文章编号: 1000-5862(2011)06-0041-06

一类复合差分函数零点的估计

易才凤, 李爱平

(江西师范大学数学与信息科学学院, 江西 南昌 330022)

摘要: 假设f为有限σ级超越亚纯函数, 利用 Nevanlinna 的基本理论与方法, 在$m_1>m_2$且m_1,m_2的最大公因数$m\geqslant 2$的条件下, 证明了复合差分函数$G(z)=f(z^{m_1})+f(z^{m_2})-2f(z)$具有无穷多个零点; 并在$\sigma>0$时, 证明了$G(z)$的零点收敛指数为$\lambda(G)=\sigma(G)=m_1\sigma$.

关键词: 亚纯函数; 差分; 复合差分; 零点

中图分类号: O 174.52 文献标志码: A

0 引言及主要结论

在本文中, 假定读者熟悉亚纯函数 Nevanlinna 理论的一些基本概念和标准记号[1-3], $n(r,f)$、$n(r,1/f)$、$n(r,a,f)$分别表示亚纯函数f在$|z|\leqslant r$内的极点、零点和a值点个数, $N(r,f)$、$N(r,1/f)$、$N(r,a,f)$分别表示函数f在$|z|\leqslant r$内的极点、零点和a值点的密指量, $m(r,f)$表示f的均值函数, 用$T(r,f)$表示f的特征函数, $\sigma(f)$、$\lambda(f)$分别表示f的增长级和零点收敛指数. 同时, 用$f\circ g$表示函数f与g的复合, $g^{\circ N}$表示函数g的N次复合.

对于复域差分函数的讨论, 最早始于形如$\Delta f(z)=f(z+c)-f(z)$的函数, 对于这类形式的差分函数, Bergweiler 和 Langley, 陈宗煊和 Shon Kwang Ho 等都有过不少研究, 并取得了一系列有意义的结果.

在文献[4]中, Bergweiler 和 Langley 率先讨论了差分

$$\Delta f=f(z+c)-f(z)$$

及差商

$$\Delta f/f=[f(z+c)-f(z)]/f(z)$$

的零点情况, 得到了如下重要的结论.

定理 A 存在具有下列性质的正数$\delta_0\in(0,1/2)$, 当f是超越整函数, 其增长级满足

$$\sigma(f)\leqslant\sigma<\frac{1}{2}+\delta_0<1\text{时}, \quad H(z)=\frac{f(z+1)-f(z)}{f(z)}$$

有无穷多个零点.

定理 B 设f是超越亚纯函数, 下级$\mu(f)<1$, 设$c\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$使得$f$最多有有限个极点$z_j,z_k$满足$z_j-z_k=c$, 则$h(z)=f(z+c)-f(z)$有无穷多个零点.

在文献[5]中, 陈宗煊和 Shon Kwang Ho 在定理 A 的基础上, 对差分Δf及差商$\Delta f/f$进行了更深入的研究, 得到了如下更丰富的结果.

定理 C 设f是超越整函数, 级$\sigma(f)=\sigma<1$.设$H=\{z_j\}$是$f(z)$所有不同零点的集合, 令$c\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$, 使其满足下列 2 个条件之一.

(i) 最多有有限个零点z_j,z_k, 满足$z_j-z_k=c$;

(ii) $\lim\limits_{j\to\infty}\left|z_{j+1}/z_j\right|=l>1$,

则

$$G(z)=\frac{\Delta f(z)}{f(z)}=\frac{f(z+c)-f(z)}{f(z)}$$

有无穷多个零点和无穷多个不动点.

在文献[6]中, Flether、Langley 和 Meyer 对于q-差分函数

$$F(z)=f(qz)-f(z)$$

和q-差商函数

$$G(z)=F(z)/f(z)$$

进行了研究, 得到了以下结论.

定理 D 令$q\in\mathbf{C},|q|>1$. 假设f是超越亚纯函数, 且

收稿日期: 2011-10-20

基金项目: 国家自然科学基金(11171170)资助项目.

作者简介: 易才凤(1955-), 女, 江西吉安人, 教授, 主要从事复分析方向的研究.

$$L(f)=\liminf_{r\to\infty} T(r,f)/(\log r)^2=0,$$

定义

$$F(z)=f(qz)-f(z),\quad G(z)=F(z)/f(z),$$

则 F 和 G 至少有 1 个具有无穷多个零点.

