刘生清,姜金平,任丽宇,等. 带线性记忆的梁方程时间依赖全局吸引子的存在性[J]. 江西师范大学学报(自然科学版),2023,47(2):187-193.

LIU Shengqing,JIANG Jinping,REN Liyu,et al. The existence of time-dependent global attractors for beam equation with linear memory [J]. Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science),2023,47(2):187-193.

文章编号:1000-5862(2023)02-0187-07

带线性记忆的梁方程时间依赖全局吸引子的存在性

刘生清,姜金平*,任丽宇,李梦娇

(延安大学数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘要:该文考虑带线性记忆的梁方程时间依赖全局吸引子的存在性,应用先验估计和算子分解的方法获得了过程的渐近紧性,得到了时间依赖全局吸引子的存在性和正则性.

关键词:梁方程;线性记忆;先验估计;算子分解;时间依赖全局吸引子

中图分类号:O 175.29 **文献标志码**:A **DOI**:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2023.02.11

0 引言

本文考虑如下非线性梁方程:

$$\begin{cases} \varepsilon(t)u_{tt}+u_t+\alpha\Delta^2 u-\int_0^\infty \mu(s)\Delta^2 u(t-s)\mathrm{d}s+ \\ \lambda u+f(u)=g(x),(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}^+,t\geqslant\tau, \\ u=\Delta u=0,(x,t)\in\Gamma\times\mathbf{R}^+, \\ u(x,\tau)=u_0(x,t),u_t(x,\tau)=u_1(x,t),x\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\alpha(>0)$ 是黏性阻尼系数,Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 上带有光滑边界 $\Gamma=\partial\Omega$ 的有界域,$\lambda(>0)$ 是常数,f 为非线性项,$g(x)\in L^2(\Omega)$,$\varepsilon(t)$ 是关于 t 的函数. 方程(1)起源于工程应用中铰链端的梁振动方程[1]. 关于该类模型的研究目前已有很多成果. 文献[2]运用先验估计和算子分解的方法证明了在非线性项 f 满足临界增长条件时梁方程的时间依赖全局吸引子的存在性. 文献[3-5]研究了带有时间依赖系数的振荡方程和波方程,并给出了在有界域上证明耗散偏微分方程时间依赖全局吸引子存在性的方法. 基于时间依赖吸引子的概念,文献[6]研究了 Plate 方程时间依赖全局吸引子的存在性. 文献[7]讨论了记忆型无阻尼抽象发展方程时间依赖全局吸引子的存在性和正则性. 文献[8]用压缩函数和尾部估计的方法研究了在无界域上带有线性记忆的波方程的时间依赖吸引子. 文献[9-13]研究了带有记忆项的梁方程的全局吸引子的存在性. 文献[14]证明了带线性记忆的基尔霍夫型梁方程的全局吸引子. 然而带有线性记忆的梁方程时间依赖全局吸引子的存在性还鲜有讨论. 受文献[2,7,14-19]启发,本文运用先验估计和算子分解方法验证了方程的渐近紧性,证明了带有线性记忆的梁方程时间依赖全局吸引子的存在性和正则性. 由于方程包含记忆项,所以需要引入新变量和扩展的相空间来解决记忆项引起的紧性问题.

本文引入变量:

$\eta^t(x,s)=u(x,t)-u(x,t-s),(x,s)\in\Omega\times\mathbf{R}^+,t\geqslant\tau$,

则

$\eta_t^t(x,s)=u_t(x,t)-\eta_s^t(x,s),(x,s)\in\Omega\times\mathbf{R}^+,t\geqslant\tau.$

令 $\alpha=1+\int_0^\infty\mu(s)\mathrm{d}s$ 且 $\mu\in L^1(\mathbf{R}^+)$,则方程(1)可化为

$$\begin{cases} \varepsilon(t)u_{tt}+u_t+\Delta^2 u+\int_0^\infty \mu(s)\Delta^2\eta^t\mathrm{d}s+ \\ \lambda u+f(u)=g(x),(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}^+, \\ \eta_t^t=u_t-\eta_s^t,(x,t,s)\in\Omega\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+. \end{cases} \tag{2}$$

收稿日期:2021-12-11

基金项目:陕西省自然科学基础研究计划课题(2018JM1042)和 2022 年校级大学生创新训练课题(D2022044)资助项目.

通信作者:姜金平(1974—),男,陕西延安人,教授,博士,主要从事无穷维动力系统的研究. E-mail:yadxjjp@163.com

对应边界条件为

$$u = \Delta u = 0, (x,t) \in \Gamma \times \mathbf{R}^+,$$

$$\eta^t = \Delta \eta^t = 0, (x,t,s) \in \Gamma \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+.$$

初值条件为

$$\eta^0(x,s) = \eta_0^t(x,s), u(x,\tau) = u_0(x,t),$$

$$u_t(x,\tau) = u_1(x,t),$$

其中

$$\begin{cases} u_0(x,t) = u_0(x,\tau), & (x,t) \in \Omega \times \mathbf{R}^+, \\ u_1(x,t) = \partial_t u_0(x,t)\Big|_{t=\tau}, & x \in \Omega, \\ \eta_0^t(x,s) = u_0(x) - u_0(x,-s), & (x,s) \in \Omega \times \mathbf{R}^+. \end{cases} \quad (3)$$

假设 $\varepsilon(t)$、$f(u)$ 和记忆项分别满足下列条件:

1) $\varepsilon(t) \in C^1(\mathbf{R})$ 是单调递减的正函数,且满足

$$\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = 0, \quad (4)$$

特别地, $\exists L > 0$,使得

$$\sup_{t\in\mathbf{R}} \Big(|\varepsilon(t)| + |\varepsilon'(t)| \Big) \leqslant L. \quad (5)$$

2) 函数 $f \in C^2(\mathbf{R})$, $f(0) = 0$ 并且满足如下 2 个条件.

(i) 增长性条件

$$|f'(s)| \leqslant c(1 + |s|^{4/(m-4)}), \forall s \in \mathbf{R}, m \geqslant 5, \quad (6)$$

$$\liminf_{|s|\to+\infty} f(s)/s > -\lambda_1, \quad (7)$$

这里的 $\lambda(>0)$ 是 $A = \Delta^2$ 的第 1 特征值, $D(A) = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$,常数 $c > 0$,其中$\hookrightarrow$表示嵌入是紧的.

