第 36 卷 第 1 期　　江西师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 36 No.1
2012 年 1 月　　Journal of Jiangxi Normal University (Natural Science)　　Jan. 2012

文章编号: 1000-5862(2012)01-0047-04

亚纯函数相对于$\varphi(r)$的[p,q]增长级

涂　金[1], 刘翠云[1], 徐洪焱[2]

(1. 江西师范大学数学与信息科学学院, 江西 南昌 330022; 2. 景德镇陶瓷学院信息工程学院, 江西 景德镇 333403)

摘要: 利用亚纯函数的值分布理论研究了亚纯函数f_1, f_2的四则运算$f_1\pm f_2$, $f_1 f_2$, f_1/f_2相对于实值函数$\varphi(r)$的[p,q]增长级, 推广了原有的一些结果.

关键词: 整函数; 亚纯函数; [p,q]级; 相对[p,q]级
中图分类号: O 174.52　　　文献标志码: A

0　引理和结果

本文使用 Nevanlinna 值分布理论中关于整函数和亚纯函数增长级的定义[1-2].

定义 1　如果$f(z)$为亚纯函数, 则$f(z)$的增长级定义为

$$\rho(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log T(r,f)/\log r\,.$$

定义 2　如果$f(z)$为整函数, 则$f(z)$的增长级定义为

$$\rho(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log\log M(r,f)/\log r=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log T(r,f)/\log r.$$

在本文中p,q为正整数满足$p\geqslant q\geqslant 1$, 为了刻画$[p,q]$级整函数的定义, 需引入一些记号, 对于充分大的r, 记

$$\log_1 r=\log r,\quad \log_{p+1}r=\log_p(\log r)$$

且

$$\exp_1 r=\mathrm{e}^r,\ \exp_{p+1}r=\exp(\exp_p r),$$

并且记

$$\exp_0 r=r,\quad \log_0 r=r\,,\quad \log_{-1}r=\exp_1 r\,,\quad \exp_{-1}r=\log_1 r\,.$$

在过去的几十年中, 很多学者对[p,q]级整函数进行了研究并得到了一些经典的结果[3-7], 并且这几年有人把[p,q]级整函数引入到复线性微分方程中[8-9].

定义 3　当$f(z)$为整函数时, 则$f(z)$的[p,q]级定义为

$$\rho_{[p,q]}(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log_p M(r,f)/\log_q r.$$

受到定义 3 的启发, 并且与定义 1 保持一致, 下面给出亚纯函数$f(z)$的[p,q]级定义.

定义4　当$f(z)$为亚纯函数时, 则$f(z)$的[p,q]级定义为

$$\rho_{[p,q]}(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log_p T(r,f)/\log_q r.$$

近年来, 一些学者开始研究了 2 个函数的相对[p,q]级[10-11], 在 2005 年 B. K. Lahiri 和 D. Banerjee 在文献[12]中给出了 2 个整函数的相对[p,q]增长级的定义.

定义5　设$f(z)$, $g(z)$为非常数整函数, 记

$$F(z)=\max\{|f(z)|:|z|=r\},$$
$$G(z)=\max\{|g(z)|:|z|=r\},$$

则$f(z)$相对于$g(z)$的$[p,q]$增长级为

$$\rho_{[p,q]}(f,g)=\inf\{\mu>0:F(r)<G(\exp_{p-1}(\mu\log_q r))\},\quad r>r_0(\mu)>0.$$

由于$F(r)$和$G(r)$是关于r的严格递增函数, 所以都存在反函数$F^{-1}(r)$与$G^{-1}(r)$. 与此同时 B. K. Lahiri 和 D. Banerjee 证明了定义 5 与下面的定义是等价的.

定义 6　整函数$f(z)$相对于整函数$g(z)$的[p,q]增长级为

$$\rho_{[p,q]}(f,g)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log_{p-1}G^{-1}(F(r))/\log_q r=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log_{p-1}G^{-1}(r)/\log_q F^{-1}(r).$$

定义 7　设$S(r)$是在$(r_0,+\infty)$上定义的实函数,

收稿日期: 2011-08-20
基金项目: 国家自然科学基金(11126145), 江西省自然科学基金(2009GQS0013)和江西省教育厅青年基金(GJJ11072)资助项目.
作者简介: 涂　金(1979-), 男, 江西鹰潭人, 副教授, 博士, 主要从事复分析的研究.