在此基础上, 文献[6]还叙述了下面的结论.

定理 E 假设 f 是超越亚纯函数, 且满足

$$L(f)=\liminf_{r\to\infty} T(r,f)/(\log r)^2=0.$$

设 $a,b\in\mathbf{C}$, 且 $|a|\neq 0,1$, 则

$$F(z)=f(az+b)-f(z) \text{ 和 } F(z)/f(z)$$

至少有 1 个具有无穷多个零点.

Alastair、Fletcher 和 Langley 在文献[7]中又将一次函数 $g(z)=az+b$ 推广到一般的多项式函数, 对复合差分函数 $F=f\circ g-f$ 的零点进行了估计, 得到了如下结果.

定理 F 设 f 为有限 σ 级超越亚纯函数, 且只有有限个极点. 假设 g 是一个阶数 $m\geqslant 2$ 的多项式函数. 令 $F=f\circ g-f$, 则 F 具有无穷多个零点;且若 $\sigma>0$, 则 F 的零点收敛指数为 $\lambda(F)=m\sigma$.

定理 G 设 f 为 σ 级超越亚纯函数, 假设 g 是一个阶数 $m\geqslant 2$ 的多项式函数. 令 $F=f\circ g-f$. 若 $0<\sigma<1/m$, 或者 $\sigma=0$ 且 $m\geqslant 4$, 则 F 具有无穷多个零点. 若 $\sigma=0$, 则方程 $f(g(z))=f(z)$ 在复平面上具有无穷多个解 z.

在文献[8]中, 陈宗煊和 Shon Kwang Ho 对差分函数进行推广, 估计了函数 $g(z)=f(z+c_1)+f(z+c_2)-2f(z)$ 及 $G(z)=g(z)/f(z)$ 的零点, 得到如下结论.

定理 H 假设 $f(z)$ 是超越亚纯函数, 并且 $f(z)$ 的级为 $\sigma(f)=\sigma<1$. 令 $c_1,c_2\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 且 $c_1+c_2\neq 0$. 若 f 至多有有限多个极点 b_j,b_s 满足

$$b_j-b_s=k_1c_1+k_2c_2(k_d=0,\pm 1,d=1,2),$$

则 $g(z)$ 具有无穷多个零点, 并且

$$\lambda(g)=\sigma(g)=\sigma.$$

特别地, 若 $f(z)$ 至多有有限个零点 z_j 满足 $f(z_j+c_1)+f(z_j+c_2)=0$, 则 $G(z)=g(z)/f(z)$ 具有无穷多个零点, 且 $\lambda(G)=\sigma(G)=\sigma$.

本文对复合差分函数的形式进行了类似推广, 在假设 f 为超越亚纯函数的条件下, 令

$$g_1(z)=z^{m_1},\ g_2(z)=z^{m_2},$$

其中 m_1,m_2 均为不小于 2 的正整数, 对复合差分函数

$$G(z)=f(g_1(z))+f(g_2(z))-2f(z) \tag{1}$$

的零点进行了估计, 得到了如下结果.

定理 1 设 f 为有限 σ 级超越亚纯函数, 且只有有限个极点. 如(1)式定义 $G(z)$, 并假设 $m_1>m_2$ 且 m_1,m_2 的最大公因数 $m\geqslant 2$, 则 $G(z)$ 具有无穷多个零点;且若 $\sigma>0$, 则 $G(z)$ 的零点收敛指数为 $\lambda(G)=\sigma(G)=m_1\sigma$.

定理 2 设 f 为超越亚纯函数, 如(1)式定义 $G(z)$, 并假设 $m_1>m_2$ 且 m_1,m_2 的最大公因数 $m\geqslant 2$. 若 f 的增长级 σ 满足: $0<\sigma<1/m$, 或者 $\sigma=0$ 且 $m\geqslant 4$, 则 $G(z)$ 具有无穷多个零点.