(ii) 耗散性条件

$$\begin{cases} 2F(u) \geqslant -(1-\mu)u^2 - c, & u \in \mathbf{R}, \\ 2f(u)u \geqslant 2F(u) - (1-\mu)u^2 - c, & u \in \mathbf{R}, \end{cases} \quad (8)$$

其中 $F(u) = \int_0^u f(y)\mathrm{d}y$, $0 < \mu < 1$, $c(>0)$ 是常数.

3) 在该方程中记忆项的作用通过函数 $\Delta^2 u(\cdot)$ 和记忆核 $\mu(\cdot)$ 的线性时间卷积起作用,且

$$\mu \in C^1(\mathbf{R}^+) \cap L^1(\mathbf{R}^+), \mu'(s) \leqslant 0 \leqslant \mu(s),$$

$$\forall s \in \mathbf{R}^+, \int_0^\infty \mu(s)\mathrm{d}s = \mu_0 > 0, \quad (9)$$

$$\mu'(s) + \varepsilon\mu(s) \leqslant 0, \forall s \in \mathbf{R}^+, \quad (10)$$

其中 ε 是一个正常数,显然由式(10)得, $\forall s(0 \leqslant s_0 \leqslant s)$ 有

$$0 \leqslant \mu(s) \leqslant \mu(s)\mathrm{e}^{-\varepsilon(s-s_0)}. \quad (11)$$

1 预备知识

记 $H = L^2(\Omega)$,记内积和范数分别为$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $\| \cdot \|$,对于$0 \leqslant \sigma \leqslant 2$,定义由 A 生成的 Hillbert 空间族 $H^\sigma = d_m(A^{\sigma/4}w)$,并赋予如下内积与范数:

$$\langle w,v \rangle_\sigma = \langle A^{\sigma/4}w, A^{\sigma/4}v \rangle, \| w \|_\sigma = \| A^{\sigma/4}w \|.$$

特别地,有紧嵌入对于 $t \in \mathbf{R}$ 及 $0 \leqslant \sigma \leqslant 2$ 引入时间依赖空间

$$\mathscr{H}_t^\sigma = H^{\sigma+2} \times H^\sigma \times L_\mu^2(\mathbf{R}^+; H^{\sigma+2}).$$

并赋予范数:

$$\| z \|_{\mathscr{H}_t^\sigma}^2 = \| (u, u_t, \eta^t) \|_{\mathscr{H}_t^\sigma}^2 = \| u \|_{\sigma+2}^2 + \varepsilon(t) \cdot \| u_t \|_\sigma^2 + \| \eta^t \|_{\mu,\sigma+2}^2.$$

当 $\sigma = 0$ 时,通常记 $\mathscr{H}_t = H^2 \times H \times L_\mu^2(\mathbf{R}^+; H^2)$ 对应的范数为

$$\| z \|_{\mathscr{H}_t}^2 = \| (u, u_t, \eta^t) \|_{\mathscr{H}_t}^2 = \| u \|_2^2 + \varepsilon(t) \cdot \| u_t \|^2 + \| \eta^t \|_{\mu,2}^2.$$

由紧嵌入 $\mathscr{H}^{\sigma+1} \hookrightarrow \mathscr{H}^\sigma$ 知,当 $0 \leqslant \sigma \leqslant 2$ 时,有紧嵌入 $\mathscr{H}_t^\sigma \hookrightarrow \mathscr{H}_t$.

定义 1[5] 设 $\{H_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ 为一族赋范线性空间,对于双参数算子族 $U(t,\tau): H_\tau \to H_t, t \geqslant \tau \in \mathbf{R}$,若满足如下性质:

1) $\forall \tau \in \mathbf{R}$, $U(t,\tau)$ 是 H_t 上的恒等映射;

2) $\forall t(\tau \leqslant s \leqslant t), \tau \in \mathbf{R}$,有

$$U(t,s)U(s,\tau) = U(t,\tau),$$

则称 $U(t,\tau)$ 是一个过程.

定义 2[5] 若对每个 $t \in \mathbf{R}$,都存在常数 $R > 0$,使得 $C_t \subset B_t(R)$,则称有界集 $C_t \subset H_t$ 的集合族 $C = \{C_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ 是一致有界的.

定义 3[5] 若一个集族 $B = \{B_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ 是一致有界的,且对每个 $R > 0$,都存在常数 $t_0 = t_0(t,R) \leqslant t$,使得 $\tau \leqslant t_0 \Rightarrow U(t,\tau)B_\tau(R) \subset B_\tau$,则称 $B = \{B_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ 是拉回吸引的.

定义 4[5] 若 $\forall R > 0$,都存在常数 $\theta = \theta(R) \geqslant 0$,使得 $\tau \leqslant t - \theta \Rightarrow U(t,\tau), B_\tau(R) \subset B_t$,则称一致有界集族 $B = \{B_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ 是过程 $U(t,\tau)$ 的时间依赖吸收集.

定义 5[5] 过程 $U(t,\tau)$ 的时间依赖吸引子是满足如下性质的最小集族 $A = \{A_t\}_{t\in\mathbf{R}}$:

1) 在 H_t 中的每个 A_t 都是紧的;

2) A 是拉回吸引的, 即对每个一致有界集族 $C = \{C_t\}_{t\in\mathbf{R}}$,

$$\lim_{\tau\to-\infty} \delta_t(U(t,\tau)C_t, A_t) = 0,$$

其中 $\delta_t(B,C) = \sup_{x\in B} \inf_{y\in C} \| x - y \|_{H_t}$ 为 X_t 中任意 2 个非空集合 B 和 C 的 Hausdorff 半距离.

为了方便估计,首先给出下面的结论.

引理 1[3] $\forall v(0 < v < 1)$ 和常数 $c_1, c_2 \geqslant 0$,则有不等式

$$2(F(u),1) \geqslant -(1-v)\|u\|_2^2 - c_1, \tag{12}$$
$$(f(u),u) \geqslant -(1-v)\|u\|_2^2 - c_2,$$

其中 $F(u) = \int_0^u f(y)\mathrm{d}y$.