其中 $r_0 \geqslant 0$，若 $S(r)$ 在该区间内非负且非减，则它的增长级 λ 定义为

$$\lambda = \overline{\lim_{r\to\infty}} \log^+ S(r)/\log r .$$

受定义 7 的启发，自然想到亚纯函数 $f(z)$ 相对于实函数 $\varphi(r)$ 的 $[p,q]$ 增长级，并给出它的定义为

定义 8 设 $\varphi(r)$ 是在 $(r_0,+\infty)$ 上定义的实函数，其中 $r_0 \geqslant 0$，若 $\varphi(r)$ 在该区间内非负递增且 $\lim\limits_{r\to\infty}\varphi(r) = +\infty$，则亚纯函数 $f(z)$ 相对于 $\varphi(r)$ 的 $[p,q]$ 增长级定义为

$$\rho_{[p,q]}(f,\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \log_p T(r,f)/\log_q \varphi(r).$$

众所周知，对于 2 个有限级的亚纯函数，已经有以下一些经典的结论.

定理 A 设 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 为有限级的亚纯函数，则有

$$\rho(f_1 \pm f_2) \leqslant \max\{\rho(f_1),\rho(f_2)\},$$
$$\rho(f_1 f_2) \leqslant \max\{\rho(f_1),\rho(f_2)\}.$$

定理 B 设 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 为有限级的亚纯函数，满足 $\rho(f_1) < \rho(f_2)$，则有

$$\rho(f_1 \pm f_2) = \rho(f_2),\quad \rho(f_1 f_2) = \rho(f_2).$$

定理 C 设 $f(z)$ 为有限级亚纯函数，则有

$$\rho(f) = \rho(f').$$

易知在以上定理 A~定理 C 中，把有限级亚纯函数换成 $[p,q]$ 级亚纯函数，结论也同样成立．类似地，以上定理对于整函数的相对 $[p,q]$ 级也成立，并且在文献[12]中已得到了以下结果.

定理 D 若 $f_1(z), f_2(z)$ 和 $g(z)$ 是整函数，则

$$\rho_{[p,q]}(f_1 \pm f_2, g) \leqslant \max\{\rho_{[p,q]}(f_1,g),\rho_{[p,q]}(f_2,g)\},$$

其中当

$$\rho_{[p,q]}(f_1,g) \ne \rho_{[p,q]}(f_2,g)$$

时，等号成立.

定理 E 若 $f_1(z), f_2(z)$ 和 $g(z)$ 是整函数，$p-1>q$，则

(i) $\rho_{[p,q]}(f_1 f_2, g) \leqslant \max\{\rho_{[p,q]}(f_1,g),\rho_{[p,q]}(f_2,g)\}$；

(ii) 当 $\rho_{[p,q]}(f_1,g) \ne \rho_{[p,q]}(f_2,g)$ 时，(i) 中等号成立;

(iii) 当 f_1/f_2 为整函数时，

$$\rho_{[p,q]}(f_1/f_2, g) \leqslant \max\{\rho_{[p,q]}(f_1,g),\rho_{[p,q]}(f_2,g)\},$$

其中当

$$\rho_{[p,q]}(f_1,g) \ne \rho_{[p,q]}(f_2,g)$$

时，等号成立.

定理 F 若 $f(z)$ 和 $g(z)$ 都是超越整函数，则

$$\rho_{[p,q]}(f,g) = \rho_{[p,q]}(f',g) =$$
$$\rho_{[p,q]}(f,g') = \rho_{[p,q]}(f',g').$$

自然会问，以上几个结论对于亚纯函数的相对于实函数 $\varphi(r)$ 的 $[p,q]$ 级是否也成立．本文解决了这个问题，并得到以下结论.

定理 1 若 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 都是亚纯函数，设 $\varphi(r)$ 是在 $(r_0,+\infty)$ 上定义的实函数，其中 $r_0 \geqslant 0$，若 $\varphi(r)$ 在该区间内非负递增且 $\lim\limits_{r\to\infty}\varphi(r) = +\infty$，则

$$\rho_{[p,q]}(f_1 \pm f_2, \varphi) \leqslant \max\{\rho_{[p,q]}(f_1,\varphi),\rho_{[p,q]}(f_2,\varphi)\},$$

其中当

$$\rho_{[p,q]}(f_1,\varphi) \ne \rho_{[p,q]}(f_2,\varphi)$$

时，等号成立.