1 引理

引理 1[9] (Böttcher Coordinates) 设 $g(z)=az^m+\cdots$ 是阶数为 $m\geqslant 2$ 的多项式函数, 则存在 ∞ 的一个邻域 U 及 U 上的单叶解析函数 ϕ 使得: 对所有的 $z\in U$, 有

$$\phi(z)=z+O(1) \text{ 及 } \phi(g(z))=a\phi(z)^m.$$

进一步, 对于 $j=0,\cdots,m-1$, 定义 u_j 和 $\omega_j(z)$ 如下:

$$u_j=\mathrm{e}^{2\pi i j/m},\omega_j(z)=\phi^{-1}(u_j\phi(z)), \tag{2}$$

则 $\omega_j(z)$ 在 ∞ 的一个邻域 $V\subseteq U$ 上单叶解析, 且对所有的 $z\in V$ 有

$$\omega_j(z)=u_jz+O(1),\ g(\omega_j(z))=g(z). \tag{3}$$

引理 2 设 f 为 σ 级超越亚纯函数, g 是 $m(\geqslant 2)$ 阶多项式, 令 $F=f\circ g-f$, $\omega_j(z)$ 如(3)式所定义, 则存在正常数 c_1,c_2 具有下面的性质:

(i) $\forall a\in\mathbf{C}\cup\{\infty\}$, $N(c_1r^m,a,f)-O(1)\leqslant$

$$N(r,a,f[g])\leqslant N(c_2r^m,a,f)+O(1) \tag{4}$$

和

$$(1-o(1))T(c_1r^m,f)\leqslant$$
$$T(r,f[g])\leqslant(1+o(1))T(c_2r^m,f)$$

当 $r\to\infty$ 时成立;

(ii)若 $\delta>0$, 则

$$T(r,F)\geqslant(m-1-\delta)T(r,f) \tag{5}$$

当 $r\to\infty$ 时成立, 且 F 超越, 其级 $\sigma(F)=m\sigma$;

(iii)若 $\sigma<1$, 则选择适当的 R, 当 $r\to\infty$ 时, 使得

$$T_R(r,f(\omega_j(z)))\leqslant(1+o(1))T((1+o(1))r,f),$$

其中 $T_R(r,f)=m(r,f)+N_R(r,f)$, 而

$$N_R(r,f)=\int_R^r\frac{n(t,f)}{t}\mathrm{d}t.$$

由引理 2，可以容易得出如下结论.

引理 3　设 f 为 σ 级超越亚纯函数，$m_1,m_2(m_1>m_2),g_1,g_2$，G 如(1)式所定义，则 G 超越，且其级 $\sigma(G)=m_1\sigma$.

为了叙述下面的引理，现引入迭代记号：$g^{\circ 0}=id$，$g^{\circ 1}=g$，$g^{\circ(k+1)}=g\circ g^{\circ k}$.

引理 4　设 $R>0$，f 是 $R<|z|<\infty$ 上的非常数亚纯函数，假设 g 是 $m(\geqslant 2)$ 阶多项式函数，则存在一个最大的非负整数 N 使得 f 可以表示成 $f=h_N\circ g^{\circ N}$ 的形式. 对于某个 $R_N>0$，h_N 在 $R_N<|z|<\infty$ 上亚纯.

引理 5　若多项式函数 $P(z)=z^{m_1}$，$Q(z)=z^{m_2}$，则 $P\circ Q=Q\circ P$.

证　由于

$$P\circ Q=P(Q(z))=P(z^{m_1})=(z^{m_1})^{m_2}=z^{m_1m_2},$$

$$Q\circ P=Q(P(z))=Q(z^{m_2})=(z^{m_2})^{m_1}=z^{m_1m_2},$$

故 $P\circ Q=Q\circ P$.

引理 6　设 f 是一个亚纯函数，g 为 $m(\geqslant 2)$ 阶多项式函数. 如(2)式定义 u_j 及 $\omega_j(z)$，且假设 $\exists R_1>0$，使得对于 $j=0,1,\cdots,m-1$，在 $R_1<|z|<\infty$ 上有

$$f(\omega_j(z))=f(z),\tag{6}$$

则存在亚纯函数 h_1，使得 $f=h_1\circ g$.

引理 7　设 H 是一个超越亚纯函数，级小于 1. 令 $t_0>0$，则存在一个 ε-集 E_1 使得当 $z\in\mathbf{C}\setminus E_1$ 且 $z\to\infty$ 时，$H(z+c)/H(z)\to 1$ 在 $|c|\leqslant t_0$ 上一致成立.

引理 8　假设 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是 $t(t\geqslant t_0)$ 的正连续函数，$\psi(t)$ 是非减的，并且进一步有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\phi(t)=+\infty,\quad \lim_{t\to\infty}\phi(t)/\psi(t)=0,$$

那么存在任意大的 r 值，使得下面两不等式同时成立

$$\phi(t)\leqslant\phi(r)\,(t_0\leqslant t<r),$$

$$\phi(t)/\psi(t)\leqslant\phi(r)/\psi(r)\,(r\leqslant t).$$

满足上面两不等式的 r 值序列称为 Pólya 峰.

