee Y = Y$.

引理4 在引理3中$\langle \mu, \leqslant \rangle$的偏序关系是$X \leqslant Y$当且仅当$x_{ij} \leqslant y_{ij}$,对所有$i, j = 1, 2, \cdots, K$.

证 这样定义的$X \leqslant Y$满足自反性、反对称性和传递性,故$\leqslant$是μ上的偏序关系.

由引理3知,$X \leqslant Y$当且仅当$X \wedge Y = X$.

由$(x_{ij}) = X = X \wedge Y = (x_{ij} \wedge y_{ij})$,故当$x_{ij} = 0$时$y_{ij} = 0$或$y_{ij} = 1$,且$x_{ij} \leqslant y_{ij}$;当$x_{ij} = 1$时$y_{ij} = 1$,且$x_{ij} = y_{ij}$.从而对所有$i, j$有$x_{ij} \leqslant y_{ij}$.

引理5 $\langle \mu, \vee, \wedge \rangle$是有界分配格.

证 显然$\forall X \in \mu$,$E \leqslant X \leqslant R$,$E$为最大下界(全下界),而$R$为最小上界(全上界).

$\forall X, Y, Z \in \mu$,$X \vee (Y \wedge Z) = (x_{ij} \vee (y_{ij} \wedge z_{ij})) = ((x_{ij} \vee y_{ij}) \wedge (x_{ij} \vee z_{ij})) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$.

同理可证$X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$.

故$\langle \mu, \vee, \wedge \rangle$是有界分配格.

定义6 $\forall X \in \mu$,X对应于R所有关键位置上的元素取补运算被定义为X的补运算.

例如,$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,$R^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.$R$的关键位置为$(1,2)$、$(1,3)$,则$R^*$的补为

$$\overline{R}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

有$R^* \wedge \overline{R}^* = E$,$R^* \vee \overline{R}^* = R$.

定理3 $\langle \mu, \vee, \wedge \rangle$为有界有补分配格,即有限布尔代数,其中补运算如定义6所示.

证 由引理1~引理5及定义6即得[11].

推论1 R为K阶可达阵,其本质非零元数为m,且对应的m个关键位置已知,则有界有补分配格$\langle \mu, \vee, \wedge \rangle$与在所有$m$维二进制数集合$\{0,1\}^m$上定义$\vee$、$\wedge$所构成的布尔代数同构.

2 文献[3]结果的扩展

文献[3]是非结构化完备Q矩阵(NCQM)判定定理的向量版本,定理2是这个判定定理的矩阵版本.

众所周知,一个测验的项目排列顺序不会影响理想反应的结果,重新排列的结果可以表示为R^*和K阶置换方阵P的乘积$R^* P$,这时候尽管$E \leqslant R^* P \leqslant R$不一定成立,但是$R^* P$仍然是非结构化完备$Q$矩阵,因此定理1可以重新表述为如下定理.

定理4 设R是对应A&H的可达阵,E为单位阵,P是K阶置换阵.在本文的评分规则下,若R^*满足不等式$E \leqslant R^* \leqslant R$,则$Q$是非结构化完备$Q$矩阵当且仅当$Q$以$R^* P$为子矩阵.

证 不失一般性,可以假设Q矩阵就是R^*.由定理1以及测验Q矩阵中项目的排列顺序对于理想得分没有任何影响知,定理4成立.

请注意:若将E、R^*、R按列剖分,则定理4不一定满足定理1的列之间的关系.由于仅仅当$P = E$时,它等同于定理1,所以从表面上看定理4只不过是定理1的矩阵版本,然而在实际上定理4是对定理1的扩展与补充.

3 讨论与小结

3.1 讨论

3.1.1 **为什么采用理想反应模式(IRPs)而不是采用期望项目反应向量(EIRVs)的判准率衡量设计测验Q矩阵?** 在给定属性及其层级关系以后,到底基于理想反应模式还是基于期望项目反应向量的判准率来衡量测验Q矩阵的优良性?本文是基于理想反应模式判准率来衡量测验Q矩阵设计的优良性.若使用期望项目反应向量判准率作为衡量标准,则必然涉及认知诊断模型的选择、测验项目的质量、甚至测验项目的放置顺序等因素.由于本文欲屏蔽其他因素的干扰,仅仅考虑测验Q矩阵的设计是否优良,故以基于理想反应模式的判准率作为衡量测验Q矩阵的优良性的标准.