定理 2 若 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 都是亚纯函数，$\varphi(r)$ 满足定理 1 中的条件，则

(i) $\rho_{[p,q]}(f_1 f_2, \varphi) \leqslant \max\{\rho_{[p,q]}(f_1,\varphi),\rho_{[p,q]}(f_2,\varphi)\}$;

(ii) 当 $\rho_{[p,q]}(f_1,\varphi) \ne \rho_{[p,q]}(f_2,\varphi)$ 时，(i)中等号成立;

(iii) $\rho_{[p,q]}(f_1/f_2, \varphi) \leqslant \max\{\rho_{[p,q]}(f_1,\varphi),\rho_{[p,q]}(f_2,\varphi)\}$,

其中当

$$\rho_{[p,q]}(f_1,\varphi) \ne \rho_{[p,q]}(f_2,\varphi)$$

时，等号成立.

由上述定理 1 和定理 2，很容易推出下列推论 1.

推论 1 设 $P(z)$ 是一个多项式，$f(z)$ 是亚纯函数，$\varphi(r)$ 满足定理 1 中的条件，则

$$\rho_{[p,q]}(P(f),\varphi) = \rho_{[p,q]}(f,\varphi).$$

定理 3 设 $f(z)$ 是超越亚纯函数，若定理 1 中的 $\varphi(r)$ 还满足 $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \log_q \varphi(\alpha r)/\log_q \varphi(r) = 1$，其中 $\alpha > 1$ 为某个正常数，则

$$\rho_{[p,q]}(f',\varphi) = \rho_{[p,q]}(f,\varphi).$$

注 1 定理 3 中对 $\varphi(r)$ 的限制条件

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \log_q \varphi(\alpha r)/\log_q \varphi(r) = 1$$

说明了 $\varphi(r)$ 的增长速度不能太快，例如不能超过 $\exp_q\{r\}$.

1 引理

引理 1 设 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 为 m 个亚纯函数，则有

(i) $T(r, f_1 f_2 \cdots f_m) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m} T(r, f_i)$;

(ii) $T(r,f_1+f_2+\cdots+f_m)\leqslant\sum_{i=1}^{m}T(r,f_i)+\log m$.

引理 2　设$f(z)$为亚纯函数满足$f(0)\neq\infty$，则$\forall\ \tau>1$与$r>0$，有

$T(r,f)<C_\tau T(\tau r,f')+\log^+(\tau r)+4+\log^+|f(0)|$，

其中C_τ是与τ有关的正常数.

注 2　引理 2 中的条件$f(0)\neq\infty$不是必要的，一般可以忽略.

2　定理的证明

定理 1 的证明　令$\rho_1=\rho_{[p,q]}(f_1,\varphi)$，$\rho_2=\rho_{[p,q]}(f_2,\varphi)$，$b=\max\{\rho_1,\rho_2\}$. 由定义 7，对于任意给定的$\varepsilon>0$以及充分大的$r$，可得

$$\begin{aligned}&T(r,f_1)\leqslant\exp_p\{(b+\varepsilon)\log_q\varphi(r)\},\\&T(r,f_2)\leqslant\exp_p\{(b+\varepsilon)\log_q\varphi(r)\}.\end{aligned}\tag{1}$$

所以对于充分大的r，由引理 1 及(1)式可得

$$\begin{aligned}&T(r,f_1\pm f_2)\leqslant T(r,f_1)+T(r,f_2)+\log 2\leqslant\\&2\exp_p\{(b+\varepsilon)\log_q\varphi(r)\}+\log 2.\end{aligned}\tag{2}$$

因此由(2)式可得

$$\rho_{[p,q]}(f_1\pm f_2,\varphi)\leqslant b+\varepsilon.$$

由ε的任意性可知

$$\rho_{[p,q]}(f_1\pm f_2,\varphi)\leqslant b=\max\{\rho_{[p,q]}(f_1,\varphi),\rho_{[p,q]}(f_2,\varphi)\}.$$