由文献[10, P116]的推论可以得出如下引理.

引理 9　假设 D 是复平面上包含 $z=0$ 的一个无界区域，边界 $\varGamma$ 包含 ∞，D_r 是 D 中包含 $z=0$ 的那个分支与 $\{z:|z|<r\}$ 的交集，θ_r 是 D_r 的边界中满足 $|z|=r$ 的那部分，其测度为 $r\theta(r)$. 再定义 $\theta^*{}_r$ 如下:

若 $|z|=r$ 与 $\varGamma$ 有交集，则令 $\theta_r^*=\theta(r)$；若 $|z|=r$ 与 $\varGamma$ 不相交(即 $|z|\leqslant r$ 完全含于 D 内)，则令 $\theta_r^*=\infty$.

设 $u_r(z)$ 是 θ_r 的调和测度. 若 $z\in D$ 且 $|z|<kr/2$，则

$$u_r(z)\leqslant\frac{9}{\sqrt{1-k}}\mathrm{e}^{-\pi\int_{2|z|}^{kr}\frac{\mathrm{d}t}{t\theta^*(t)}}(0<k<1).$$

根据引理 8 及文献[10](文[10]P117 的定理 68)的证明过程有

引理 10　设 $f(z)$ 在 D 上正则，且在 $\varGamma$ 上 $|f(z)|\leqslant 1$，记

$$M(r,f)=M(r;D)=\max_{z\in D,|z|=r}|f(z)|.$$

若 $\exists\, z_0\in D$，使得 $|f(z_0)|>1$，则

$$\log|f(z_0)|\leqslant\log^+|f(z_0)|\leqslant$$

$$\log M(r,f)u_r(z_0)\leqslant c\log M(r,f)\mathrm{e}^{-\pi\int_{|z_0|}^{kr}\frac{\mathrm{d}t}{t\theta(t)}}.$$

2　定理的证明

定理 1 的证明　若 f 超越且级为 0，由引理 3 知 G 也超越且级为 0. 由已知 f 只有有限个极点及(1)式可知 G 也只有有限个极点，从而 G 必有无穷多个零点.

若 f 的级 $\sigma(f)=\sigma>0$. 由引理 3 知 $\sigma(G)=m_1\sigma$. 令 $g(z)=z^m$ (m 是 m_1,m_2 的最大公因数，且 $m\geqslant 2$)，由引理 4 知存在一个最大的非负整数 N，使得 $f=h_N\circ g^{\circ N}$，h_N 亚纯，由引理 5 易知 $G=H_N\circ g^{\circ N}$，其中 $H_N=h_N\circ g_1+h_N\circ g_2-2h_N$. 由于

$$f=h_N\circ g^{\circ N}=\ h_N\left\lfloor(z^m)^{\circ N}\right\rfloor,$$

从而可知 $\sigma(h_N)=m^{-N}\sigma$，再由引理 3 可知 $\sigma(H_N)=m_1m^{-N}\sigma$，而且 h_N 只有有限个极点. 若能证明 H_N 的零点收敛指数满足 $\lambda(H_N)=\sigma(H_N)=\ m_1m^{-N}\sigma$，则由引理 2 的(4)式可知

$$\lambda(G)=m^N\lambda(H_N)=\ m_1\sigma.$$

由于 $G=H_N\circ g^{\circ N}$，则当 $N=0$ 时，$H_N=G$. 因此为了证明 H_N 的零点收敛指数满足 $\lambda(H_N)=\sigma(H_N)$，只需证明当 $N=0$ 时，$\lambda(G)=\sigma(G)$，此时不存在亚纯函数 h_N 可以将 f 表示成 $f=h_N\circ g^{\circ N}$ 的形式. 由引理 6 知，$\exists\, j\in\{1,2,\cdots,m-1\}$ 使得(6)式不成立，即 $f_j(z)=f(\omega_j(z))-f(z)$ 在 ∞ 附近不趋于 0，其中 $\omega_j(z)$ 如(2)式所定义，由于 $\omega_j(z)$ 是 $\omega_1(z)$ 的 j 次迭

代，不妨假设 $f_1(z)=f(\omega_1(z))-f(z)$ 在 ∞ 附近不趋于 0.