引理 2[20] $\forall t > \tau$,若记忆核函数 $\mu(s)$ 满足式(9) ~ (11),则 $\forall \eta^t \in ((t,\tau);L_\mu^2(\mathbf{R}^+;H^\sigma))$,$0 \leqslant \sigma \leqslant 2$,存在一个常数 $\delta > 0$,使得

$$\langle \eta^t, \eta_s^t \rangle_{\mu,\sigma} \geqslant \delta \|\eta^t\|_{\mu,\sigma}^2/2.$$

2　主要结论与证明

2.1　先验估计

由标准的 Galerkin 方法可知方程(2) 的解 u 是存在的,并且它的解满足在任意区间(t,τ) 上有

$$u \in C([\tau,t],H^2), u_1 \in C([\tau,t],L^2), \eta^t \in ([\tau,t];L_\mu^2(\mathbf{R}^+;H^2)), \eta_t^t + \eta_s^t \in L^\infty([\tau,t];L_\mu^2(\mathbf{R}^+;H)) \cap L^2([\tau,t];L_\mu^2(\mathbf{R}^+;H^2)).$$

因此,可以定义下面的过程族:

$U(t,\tau):\mathscr{H}_t \to \mathscr{H}_\tau$,$U(t,\tau)z(t) = \{u(t),u_t(t),\eta^t(s)\}$,
其中 $z(\tau) \in \mathscr{H}_\tau$,$u$ 是方程(2) 的唯一解.

本部分将研究过程的耗散性,证明时间依赖吸收集的存在性.

引理 3　设条件(4) ~ (11) 成立,对 $z(\tau) \in \mathscr{H}_\tau$,记 $U(t,\tau)z(t)$ 是问题(2) 对于初始时刻 τ 和初始值 $z(\tau)$ 的解,则存在常数 $k \geqslant 0$,使得

$$\|z(t)\|_{\mathscr{H}_t} = \|U(t,\tau)z(t)\|_{\mathscr{H}_t} \leqslant k, \forall \tau \leqslant t. \tag{13}$$

证　用$2(u_t+\delta u)$ 与方程(2) 在 L^2 中作内积有

$$\langle \varepsilon(t)u_{tt}, 2u_t+2\delta u\rangle + \langle u_t, 2u_t+2\delta u\rangle + \langle \Delta^2 u, 2u_t + 2\delta u\rangle + \langle \int_0^\infty \mu(s)\Delta^2\eta^t(s)\mathrm{d}s, 2u_t+2\delta u\rangle + \langle \lambda u, 2u_t+2\delta u\rangle + \langle f(u), 2u_t+2\delta u\rangle = \langle g, 2u_t+2\delta u\rangle. \tag{14}$$

对于记忆项,有

$$\langle \int_0^\infty \mu(s)\Delta^2\eta^t(s)\mathrm{d}s, 2u_t\rangle = \int_\Omega\int_0^\infty 2(\eta_t^t+\eta_s^t)\mu(s)\cdot \Delta^2\eta^t(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \geqslant \mathrm{d}\|\eta^t\|_{\mu,2}^2/\mathrm{d}t + \rho\|\eta^t\|_{\mu,2}^2. \tag{15}$$

由方程(2),并利用 Hölder 不等式和 Young 不等式有

$$\langle \int_0^\infty \mu(s)\Delta^2\eta^t(s)\mathrm{d}s, 2\delta u\rangle \geqslant -2\delta\int_\Omega |\Delta u| \int_0^\infty \mu(s)\cdot |\Delta u \eta^t(s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}x \geqslant -\delta v\|u\|_2^2/2 - 2k_0\delta\|\eta^t\|_{\mu,2}^2/v. \tag{16}$$

由式(14) ~ (16) 结合条件(12) 得

$$\mathrm{d}(\varepsilon(t)\|u_t\|^2 + (1+2\lambda)\|u\|_2^2 + \delta\|u\|^2 + 2\delta\cdot \varepsilon(t)(u_t,u) + \|\eta^t\|_{\mu,2}^2 + 2(F(u),1) - 2(g,u))/\mathrm{d}t + \delta(\varepsilon(t)\|u_t\|^2 + (1+2\lambda)\|u\|_2^2 + \delta\|u\|^2 + 2\delta\varepsilon(t)(u_t, u) + \|\eta^t\|_{\mu,2}^2 + 2(F(u),1) - 2(g,u)) + (2-\varepsilon' - 3\delta\varepsilon)\|u_t\|^2 + \delta(2-v)\|u\|_2^2/2 - \delta^2\|u\|^2 - 2\delta(\delta\varepsilon(t) + \varepsilon'(t))(u_t,u) + (\rho - 2k_0\delta/v - \delta)\|\eta^t\|_{\mu,2}^2 \leqslant \delta c. \tag{17}$$

对于合适的常数 $c > 0$,定义泛函

$$0 \leqslant E(t) = \varepsilon(t)\|u_t\|^2 + (1+2\lambda)\|u\|_2^2 + \delta\|u\|^2 + 2\delta\varepsilon(t)(u_t,u) + \|\eta^t\|_{\mu,2}^2 + 2(F(u),1) - 2(g,u) + c. \tag{18}$$

由条件(5) 知,

$$2\delta\varepsilon(t)|(u_t,u)| \leqslant \delta\|u\|_2^2 + \delta L\varepsilon(t)\|u_t\|^2/\lambda_1^2,$$
$$\pm 2(g,u) \leqslant 2|(g,u)| \leqslant \delta v\|u\|_2^2/2 + 2\|g\|^2/(\delta v).$$

由条件(7) 知,

$$\langle F(u),1\rangle = \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x \leqslant c\int_\Omega(|u|^2 + |u|^{2m/(m-2)})\mathrm{d}x \leqslant c\|u\|_2^{2m/(m-2)}.$$