一般而言,认知诊断测验设计是在测验实施之前的工作,这时无法确定将来收集到的实测数据拟合什么样的认知诊断模型(CDM),因此从逻辑上讲,若测验以后要结合数据分析评估测验设计(比如设计的稳健性等),则可以选择合适的CDM来评估,否则结合CDM评估认知诊断测验设计的质量的做法值得商榷.

文献[3]对非结构化完备Q矩阵判定定理的证明是基于期望项目反应向量,但是只要将DINA模型的猜测和失误参数都置于0,就是基于理想反应

得分的证明. 因此他们的结论在理想反应模式条件下同样成立.

3.1.2 准确理解 IRPs 与 KSs 设由 Q 矩阵导出的属性层级结构为 A&H(Q) . 从 3 个属性线性型的非结构化完备 Q 矩阵来看，有的非结构化完备 Q 矩阵是可达阵，而有的却不是可达阵. 但是使用定理 1 或定理 2 得出的非结构化 Q 矩阵，不管它是不是可达阵，均可以使得由 R 产生的知识状态集合和以 R^* 作为测验 Q 矩阵(的子矩阵) 获得的理想反应模式集合一一对应.

3.1.3 非结构化完备 Q 矩阵对 Q 矩阵标定的影响 文献 [12] 指出，大量研究表明 Q 矩阵错误界定会导致题目参数估计误差增大和被试诊断正确率降低，那么过度标定和不足标定哪一个负面影响更大一些? 根据非结构化完备 Q 矩阵的上述研究结果表明: 若在测验 Q 矩阵中以可达阵作为子矩阵，则对可达阵这部分元素进行标定，当出现不足标定(即将非对角元素中的 1 标注为 0) 时，也不会对判定结果产生很大的负面影响，而“过度标定”(即将可达阵 R 中本来应该是 0 的元素标注为 1) 所造成的负面影响更为严重.

3.1.4 当 $K=5$ 时关于发散-收敛型结构包含的题目属性向量数 在指出给定可达阵和单位阵后，根据定理 1 获得的非结构化完备 Q 矩阵集合在给定的偏序关系下可以构成布尔格. 然而学生 Q 矩阵[13] 在这种偏序关系下一般只能构成格(lattice) [14] ，即任何 2 个元素均有最大下界和最小上界的偏序集[11] . 注意文献 [3] 给出的发散-收敛(divergent-convergent hierarchy) 结构，虽然对应的可达阵 R 是正确的，但是根据 R 扩张出来的潜在 Q 矩阵(即文献 [3] 中所说的潜在属性空间“latent attribute space”) 却缺少 1 列.

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}_p=\left(\begin{array}{ccccc|cccccccc}1&0&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1\\0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&1&1&1\end{array}\right).$$

文献 [3] 缺少 Q_p 中倒数第 3 列. 若缺少这一列，则可达阵扩张出来的 Q_p 的倒数第 5、6 列便缺少最小上界，从而 Q_p 与零向量的并不能够形成一个格(lattice) .

3.2 小结

本文主要讨论了以下几个内容:

1) 考虑到 Q 矩阵的列交换并不影响 Q 矩阵的优良性(完备性) ，本文对文献 [3] 使用向量形式陈述的非结构完备 Q 矩阵的判定定理进行了补充和完善，并且应用扩张算法指出他们给出的潜在属性空间有误，不能形成格.

2) 本文认为基于理想反应模式进行诊断分析是评判 Q 矩阵优劣的最基本要求.

3) 给定一个可达阵 R 和单位阵 E，定义了非结构化完备 Q 矩阵的补运算，证明了 R 对应的非完备 Q 矩阵集合可以构成布尔格.

4) 给出自反和反对称布尔矩阵的本质非零元、本质非零元数 m、稠密度、可达阵 R 中的关键位置等概念. 可达阵的本质非零元数 m 的几何意义十分明显，$m+1$ 表达布尔格的层数，而且这个 R 和单位阵之间(包含 R 和单位阵) 存在 2^m 个结构化和非结构化完备 Q 矩阵.

5) 可达阵的本质非零元数规定了非结构化完备 Q 矩阵集合对应的布尔格所含元素的个数.