现假设 $\lambda(G)<m_1\sigma$，即 $\lambda(G)<\sigma(G)$，则由 Hadamard 分解定理知 $n=m_1\sigma$ 是正整数，且存在一个 n 阶多项式函数 P，以及 1 个级小于 n 且只有有限个极点的亚纯函数 $\Pi(z)$，使得

$$G(z)=f(g_1(z))+f(g_2(z))-2f(z)=\Pi(z)\mathrm{e}^{P(z)}. \quad (7)$$

由 Poisson-Jessen 公式及 $\rho(\Pi)<n$ 可得到如下断言.

断言 I　设 (u_k) 是 $\Pi(z)$ 所有零点所构成的序列，重级零点按重数计算，则

$$\sum_k |u_k|^{-n}<\infty, \quad (8)$$

且 $\exists R_1>1$，对于 $|z|>R_1$，$z\notin H_1=\bigcup_k B(u_k,|u_k|^{-n})$ 有

$$\log|\Pi(z)|=o(|z|^n).$$

由(7)式容易得到下面关于 $|G(z)|$ 的估计.

断言 II　$\exists d_1\in R$ 具有以下性质，当 $\varepsilon>0$ 充分小时，$\exists d_2>0$ 使得对于所有模充分大的 z 和所有的 $k\in\mathbf{Z}$，当

$$d_1+\frac{2k\pi}{n}+\varepsilon<\arg z<d_1+\frac{(2k+1)\pi}{n}-\varepsilon$$

时，有

$$\log|G(z)|<-d_2|z|^n; \quad (9)$$

而对于 $z\notin H_1$ 及

$$d_1+\frac{(2k+1)\pi}{n}+\varepsilon<\arg z<d_1+\frac{(2k+2)\pi}{n}-\varepsilon$$

时，有

$$\log|G(z)|>d_2|z|^n. \quad (10)$$

结合以上 2 个断言，可证明

断言 III　整数 m 整除整数 n.

断言 III 的证明　设 $R_2>0$ 足够大，使得圆周 $S(0,R_2)\cap H_1$ 为空，可由(8)式知这样的 R_2 是存在的. 设 Γ 为 $|z|=R_2$ 上满足以下条件的圆弧：当 $\varepsilon>0$ 充分小时，

$$d_1-\frac{2\pi}{m}+2\varepsilon\leqslant\arg z\leqslant d_1-\frac{2\pi}{m}+\frac{\pi}{n}-2\varepsilon.$$

令 $\omega=z_1=\omega_1(z)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/m}z$，使圆弧 Γ 映射到 $d_1+\varepsilon\leqslant\arg z\leqslant d_1+(\pi/n)-\varepsilon$ 上. 于是由(9)式可知：$|G(\omega)|=|G(z_1)|<\exp\left\{-d_2|z|^n\right\}$.

故对于 $z\in\Gamma$，

$$|G(z)|=|f(g_1(z))+f(g_2(z))-2f(z)|=|f(g_1(\omega))+f(g_2(\omega))-2f(z)|\leqslant|G(\omega)|+2|f(\omega)-f(z)|=O(\exp(R_2^{\sigma+o(1)})),$$

故 $\log|G(z)|=O(|z|^{\sigma+o(1)})\leqslant d_2|z|^n$. 由(10)式知：$\arg z\in\left[d_1+\frac{2k\pi}{n}-\varepsilon,d_1+\frac{(2k+1)\pi}{n}+\varepsilon\right]$ 或 $z\in H_1$，但是 $S(0,R_2)\cap H_1$ 为空，因此

$$\left[d_1-\frac{2\pi}{m}+2\varepsilon,d_1-\frac{2\pi}{m}+\frac{\pi}{n}-2\varepsilon\right]\subseteq\left[d_1+\frac{2k\pi}{n}-\varepsilon,d_1+\frac{(2k+1)\pi}{n}+\varepsilon\right],$$

于是 $\left|-\frac{2\pi}{m}-\frac{2k\pi}{n}\right|\leqslant3\varepsilon$，可令 εmn 充分小，从而 $km=-n$，故 m 整除 n. 断言 III 证毕.