由条件(8) 知,存在足够小的常数 $v(0 < v < 1)$,使得

$$2(F(u),1) \geqslant -(1-v)\|u\|_2^2 - c_1,$$

从而,对足够小的 δ 存在常数 c、c_2 和 c_3,使得

$$c\|z(t)\|_{\mathscr{H}_\tau}^2 - c_2 \leqslant E(t) \leqslant c\|z(t)\|_{\mathscr{H}_\tau}^{2m/(m-2)} + c_3.$$

由条件(5) 知,结合 Hölder 不等式、Young 不等式和 Poincaré 不等式,有

$$-2\delta(\delta\varepsilon(t) + \varepsilon'(t))(u_t,u) \geqslant -\delta v\|u\|_2^2/2 - 2\delta\|u_t\|^2/(v\lambda_1^2). \tag{19}$$

将式(18) 和式(19) 代入式(17) 得

$$\mathrm{d}E(t)/\mathrm{d}t + \delta E(t) - (\varepsilon'(t) + 3\delta\varepsilon(t) - 2 + 2\delta L^2/(v\lambda_1^2))\|u_t\|^2 + \delta\|u\|_2^2 - \delta^2\|u\|^2 + (\rho - 2k_0\delta/v - \delta)\|\eta^t\|_{\mu,2}^2 \leqslant \delta c.$$

取 δ 足够小,使得

$$\varepsilon'(t) + 3\delta\varepsilon(t) - 2 + 2\delta L^2/(v\lambda_1^2) \leqslant 0,$$
$$\rho - 2k_0\delta/v - \delta \geqslant 0, \tag{20}$$

则 $\mathrm{d}E(t)/\mathrm{d}t + \delta E(t) \leqslant \delta c$.

应用 Gronwall 引理可得 $E(t) \leqslant k$,其中

$$k = (E_0(t) + C)\mathrm{e}^{-\delta t} + C > 0,$$

从而,结合式(20) 可得式(13) 成立. 引理 3 得证.

令 $B_0 = \bigcup_{t\geqslant\tau} U(t,\tau)B_1$,其中

$$B_1 = \left\{(u_0,u_1,\eta^t) \in \mathscr{H}_\tau : \|u_0\|_2^2 + \varepsilon(t)\|u_1\|^2 + \|\eta^t\|_{\mu,2}^2 \leqslant R_0\right\}$$

是有界吸收集,则 B_0 也是过程族$\{U(t,\tau)\}$ 的有界吸收集,且 B_0 是不变的.

引理 4　设条件(4) ~ (11) 成立,方程(2) 生成过程族 $U(t,\tau):\mathscr{H}_t \to \mathscr{H}_\tau$,$t \geqslant \tau$,$t$、$\tau \in \mathbf{R}$. 对每个初值 $z_i(t) \in \mathscr{H}_\tau$,有 $\|z_i(t)\|_{\mathscr{H}_\tau} \leqslant R_1$,$i = 1,2$,则

$\| z_1(t) - z_2(t) \|_{\mathscr{H}_t} = \| U(t,\tau)z_1(t) - U(t,\tau)z_2(t) \|_{\mathscr{H}_t} \leqslant e^{k(t-\tau)} \| z_1(\tau) - z_2(\tau) \|_{\mathscr{H}_\tau}, \forall t \geqslant \tau$,

这里的常数 $k = k(R) > 0$.

证 为了方便起见,取 $z_1(\tau), z_2(\tau) \in \mathscr{H}_\tau$,且有 $\| z_i(\tau) \|_{\mathscr{H}_\tau} \leqslant R_1, i = 1,2$. 设常数 $c(>0)$ 是与 R_1 相关的. 由引理 3 的能量估计可得

$$\| U(t,\tau)z_i(t) \|_{\mathscr{H}_t} \leqslant c.$$

记 $z_i(t) = (u_i(t), \partial_t u_i(t), \eta_i^t(s)) = U(t,\tau)z_i(t)$, $\bar{z}(t) = (\bar{u}(t), \bar{u}_t(t), \bar{\eta}^t(s)) = U(t,\tau)z_1(t) - U(t,\tau)z_2(t)$. 那么初值 2 个解之间的差 $\bar{z}(\tau) = z_1(\tau) - z_2(\tau)$ 满足

$$\varepsilon(t)\bar{u}_{tt} + \bar{u}_t + \Delta^2 \bar{u} + \int_0^\infty \mu(s)\Delta^2\bar{\eta}^t \mathrm{d}s + \lambda\bar{u} + f(u_1) - f(u_2) = 0.$$

用 $2\bar{u}_t$ 与上式作内积得

$$\mathrm{d}|\bar{z}(t)|^2_{\mathscr{H}_t}/\mathrm{d}t + (1 - \varepsilon'(t)|\bar{u}_t|^2) + \delta \|\bar{\eta}^t\|^2_{\mu,2} \leqslant -2(f(u_1) - f(u_2), \bar{u}_t). \tag{21}$$

由 Hölder 不等式和 Young 不等式并利用嵌入得

$$-2(f(u_1) - f(u_2), \bar{u}_t) \leqslant c\int_\Omega (1 + |u_1|^{4/(m-4)} + |u_2|^{4/(m-4)})\bar{u}\,\bar{u}_t \mathrm{d}x \leqslant c\|\bar{u}\|_2 \|\bar{u}_t\| \int_\Omega (1 + \|u_1\|_2^{4/(m-4)} + \|u_2\|_2^{4/(m-4)})\,\mathrm{d}x \leqslant c\|\bar{u}\|_2 \|\bar{u}_t\| \leqslant c(\|\bar{u}\|_2^2 + \|\bar{u}_t\|^2). \tag{22}$$

将式(22)代入式(21)得

$$\mathrm{d}\|\bar{z}(t)\|^2_{\mathscr{H}_t}/\mathrm{d}t \leqslant c\|\bar{z}(t)\|^2_{\mathscr{H}_t},$$

在区间$[\tau,t]$上利用 Gronwall 引理可得

$$\|\bar{z}(t)\|^2_{\mathscr{H}_t} \leqslant \|\bar{z}(t)\|^2_{\mathscr{H}_t} e^{c(t-\tau)} = \|z_1(t) - z_2(t)\|^2_{\mathscr{H}_t} e^{c(t-\tau)},$$

常数 $c \geqslant 0$,且与 R_1 无关.