文献 [3] 以及本文推导出来的结论如欲应用于实践，还要根据实际情况灵活运用. 比如在 R 的某一列的非对角元素中某些非零元素化为零元素后，作为题目属性向量无法生成对应的项目. 这时要找到非结构化完备 Q 矩阵，只能够放弃对这一列的“改造”. 文献 [15] 曾对此进行了一些讨论.

希望本文的结果能够补充和深入非结构化完备 Q 矩阵的研究，并且用于除认知诊断测验设计之外的 Q 矩阵标定和具有诊断功能的计算机化自适应测验(CD-CAT) 的选题策略和题库建设之中，用于多步骤认知诊断计算机化自适应测验(CD-MST) 以及用布尔矩阵分解方法以估计 Q 矩阵[16] 之中. 对于多值 Q 矩阵情形，非结构化完备 Q 矩阵的相应问题也值得被探究.

4 参考文献

[1] 王晓庆，丁树良，罗芬. 认知诊断中 Q 矩阵及其作用 [J] . 心理科学，2019，42(3) : 739-746.

[2] CAI Yan，TU Dongbo，DING Shuliang. Theorems and methods of a complete $\boldsymbol{Q}$ matrix with attribute hierarchies under restricted $\boldsymbol{Q}$-matrix design [J] . Frontiers in Psy-

chology,2018,9:1413.
[3] KÖHN H F,CHIU C Y. A unified theory of the completeness of Q-matrices for the DINA model [J]. Journal of Classification,2021,38(3):500-518.
[4] LEIGHTON J P,GIERL M J,HUNKA S M. The attribute hierarchy method for cognitive assessment: a variation on Tatsuoka's rule-space approach [J]. Journal of Educational Measurement,2004,41(3):205-237.
[5] LIU Ren,HUGGINS-MANLEY A C. The specification of attribute structures and its effects on classification accuracy in diagnostic test design [EB/OL]. [2021-12-16]. https://www.doc88.com/p-2804874504068.html.
[6] TATSUOKA K K. Architecture of knowledge structure and cognitive diagnosis: a statistical pattern recognition and classification approach [EB/OL]. [2021-12-19]. https://psycnet.apa.org/record/1995-97594-013.
[7] TATSUOKA K K. Cognitive assessment: an introduction to the rule space method [M]. New York: Routledge,2009.
[8] DE LA TORRE J,HONG Yuan,DENG Weiling. Factors affecting the item parameter estimation and classification accuracy of the DINA model [J]. Journal of Educational Measurement,2010,47(2):227-249.
[9] 黄玉,罗芬,熊建华,等. 多级评分多策略认知诊断方法 [J]. 江西师范大学学报(自然科学版),2019,43(4):376-381.
[10] WANG Chun. On interim cognitive diagnostic computerized adaptive testing in learning context [J]. Applied Psychological Measurement,2021,45(4):235-252.
[11] 左孝凌,李为鑑,刘永才. 离散数学 [M]. 上海:上海科学技术文献出版社,1982.
[12] 汪大勋,高旭亮,蔡艳,等. 一种广义的认知诊断 Q 矩阵修正新方法 [J]. 心理科学,2019,42(4):988-996.
[13] 丁树良,罗芬,汪文义,等. 扩张算法及其在认知诊断中的作用 [J]. 教育测量与评估双语季刊,2021,2(2):14-23.
[14] 丁树良,祝玉芳,林海菁,等. Tatsuoka Q 矩阵理论的修正 [J]. 心理学报,2009,41(2):175-181.
[15] 丁树良,罗芬,汪文义,等. 0-1 评分认知诊断测验设计 [J]. 江西师范大学学报(自然科学版),2019,43(5):441-447.
[16] XIONG Jiahua,LUO Zhaosheng,LUO Guanzhong,et al. Data-driven Q-matrix learning based on Boolean matrix factorization in cognitive diagnostic assessment [J]. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology,2022,75(3):638-667.

The Structure of Unstructured Complete Q Matrices and Their Identification

DING Shuliang,LUO Fen,WANG Wenyi,LI Jia,XIONG Jianhua
(School of Computer and Information Engineering,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: The vector-version of the criteria theorem on non-structured completeness Q matrix (NCQM) is expanded through the matrice-version of the criteria theorem. When $K=3$,the structure of NCQM for linear hierarchy type is a Boolean lattice. This result is true for any K and other hierarchical structures,and the fact is proved.

Key words: non-structured complete Q matrix; criteria theorem; structure; Boolean lattice

(责任编辑:冉小晓)