现继续证明定理 1，假设 $\varepsilon>0$ 充分小，R_3 充分大且 $c=d_1+\pi/2n$，$\Omega\in\{z\in\mathbf{C}:|z|>R_3,|\arg z-c|<\varepsilon\}$，那么对于 $z\in\Omega$，有 $\left|\arg\omega_1(z)-\frac{2\pi}{m}-c\right|<2\varepsilon$.

由于 $|\omega_1(z)|\sim\left|\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/m}z\right|=|z|$，且 $1/m$ 是 $1/n$ 的整数倍，故由(9)式知

$$\log|G(z)|<-d_2|z|^n \text{ 及 } \log|G(\omega_1(z))|<-d_2|z|^n/2.$$

而

$$\begin{aligned}G(z)&=f(g_1(z))+f(g_2(z))-2f(z)=\\&f(g_1(\omega_1(z)))+f(g_2(\omega_1(z)))-2f(z)=\\&G(\omega_1(z))+2f_1(z).\end{aligned} \quad (11)$$

于是可得：对于 $z\in\Omega$ 有 $\log|f_1(z)|\leqslant-d_2|z|^n/4$.

因此，对于某些 $R>0$ 和 $d_3>0$，当 $r\to\infty$ 时，

$$T_R(r,f_1)\geqslant m_R(r,1/f_1)-O(\log r)\geqslant d_3r^n. \quad (12)$$

由 $f_1(z)$ 的定义可知(12)式显然是不成立的. 从而 $\lambda(G)=\sigma(G)=m_1\sigma$.

定理 2 的证明　假设 $f(z)$ 和 $G(z)$ 满足定理 2 的假设，由引理 4，存在一个最大的非负整数 N 使得 $f=h_N\circ g^{\circ N}$，其中 h_N 亚纯，且 $\sigma(h_N)=m^{-N}\sigma$. 由引理 5 易知：$G=H_N\circ g^{\circ N}$，其中

$$H_N=h_N\circ g_1+h_N\circ g_2-2h_N.$$

若 H_N 有无穷多个零点，则 G 也有无穷多个零点，故只须证 H_N 具有无穷多个零点即可.

类似于定理 1，不妨证明当 $N=0$ 时，G 有无穷多个零点即可. 当 $N=0$ 时，由引理 6 知，$\exists j\in\{1,2,\cdots,m-1\}$ 使 $f_j(z)=f(\omega_j(z))-f(z)$ 在 ∞ 附近不趋于 0，不妨设 $f_1(z)=f(\omega_1(z))-f(z)$ 在 ∞ 附近不趋于 0. 由于当

$0 \leqslant \sigma < 1/m_1$ 时，有 $\sigma(G) < 1$，那么由引理 7，存在 1 个 ε-集 E_1，使得对所有充分大的 $|z|$ 和 $u_1 z \notin E_1$ 有

$$G(\omega_1(z)) \sim G(u_1 z) = G(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/m} z). \qquad (13)$$

(i)首先，证明 $0 < \sigma < 1/m_1$ 时，G 具有无穷多个零点.

假设 G 只有有限个零点，则 $1/G$ 只有有限多个极点，于是存在多项式函数 P，使得

$$H = P/G \qquad (14)$$

是超越整函数，其级

$$\sigma^* = \sigma(H) = \sigma(G) = m_1 \sigma \in (0,1),$$

由 G 的定义和 m_1 的假设，进而有 $f[g_1]$ 的级也为 σ^*. 选择足够小的 $\varepsilon > 0$ 使得

$$0 < \sigma^* - \varepsilon < \sigma^* = m_1 \sigma < \sigma^* + \varepsilon < 1/(1+\varepsilon) < 1. \quad (15)$$

现假设 k 是足够大的正常数，$c_j > 0$ ($j = 3,4,5$) 为与 ε 及 k 无关的常数.

根据 Pólya 峰的存在性定理，即在引理 8 中取 $\phi(t) = T(t, f[g_1]) / t^{\sigma-\varepsilon}, \psi(t) = t^{2\varepsilon}$ 可知存在充分大的正数 s_n，使得

$$\begin{aligned} &\frac{T(r, f[g_1])}{T(s_n, f[g_1])} \leqslant \left(\frac{r}{s_n}\right)^{\sigma^*-\varepsilon} (1 \leqslant r \leqslant s_n), \\ &\frac{T(r, f[g_1])}{T(s_n, f[g_1])} \leqslant \left(\frac{r}{s_n}\right)^{\sigma^*+\varepsilon} (s_n \leqslant r < \infty) \end{aligned} \qquad (16)$$