另外,依据上述讨论,对每个 $R > 0$,存在常数 ρ 和 $t_0 = t_0(R)$ 使得

$$\|u_0\|_2^2 + \varepsilon(t)\|u_1\|^2 + \|\eta\|^2_{\mu,2} \leqslant \rho^2, \forall \tau \leqslant t - t_0.$$

2.2 时间依赖全局吸引子的存在性

定理 1 在方程(2)~(3)产生的过程 $U(t,\tau)$ 中 $\mathscr{H}_t$ 有一个不变的时间依赖吸引子 $\mathscr{U} = \{A_t\}_{t\in\mathbf{R}}$.

为了证明过程的渐近紧性,需要给出紧集的一个拉回吸引子集族,可以将过程分解为衰减部分和紧性部分的和.

把 f 分解为 $f = f_0 + f_1$,其中 $f_0, f_1 \in C^2(\mathbf{R})$,且有 $k \geqslant 0$ 满足

$$|f_1'(u)| \leqslant k, \forall u \in \mathbf{R},$$
$$|f_0'(u)| \leqslant k(1 + |u|^{4/(m-2)}), \forall u \in \mathbf{R}, \tag{23}$$
$$f_0(0) = f_0'(0) = 0,$$
$$uf_0(u) \geqslant 0, \forall u \in \mathbf{R}. \tag{24}$$

由引理 4 知 $B = \{B_t(R_0)\}_{t\in\mathbf{R}}$ 是一个时间依赖吸收集,则 $\forall z(\tau) \in B(R_0)$, $U(t,\tau)z(\tau)$ 可分解为

$$z(t) = U(t,\tau)z(\tau) = \{u(t), u_t(t), \eta^t(s)\} = U_1(t,\tau)z(\tau) + U_2(t,\tau)z(\tau),$$

其中

$$U_1(t,\tau)z(\tau) = (v(t), v_t(t), \zeta^t(s)),$$
$$U_2(t,\tau)z(\tau) = (w(t), w_t(t), \xi^t(s))$$

分别满足

$$\begin{cases} \varepsilon(t)v_{tt} + v_t + Av + \int_0^\infty \mu(s)A\zeta^t \mathrm{d}s + \lambda v + f_0(v) = 0, \\ \zeta_t^t = -\zeta_s^t + v, \\ v = Av = 0, \zeta^t = A\zeta^t = 0, \\ v(x,\tau) = v_0(x,t), v_t(x,\tau) = v_1(x,t), \\ \zeta^t(x,\tau) = 0, \zeta^t(x,s) = \eta^t(x,s), \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} \varepsilon(t)w_{tt} + w_t + Aw + \int_0^\infty \mu(s)A\xi^t \mathrm{d}s + \lambda w + f(u) - f_0(v) = g, \\ \xi_t^t = -\xi_s^t + w, \\ w = Aw = 0, \xi^t = A\xi^t = 0, \\ w(x,\tau) = 0, w_t(x,\tau) = 0, \xi^t(x,s) = 0. \end{cases} \tag{26}$$

引理 5 $\exists \delta = \delta(B) > 0$,使

$$\|U_1(t,\tau)z(\tau)\|_{\mathscr{H}_t} \leqslant Ce^{-\delta(t-\delta)}, \forall t \geqslant \tau.$$

证 这里有 $\|U_1(t,\tau)z(\tau)\|_{\mathscr{H}_t} \leqslant C$,用 $2(v_t + \delta v)$ 与式(25)作内积得

$$\mathrm{d}(\varepsilon(t)\|v_t\|^2 + (1 + 2\lambda)\|v\|_2^2 + \delta\|v\|^2 + 2\delta\varepsilon(t)(u_t, u) + \|\zeta^t\|^2_{\mu,2} + 2(F_0(v), 1))/\mathrm{d}t - 2\delta(1 - \delta\varepsilon(t))(v_t, v) + 3\delta\|v\|_2^2/2 + 2\lambda\delta\|v\|^2 + (\delta - 2k_0\delta)\|\zeta^t\|^2_{\mu,2} + 2\delta(f_0(v), v) \leqslant 0.$$

这里定义泛函

$$\Lambda_0 = \varepsilon(t)\|v_t\|^2 + (1 + 2\lambda)\|v\|_2^2 + \delta\|v\|^2 + 2\delta\varepsilon(t)(u_t, u) + \|\zeta^t\|^2_{\mu,2} + 2(F_0(v), 1) = \|U_1(t,\tau)z(\tau)\|_{\mathscr{H}_t^1} + \delta\|v\|^2 + 2\delta\varepsilon(v_t, v) - 2(F_0(v), 1),$$

其中 $F_0(s) = \int_0^s f_0(y)\,\mathrm{d}y$.

因此有

$$\|U_1(t,\tau)\|^2_{\mathscr{H}_t}/2 \leqslant \Lambda_0(t) \leqslant C\|U_1(t,\tau)\|^2_{\mathscr{H}_t}. \tag{27}$$

由 Hölder 不等式、Young 不等式和 Poincaré 不等式得到

$$2\delta|\varepsilon(v_t, v)| \leqslant 2\delta L\|v_t\|\|v\| \leqslant \|v\|_2^2/4 + 4\delta^2 L\varepsilon(t)\|v_t\|^2/\lambda_1^2.$$

由条件(24)可得

$$\mathrm{d}\Lambda_0/\mathrm{d}t + \delta \| U_1(t,\tau) \|^2_{\mathscr{H}_t} \leqslant 0,$$

利用 Gronwall 引理，结合(27)式即证得引理 5.