不妨设$\rho_2<\rho_1$，选取ε满足$0<\varepsilon<(\rho_1-\rho_2)/2$，由上极限的定义可知，存在一列$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$满足

$$T(r_n,f_1)>\exp_p\{(\rho_1-\varepsilon)\log_q\varphi(r_n)\},\tag{3}$$

并且对于充分大的r_n，有

$$T(r_n,f_2)<\exp_p\{(\rho_2+\varepsilon)\log_q\varphi(r)\}.\tag{4}$$

由引理 1 及(3)~(4)式可得

$$\begin{aligned}&T(r_n,f_1\pm f_2)\geqslant T(r_n,f_1)-T(r_n,f_2)-\log 2\geqslant\\&\exp_p\{(\rho_1-\varepsilon)\log_q\varphi(r_n)\}-\exp_p\{(\rho_2+\varepsilon)\log_q\varphi(r_n)\}\geqslant\\&\exp_p\{(\rho_1-\varepsilon)\log_q\varphi(r_n)\}/2.\end{aligned}\tag{5}$$

由(5)式可得

$$\rho_{[p,q]}(f_1\pm f_2,\varphi)\geqslant\rho_1-\varepsilon.$$

由ε的任意性可得

$$\rho_{[p,q]}(f_1\pm f_2,\varphi)\geqslant\rho_1=\max\{\rho_{[p,q]}(f_1,\varphi),\rho_{[p,q]}(f_2,\varphi)\},$$

因此当

$$\rho_{[p,q]}(f_1,\varphi)\neq\rho_{[p,q]}(f_2,\varphi)$$

时，有

$$\rho_{[p,q]}(f_1\pm f_2,\varphi)=\max\{\rho_{[p,q]}(f_1,\varphi),\rho_{[p,q]}(f_2,\varphi)\}.$$

定理 2 的证明　(i) 令$\rho_1=\rho_{[p,q]}(f_1,\varphi)$，$\rho_2=\rho_{[p,q]}(f_2,\varphi)$，$b=\max\{\rho_1,\rho_2\}$. 对于任意给定的$\varepsilon>0$以及充分大的$r$，由引理 1 及(1)式可得

$$T(r,f_1f_2)\leqslant T(r,f_1)+T(r,f_2)\leqslant 2\exp_p\{(b+\varepsilon)\log_q\varphi(r)\}.$$

因此有

$$\rho_{[p,q]}(f_1f_2,\varphi)\leqslant b+\varepsilon.$$

由ε的任意性可知

$$\rho_{[p,q]}(f_1f_2,\varphi)\leqslant b=\max\{\rho_{[p,q]}(f_1,\varphi),\rho_{[p,q]}(f_2,\varphi)\}.$$

(ii) 不妨设$\rho_2<\rho_1$，选取ε满足$0<\varepsilon<(\rho_1-\rho_2)/2$. 由 Nevanlinna 第一基本定理有

$$T(r,f_2)=T(r,1/f_2)+C,\tag{6}$$

其中C为某一实常数，且每次出现不必相同. 类似定理 1 的证明中(3)~(4)式，有

$$\begin{aligned}&T(r_n,f_1f_2)\geqslant T(r_n,f_1)-(T(r_n,1/f_2)+C)>\\&\exp_p\{(\rho_1-\varepsilon)\log_q\varphi(r_n)\}-\exp_p\{(\rho_2+\varepsilon)\log_q\varphi(r_n)\}\geqslant\\&\exp_p\{(\rho_1-\varepsilon)\log_q\varphi(r_n)\}/2.\end{aligned}$$

因此

$$\rho_{[p,q]}(f_1f_2,\varphi)\geqslant\rho_1-\varepsilon.$$

由ε的任意性可得

$$\rho_{[p,q]}(f_1f_2,\varphi)\geqslant\rho_1=\max\{\rho_{[p,q]}(f_1,\varphi),\rho_{[p,q]}(f_2,\varphi)\}.$$

因此当$\rho_{[p,q]}(f_1,\varphi)\neq\rho_{[p,q]}(f_2,\varphi)$时，

$$\rho_{[p,q]}(f_1f_2,\varphi)=\max\{\rho_{[p,q]}(f_1,\varphi),\rho_{[p,q]}(f_2,\varphi)\}.$$

(iii) 由(6)式易知

$$\rho_{[p,q]}(f_2,\varphi)=\rho_{[p,q]}(1/f_2,\varphi),$$

再由结论(i)与(ii)可得结论(iii)成立.