同时成立，则对于 $s_n \leqslant r \leqslant 8ks_n$，根据引理 2 及 $f_1(z)$ 的定义和(16)式有

$$\begin{aligned} &T_R(r, f_1) \leqslant (2+o(1))T(2r, f) \leqslant (2+o(1))T(c_3 r^{1/m}, \\ &f[g_1]) \leqslant (2+o(1))T(c_3 (8k)^{1/m} {s_n}^{1/m}, f[g_1]) = \\ &o(T(s_n, f[g_1])) = o(T(r, f[g_1])), \end{aligned} \qquad (17)$$

其中 R 的选取应使得 $f_1(z)$ 在 $|z| \geqslant R$ 上亚纯. 对于相同的 r 值还有下面的结果.

$$T(r,f) = o(T(r, f[g_1])),\ T(r, f[g_2]) = o(T(r, f[g_1])),$$
$$T(r,H) \sim T(r,G) \sim T(r, f[g_1]). \qquad (18)$$

选择 z_0，使得

$$|z_0| = s_n, \log|H(z_0)| = \log M(s_n, H) \geqslant T(s_n, H). \quad (19)$$

令 A 是集合 $\{z \in \mathbf{C} : \log|H(z)| \geqslant \varepsilon T(s_n, H)\}$ 中包含 z_0 的分支，对于 $r \geqslant s_n$，设 $\theta(r)$ 是 $S(0,r) \cap A$ 的角测度.

若对于所有的 $r \in [2s_n, 2ks_n]$ 有

$$\theta(r) \leqslant \pi(1+\varepsilon), \qquad (20)$$

则由(15)和(17)~(20)式、引理 9、引理 10 及 ε 充分小和 k 充分大有

$$\begin{aligned} &T(s_n, H) \leqslant \log|H(z_0)| \leqslant \varepsilon T(s_n, H) + c_4 \log M(4ks_n, H) \cdot \\ &\exp\left(-\pi \int_{2s_n}^{2ks_n} \frac{\mathrm{d}t}{t\theta(t)}\right) \leqslant \varepsilon T(s_n, H) + c_5 T(8ks_n, H) k^{-1/(1+\varepsilon)} \leqslant \\ &T(s_n, H)(\varepsilon + c_5 (8k)^{\sigma+\varepsilon} k^{-1/(1+\varepsilon)}) \leqslant T(s_n, H)/2. \end{aligned}$$

显然矛盾!这个矛盾说明(20)式是不正确的，故 $\exists\, r_n \in [2s_n, 2ks_n]$，使得

$$S_n = \{z \in S(0, r_n) : \log|H(z)| \geqslant \varepsilon T(s_n, H)\}$$

的角测度大于 $\pi(1+\varepsilon)$，令 $T_n = \{z \in S(0, r_n) : u_1 z \in S_n\}$，明显地 $S_n \cap T_n$ 的角测度至少为 $2\pi\varepsilon$，并且对于 $z \in S_n \cap T_n$，当 $u_1 z$ 不属于 ε-集 E_1 时有(13)式成立. 所以存在集合 $U_n \subseteq S_n \cap T_n$，其角测度至少为 $2\pi\varepsilon - o(1)$，使得对于 $z \in U_n$，由(14)式有

$$\max\{\log|G(z)|, \log|G(\omega_1(z))|\} \leqslant -\varepsilon T(s_n, H) + O(\log r_n),$$

由(11)式及第一基本定理，有

$$T_R(r_n, f_1) + O(\log r_n) \geqslant m_R\left(r_n, \frac{1}{f_1}\right) \geqslant \frac{\varepsilon^2}{2} T(s_n, H).$$

这与(17)及(18)式矛盾!

所以，G 具有无穷多个零点

(ii)现证明当 $\sigma = 0$ 且 $m \geqslant 4$ 时，G 具有无穷多个零点.