综合上面的内容可得

$$\sup_{t\geqslant\tau}(\| U(t,\tau)z_\tau \|_{\mathscr{H}_t} + \| U_1(t,\tau)z_\tau \|_{\mathscr{H}_t} + \| U_2(t,\tau) \cdot z_\tau \|_{\mathscr{H}_t}) \leqslant C.$$

引理 6　$\exists M = M(B) > 0$，有

$$\| U_2(t,\tau)z_\tau \|_{\mathscr{H}_t^{1/3}} \leqslant M.$$

证　由 $f = f_0 + f_1$ 可知

$$f(u) - f_0(v) = f(u) - f(v) + f(v) - f_0(v) = f(u) - f(v) + f_1(v).$$

用 $2A^{1/3}(w_t + \delta w)$ 在 L^2 中与式(26)作内积得

$$\mathrm{d}(\varepsilon(t) \| w_t \|^2_{1/3} + (1+2\lambda) \| w \|^2_{7/3} + \| \xi^t \|^2_{\mu,7/3} + \delta \| w \|^2_{1/3} + 2\delta\varepsilon(t)(w_t,A^{1/3}w) + 2(f(u) - f_0(v), A^{1/3}w) - 2(g,A^{1/3}w))/\mathrm{d}t + 2\delta(3/4+\lambda) \| w \|^2_{7/3} + (2-\varepsilon'(t)-2\delta\varepsilon(t)) \| w_t \|^2_{1/3} + (\rho-2\delta k_0) \| \xi^t \|^2_{\mu,7/3} - 2\delta\varepsilon(t)(w_t,A^{1/3}w) + 2\delta(f(u) - f_0(v),A^{1/3}w) - 2\delta(g, A^{1/3}w) \leqslant 2(f'(u)u_t - f'(v)v_t,A^{1/3}w) + 2(f_1'(v)v_t, A^{1/3}w). \tag{28}$$

选择合适的常数 C，定义下列泛函

$$E_2(t) = \varepsilon(t) \| w_t \|^2_{1/3} + (1+2\lambda) \| w \|^2_{7/3} + \| \xi^t \|^2_{\mu,7/3} + \delta \| w \|^2_{1/3} + 2\delta\varepsilon(t)(w_t,A^{1/3}w) + 2(f(u) - f_0(v),A^{1/3}w) - 2(g,A^{1/3}w) + C. \tag{29}$$

事实上，很容易推导出

$$2\delta\varepsilon(t)|(w_t,A^{1/3}w)| \leqslant \delta \| w \|^2_{7/3} + \delta L\varepsilon(t) \| w \|^2_{1/3}/\lambda_1^2,$$

$$2|\langle g,A^{1/3}w\rangle| \leqslant \delta \| w \|^2_{7/3} + \| g \|^2/(\delta\lambda_1).$$

利用 f 的增长性，结合嵌入 $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ 可得

$$2(f(u) - f_0(v),A^{1/3}w) \leqslant 2 \| f(u) - f_0(v) \| \| A^{1/3}w \|.$$

取 δ 足够小，使得

$$\| U_2(t,\tau)z_\tau \|^2_{\mathscr{H}_t^1}/2 \leqslant E_2(t) \leqslant 2 \| U_2(t,\tau) \cdot z_\tau \|^2_{\mathscr{H}_t^1} + C. \tag{30}$$

处理式(28)右边的项

$$2(f'(u)u_t,A^{1/3}w) \leqslant c(1 + \| u \|^2_2) \| u_t \| \| w \|_{7/3} \leqslant \delta \| w \|^2_{7/3}/8 + C,$$

$$-2(f'(v)v_t,A^{1/3}w) \leqslant c(1 + \| v \|^2_2) \| v_t \| \cdot \| w \|_{7/3} \leqslant \delta \| w \|^2_{\eta,3}/8 + C. \tag{31}$$

又由条件(23)得

$$2(f_1'(v)v_t,A^{1/3}w) \leqslant \delta \| w \|^2_{7/3}/8 + C. \tag{32}$$

将式(29)、式(31)、式(32)代入式(28)，取 δ 足够小，于是有

$$\mathrm{d}E_2(t)/\mathrm{d}t + \delta E_2(t) \leqslant C.$$

应用 Gronwall 引理，结合式(30)即证得引理 6.

引理 7[21-22]　假定 $\mu \in C^1(\mathbf{R}^+) \cap L^2(\mathbf{R}^+)$ 是一个非负函数，且满足以下条件：若 $\exists s_0 \in \mathbf{R}^+$，使得 $\mu(s_0) = 0$，则对所有的 $s > s_0$，有 $\mu(s) = 0$. 进一步地，设 B_0、B_1、B_2 是 Banach 空间，B_0、B_1 是自反的，且满足 $B_0 \hookrightarrow B_1 \hookrightarrow B_2$，其中嵌入 $B_0 \hookrightarrow B_1$ 是紧的. 设 $C \subset L^2_\mu(\mathbf{R}^+;B_1)$ 满足：

(i) $C \subset L^2_\mu(\mathbf{R}^+;B_0) \cap H^1_\mu(\mathbf{R}^+;B_2)$，

(ii) $\sup_{\eta\in C} \| \eta(s) \|^2_{B_1} \leqslant h(s), \forall s \in \mathbf{R}^+, h(s) \in L^2_\mu(\mathbf{R}^+)$，

那么 C 在空间 $L^2_\mu(\mathbf{R}^+;B_1)$ 中是相对紧的.

$\forall \xi^t \in L^2_\mu(\mathbf{R}^+;H^1)$，Cauchy 问题

$$\begin{cases} \xi^t_t = -\xi^t_s + w_t, t \geqslant \tau, \\ \xi = \xi_\tau \end{cases}$$

有唯一解 $\xi^t \in C([\tau,\infty);L^2_\mu(\mathbf{R}^+;H^1))$ 且其可表示为

$$\xi^t(s) = \begin{cases} w(x,t) - w(x,t-s), \tau < s < t, \\ w(x,t) - w(\tau), \quad s \geqslant t. \end{cases}$$

运用在文献[20]的定理 9 中的方法，可以直接得到以下结果.

引理 8[23]　假设非线性项 f 满足条件(6)～(7)，外力项 $g \in L^2(\Omega)$ 且条件(9)～(10)成立，对任意给定的 $T > \tau, \forall \varepsilon > 0$，设 $\kappa_\tau = \Pi(U_2(T,\tau)\mathscr{B})$，则存在一个正常数 $N_1 = N_1(\| \mathscr{B} \|)_{\mathscr{H}_t}$ 使得

(i) κ_T 在空间 $L^2_\mu(\mathbf{R}^+;H^{1/3}) \cap H^1_\mu(\mathbf{R}^+;H^1)$ 上是有界的；

(ii) $\sup_{\xi\in k_T^i} \| \xi(s) \|^2_{H^1} \leqslant N_1$，其中 $\{U_2(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 是方程(26)的解过程.