定理 3 的证明　因为$f(z)$为超越亚纯函数，因此对于充分大的r，有

$$T(r,f')\leqslant 3T(r,f),$$

因此

$$\rho_{[p,q]}(f',\varphi)\leqslant\rho_{[p,q]}(f,\varphi).$$

另一方面，由引理 2，有

$$\begin{aligned}&T(r,f)<C_\alpha T(\alpha r,f')+\log^+(\alpha r)+C\\&(\alpha>1,C_\alpha>0).\end{aligned}\tag{7}$$

因为$f(z)$为超越亚纯函数，故有$\log r=o(T(\alpha r,f'))$，因此当r充分大时，由(7)式有

$$T(r,f)<(C_\alpha+1)T(\alpha r,f'),$$

即

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log_p T(r,f)}{\log_q \varphi(r)} \leqslant \varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log_p T(\alpha r,f')}{\log_q \varphi(r)} \leqslant \varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log_p T(\alpha r,f')}{\log_q \varphi(\alpha r)}\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log_q \varphi(\alpha r)}{\log_q \varphi(r)}.$$

又由 $\varlimsup_{r\to\infty}\log_q \varphi(\alpha r)/\log_q \varphi(r)=1$，可得

$$\rho_{[p,q]}(f,\varphi)\leqslant\rho_{[p,q]}(f',\varphi),$$

因此

$$\rho_{[p,q]}(f',\varphi)=\rho_{[p,q]}(f,\varphi).$$

3 参考文献

[1] Hayman W. Meromorphic function [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] 杨乐. 值分布理论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[3] Juneja O P, Kapoor G P, Bajpai S K. On the (*p*,*q*)-order and lower (*p*,*q*)-order of an entire function [J]. J Reine Angew Math, 1976, 282: 53-67.

[4] Juneja O P, Kapoor G P, Bajpai S K. On the (*p*,*q*)-typer and lower (*p*,*q*)-type of an entire function [J]. J Reine Angew Math, 1977, 290: 180-190.

[5] Kasana H S. Existence theorem for proximate type of entire functions with index pair (*p*,*q*) [J]. Bull Aus Math Soc, 1987, 35(1): 35-42.

[6] Kasana H S. On the coefficients of entire functions with index pair (*p*,*q*) [J]. Bull Math, 1988, 32(3): 235-242.

[7] Kasana H S. The generalized type of entire functions with index pair (*p*,*q*) [J]. Comment Math, 1990(2): 215-222.

[8] 涂金, 时玲芝. 系数为[*p*,*q*]级整函数的高阶线性微分方程解的增长性 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2010, 34(3): 11-17.

[9] Liu Jie, Tu Jin, Shi Lingzhi. Linear differential equations with entire coefficients of [*p*,*q*]-order in the complex plane [J]. J Math Anal Appl, 2010, 372(1): 55–67.

[10] Halvarsson S. Growth properties of entire functions depending on a parameter [J]. Annales Polonici Mathematici, 1996, 14(1): 71-96.

[11] Kiselman C O. Order and type as measures of growth for convex or entire functions [J]. Proc Lond Math Soc, 1993, 66(3): 152-186.

[12] Lahiri B K, Banerjee D. Entire functions of relative order (*p*,*q*) [J]. Soochow Journal Math, 2005, 31(4): 497-513.

Meromorphic Functions of Relative [*p*,*q*] Order to $\varphi(r)$

TU Jin[1], LIU Cui-yun[1], XU Hong-yan[2]

(1. College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China;
2. Department of Informatics and Engineering, Jingdezhen Ceramic Institute, Jingdezhen Jiangxi 333403, China)

Abstract: The relative [*p*,*q*] order of meromorphic functions $f_1\pm f_2, f_1 f_2, f_1/f_2$ to $\varphi(r)$ are investigated by using the theory of value distribution of meromorphic functions, and some results are obtained which are the improvement and extension of previous results.

Key words: entire function; meromorphic function; [*p*,*q*] order; relative [*p*,*q*] order

(责任编辑: 王金莲)