假设 G 只有有限个零点，则可如(14)式定义 H，且 $\sigma(H) = \sigma(G) = 0$. 假设 δ，ε 为足够小的正数，则由引理 2，文献[11，引理 4]及文献[12，ch.6]的 $\cos \pi\rho$ 定理，给定具有正的上对数密度的集合 $E_2 \subseteq [1, \infty]$ 使得当 $|z| = r \in E_2$ 时，有

$$\begin{aligned} T_R(r, f_1) \leqslant (2+o(1))T((1+o(1))r, f) \leqslant \\ (2+o(1))T(r,f) \end{aligned} \qquad (21)$$

和

$$\log|H(z)| \geqslant \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \log M(r, H) \geqslant \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) T(r, G). \quad (22)$$

可以假设对所有 $|z| = r \in E_2$，圆周 $S(0,r)$ 与 ε-集 E_1 不相交，那么由(3)、(5)、(13)和(22)式，当 $|z| = r \in E_2$ 时，

$$\begin{aligned} &\max\{\log|G(z)|, \log|G(\omega_1(z))|\} \leqslant \\ &-(1-\varepsilon)T(r,G) \leqslant -(1-\varepsilon)(m-1-\delta)T(r,f). \end{aligned}$$

由(11)式，对于 $|z| = r \in E_2$，也有

$$\begin{aligned} &T_R(r, f_1) \geqslant m(r, 1/f_1) - O(\log r) \geqslant (1-\varepsilon)(m-1-\delta)T(r, \\ &f) - O(\log r) \geqslant (1-\varepsilon)(3-\delta)T(r,f) - O(\log r). \end{aligned}$$

这显然与(21)式矛盾！所以 G 具有无穷多个零点.

定理 2 得证.

注 1　在文献[13]中，李爱平估计了差分

$$\varphi(z)=f(z+c_1)+f(z+c_2)+\cdots+f(z+c_n)-nf(z)$$

及差商 $\Phi(z)=\varphi(z)/f(z)$ 的零点.

类似于定理 1、定理 2 的证明方法, 也可以得到下面更具一般形式的差分:

$$G(z)=f(g_1(z))+f(g_2(z))+\cdots+f\left(g_n(z)\right)-nf(z)$$

的零点的相关性质, 其中 f 为超越亚纯函数, $g_1=z^{m_1},g_2=z^{m_2},\cdots,g_n=z^{m_n}$ ($m_1,m_2,\cdots,m_n$ 均为不小于 2 的正整数, 且最大公因数 $m_1\geqslant 2$).

3 参考文献

[1] Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations [M]. Berlin: W de Gruyter, 1993.

[3] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[4] Bergweiler W, Langley J K. Zeros of differences of meromorphic functions [J]. Math Proc Camb Phil Soc, 2007, 142: 133-147.

[5] Chen Zong-Xuan, Kwang Ho Shon. On zeros and fixed points of differences of meromorphic functions [J]. J Math Anal Appl, 2008, 344: 373-383.

[6] Fletcher A, Langley J K, Meyer J. Slowly growing meromorphic functions and the zeros of differences [J]. Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy, 2009, 109A(2): 147-154.

[7] Alastair N, Fletcher A, Langley J K. Mermorphic compositions and target functions [J]. Ann Acad Sci Fenn, 2009, 34: 615-636.

[8] Chen Zong-Xuan, Kwang Ho Shon. Estimates for the zeros of differences of meromorphic functions [J]. Science in China: Series A, 2009, 52(11): 2447-2458.

[9] Steinmetz N. Rational iteration [M]. Berlin: de Gruyter Studies in Mathematics 16, Walter de Gruyter, 1993.

[10] Tsuji M. Potential theory in modern function theory [M]. Tokyo: Maruzen, 1949.

[11] Hayman W K. On the characteristic of functions meromorphic in the plane and of their integrals [J]. Proc London Math Soc, 1965, 14A(3): 93-128.

[12] Hayman W K. Subharmonic functions [M]. London: Academic Press, 1989.

[13] 李爱平, 易才凤, 谭祖山. 一类差分亚纯函数零点的估计 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2010, 34(2): 183-187.

The Estimate on Zeros of Composition Differences of Meromorphic Functions

YI Cai-feng, LI Ai-ping

(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: Let f is hypothesized as a transcendental meromorphic function of finite order σ. By using the fundamental theory and method of Nevanlinna, it is proved that composition differences $G(z)=f(z^{m_1})+f(z^{m_2})-2f(z)$ have infinity zero and if $\sigma>0$ then the exponent of convergence of the zeros of $G(z)$ is $\lambda(G)=\rho(G)=m_1\rho$, under the condition that $m_1>m_2$ and the greatest common divisor $m\geqslant 2$ of m_1,m_2.

Key words: meromorphic function; differences; composition differences; zero

(责任编辑: 王金莲)