若 $\Pi: H^1 \times L^2_\mu(\mathbf{R}^+;H^1) \to L^2_\mu(\mathbf{R}^+;H^1)$ 是一个投影算子，则 κ_T 在空间 $L^2_\mu(\mathbf{R}^+;H^1)$ 中是相对紧的.

根据引理 7 可得，κ_T 在空间 $L^2_\mu(\mathbf{R}^+;H^1)$ 中是相对紧的. 进一步地，由嵌入条件 $H^{7/3} \hookrightarrow H^1$ 可得下列结论.

引理 9　在引理 7 的条件下，令 $\{U_2(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 是方程(26)的解过程，则 $\forall T > 0$，$U_2(T,\tau)B_0$ 在 $\mathscr{H}_t$ 中是相对紧的.

根据引理 6 和引理 9 可以考虑族 $\kappa = \{\kappa_t\}_{t\in\mathbf{R}}$，其中 $\kappa_t = \{z(t) \in \mathscr{H}_t^{1/3}: \| z(t) \| \mathscr{H}_t^{1/3} \leqslant M\}$. 由此可知 κ_t 是紧的，此外，由于常数 M 与 t 无关，因此 κ 是一致有界的. 最后，根据引理 3、引理 5、引理 6 和引理 9 就可证得 κ 是拉回吸引的. 事实上，

$$\delta_t(B_\tau(R_0),\kappa_t) \leqslant C\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}, \forall t \geqslant \tau,$$

其中 $\delta_t(M,P)$ 是 2 个非空集合 M、P 之间的 Hausdorff 半距离. 因此过程 $U(t,\tau)$ 是渐近紧的，这就证明了 $U(t,\tau)$ 的时间依赖全局吸引子 $\mathscr{U} =$

$\{A_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ 的唯一性. 最后,通过引理 3 所述过程的强连续性就能得到 $\mathscr{U}$ 的不变性.

2.3 吸引子的正则性

定理 2 若条件(4) ~ (11) 成立,则方程(2)的时间依赖吸引子 $\{A_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ 在 $\mathscr{H}_t^1$ 中有界且与时间 t 无关.

证 $\forall\tau\in\mathbf{R}$ 和 $z(\tau)\in A_t$,将 $U(t,\tau)z(t)$ 分解为

$U(t,\tau)z(t) = (u(t),u_t(t),\eta^t(s)) = U_3(t,\tau)z(t) + U_4(t,\tau)z(t)$,

其中 $U_3(t,\tau)z(t) = \{v(t),v_t(t),\zeta^t(s)\}$,$U_4(t,\tau)z(t) = \{w(t),w_t(t),\xi^t(s)\}$ 分别满足

$$\begin{cases}\varepsilon(t)v_{tt}+v_t+Av+\int_0^\infty\mu(s)A\zeta^t\mathrm{d}s+\lambda v=0,\\ \zeta_t^t=-\zeta_s^t+v,\\ v=Av=0,\zeta^t=A\zeta^t=0,\\ v(x,\tau)=u_0(x,t),v_t(x,\tau)=u_1(x,t),\\ \zeta^t(x,s)=\eta^t(x,s),\end{cases}\tag{33}$$

$$\begin{cases}\varepsilon(t)w_{tt}+w_t+Aw+\int_0^\infty\mu(s)A\xi^t\mathrm{d}s+\lambda w+\\ f(u)=g,\\ \xi_t^t=-\xi_s^t+w,\\ w=Aw=0,\xi^t=A\xi^t=0,\\ w(x,\tau)=0,w_t(x,\tau)=0,\xi^t(x,s)=0.\end{cases}$$

由引理 5 有

$\|U_3(t,\tau)z(\tau)\|_{\mathscr{H}_t}\leqslant C\mathrm{e}^{-\delta(t-\tau)},\forall t\geqslant\tau.$

引理 10 由条件(2)和(3)有常数 $M_1=M_1(u)$,使得 $\sup\limits_{t\geqslant\tau}\|U_4(t,\tau)z_\tau\|_{\mathscr{H}_t^1}\leqslant M_1$.

证 用 $2Aw_t+2A\delta w$ 与式(33)作内积得

$\mathrm{d}(\varepsilon(t)\|w_t\|^2+\|w\|_2^2+\lambda|w|^2-\varepsilon'(t)\cdot\|w^2\|+2(1-\delta\varepsilon(t))\|w\|^2+\|\xi^t\|_{\mu,2}^2+2(f,Aw)-2(g,Aw))/\mathrm{d}t-2\delta(1-\delta\varepsilon(t))(w_t,w)+3\delta\|w\|^2/2+(\rho-2\delta k_0)\|\xi^t\|_{\mu,2}^2+2\lambda\delta\|w\|^2+2\delta(f_0(w),w)\leqslant 2\delta(g,Aw)$.

令 $\Lambda_1=\|U_4(t,\tau)z_\tau\|_{\mathscr{H}_t^1}+\lambda|w|^2-\varepsilon'(t)\cdot\|w\|^2+2(1-\delta\varepsilon(t))\|w\|^2+2(f,Aw)-2(g,Aw)+C$.

当 δ 足够小时会有

$$\|U_4(t,\tau)z_\tau\|_{\mathscr{H}_t^1}/4\leqslant\Lambda_1\leqslant 2\|U_4(t,\tau)z_\tau\|_{\mathscr{H}_t^1}+2C.\tag{34}$$

由式(34)可得

$\mathrm{d}\Lambda_1/\mathrm{d}t+\delta\Lambda_1\leqslant 2(f'(u)u_t,Aw)+\delta C.$

这里 $C(>0)$ 是与 A_t 在 $\mathscr{H}_t^{1/3}$ 中相关的界常数.

$2\langle f'(u)u_t,Aw\rangle\leqslant C(\int_\Omega(1+|u|^{4/(m-2)})^2\mathrm{d}x)^{1/2}\cdot(\int_\Omega(1+|u_t|^2)\mathrm{d}x)^{1/2}(\int_\Omega|Aw|^{2m/(m-2)}\mathrm{d}x)^{(m-2)/2m}\leqslant C(1+\|u\|_2^{4/(m-2)})\|u_t\|_2\|w\|_2\leqslant\delta\|w\|_2^2/2+C\leqslant\delta\Lambda_1/2+C$,

故 $\mathrm{d}\Lambda_1/\mathrm{d}T+\delta\Lambda_1/2\leqslant C$.

由 Gronwall 引理和式(34)知 $\|U_4(t,\tau)z(\tau)\|_{\mathscr{H}_t^1}$ 一致有界.

下面分析时间依赖吸引子的正则性. 令 $K_t^1=\{z\in\mathscr{H}_t^1:\|z\|_{\mathscr{H}_t^1}\leqslant M_1\}$. 由式(34)和引理 10 知,$\forall t\in\mathbf{R}$,有

$\lim\limits_{\tau\to-\infty}S(U(t,\tau)A_\tau,K_t^1)=0$,

其中 $S(M,P)$ 为 2 个非空集合之间的 Hausdorff 距离. 由 $\mathscr{U}$ 的不变性有 $S(A_t,K_t^1)=0$. 从而 $A_t\subset\bar{K}_t^1=K_t^1$,即证明了 A_t 在 $\mathscr{H}_t^1$ 中是有界的,并且其界与 $t\in\mathbf{R}$ 无关. 定理 2 得证.

3 参考文献

[1] WOINOWSKY-KRIEGER S. The effect of an axial force on the vibration of hinged bars [J]. Journal of Applied Mechanics,1950,17(1):35-36.

[2] 苏小虎,姜金平. 梁方程时间依赖全局吸引子的存在性[J]. 应用数学和力学,2020,41(2):195-203.

[3] DI PLAN F,DUANE G S,TEMAM R. Time-dependent attractor for the oscillon equation [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems,2011,29(1):141-167.

[4] CONTI M,PATA V,TEMAM R. Attractors for processes on time-dependent spaces:applications to wave equations [J]. Journal of Differential Equations,2013,255(6):1254-1277.

[5] CONTI M,PATA V. Asymptotic structure of the attractor for processes on time-dependent spaces [J]. Nonlinear Analysis:Real World Applications,2014,19:1-10.

[6] 刘亭亭,马巧珍. Plate 方程时间依赖全局吸引子的存在性[J]. 华东师范大学学报(自然科学版),2016(2):35-44.

[7] 胡弟弟,汪璇. 记忆型无阻尼抽象发展方程的强时间依赖全局吸引子[J]. 数学物理学报,2019,39(1):81-94.

[8] 吴晓霞,马巧珍. 带有线性记忆的波方程在 $\mathbf{R}^n$ 上的时间依赖吸引子[J]. 应用数学,2021,34(1):73-85.

[9] 刘世芳,马巧珍. 具有历史记忆的阻尼吊桥方程强全局吸引子的存在性[J]. 数学物理学报,2017,37(4):684-697.

[10] 刘亭亭,马巧珍. 非自治 Plate 方程时间依赖强拉回吸引

子的存在性[J]. 数学年刊A辑(中文版),2017,38(2):125-144.

[11] MA Qiaozhen,WANG Jing,LIU Tingting. Time-dependent attractor of wave equations with non-linear damping and linear memory [J]. Open Mathematics,2019,17(1):89-103.

[12] MA Qiaozhen,WANG Jing,LIU Tingting. Time-dependent asymptotic behavior of the solution for wave equations with linear memory [J]. Computers & Mathematics with Applications,2018,76(6):1372-1387.

[13] LIU Tingting,MA Qiaozhen. Time-dependent asymptotic behavior of the solution for plate equations with linear memory [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems: Series B,2018,23(10):4595-4616.

[14] 张盈,刘强强,马巧珍. 带记忆的基尔霍夫型梁方程的全局吸引子[J]. 山东大学学报(理学版),2022,57(4):66-75.

[15] 王彩霞,刘强强,马巧珍. 具有线性记忆和线性阻尼的Kirchhoff梁方程的指数吸引子[J]. 吉林大学学报(理学版),2022,60(1):1-14.

[16] 刘强强. 具有线性记忆的基尔霍夫型梁方程解的渐近性[D]. 兰州:西北师范大学,2020.

[17] 穆苗苗,马巧珍. Plate方程时间依赖吸引子的渐近结构及正则性[J]. 吉林大学学报(理学版),2018,56(5):1079-1083.

[18] 汪璇,韩英,胡弟弟. 记忆型抽象发展方程的时间依赖全局吸引子[J]. 吉林大学学报(理学版),2018,56(4):769-778.

[19] 王晓萍. 带和不带线性记忆的非经典反应扩散方程解的时间依赖渐近性[D]. 兰州:西北师范大学,2016.

[20] WANG Xuan,DUAN Fenxia,HU Didi. Attractors for a class of abstract evolution equations with fading memory [J]. Mathematical Problems in Engineering,2017,2017:1410408.

[21] PATA V,ZUCCHI A. Attractors for a damped hyperbolic equation with linear memory [J]. Advances in Mathematical Sciences & Applications,2001,11(2):505-529.

[22] BORINI S,PATA V. Uniform attractors for a strongly damped wave equations with linear memory [J]. Asymptotic Analysis,1999,20(3/4):263-277.

[23] 汪旋,段奋霞. 记忆型抽象发展方程全局吸引子的存在性[J]. 兰州大学学报(自然科学版),2016,52(4):523-529.

The Existence of Time-Dependent Global Attractors for Beam Equation with Linear Memory

LIU Shengqing,JIANG Jinping*,REN Liyu,LI Mengjiao

(College of Mathematics and Computer Science,Yan'an University,Yan'an Shanxi 716000,China)

Abstract:In this paper,the existence of time-dependent global attractors of beam equation with linear memory is investigated. By using the skill of the operator decomposition and prior estimate, the asymptotic compactness of a family process to the beam equation is proved,then the existence and regularity of global attractors are obtained.

Keywords:beam equation;linear memory;prior estimate;operator decomposition;time-dependent global attractor

(责任编辑:曾剑锋)