文章编号: 1000-5862(2012)01-0051-03

6 长圈带 2 条悬边的 8 阶连通图的图设计

张艳芳

(河北经贸大学数学与统计学学院, 河北 石家庄 050061)

摘要: 构造了所需的带洞图设计, 再结合一些小阶数的图设计的存在性, 得到了关于图 G_i (i=1,2,3,4)的图设计(v, G_i ,1)-GD 的存在谱, 其中图 G_i (i=1,2,3,4)是给 6 长圈增加 2 条悬挂边所得的 8 阶连通图, 且 G_1, G_2, G_3, G_4 互不同构.

关键词: 图设计; 带洞图设计; 连通图
中图分类号: O 157　　文献标志码: A

0　引言

一个图有 v 个顶点且不同的任意 2 个顶点 x, y 之间恰有一条无向边 $\{x, y\}$ 相连, 则称其为 v 阶完全图, 记作 K_v. 完全多部图 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_t}$ 是一个如下的图: (i) 点集合为 $\bigcup\limits_{i=1}^{t} X_i$, 诸 X_i (称为洞)两两不交且 $|X_i| = n_i, i = 1,2,\cdots,t$; (ii) $\forall x \in X_i, y \in X_j$, 当 $i \neq j$ 时, $\{x, y\}$ 在边集合中恰出现一次, 当 $i = j$ 时, $\{x, y\}$ 在边集合中不出现.

对于一个简单图 G , 若 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_t}$ 可拆分成一些子图的并, 这里每个子图都与 G 同构, 且它们的边均不相交, 则称它是带洞的图设计, 并记带洞 G -设计的型为 $T = n_1^1 n_2^1 \cdots n_t^1$. 通常将该型记为指数形式, 如 $n_1^{k_1} n_2^{k_2} \cdots n_m^{k_m}$ 表示 n_1 长洞有 k_1 个, $\cdots$, n_m 长洞有 k_m 个. 这样的带洞 G -设计常记为 G - $HD(T)$ 或 G - $HD(n_1^{k_1} n_2^{k_2} \cdots n_m^{k_m})$.

对于有限简单图 G , 所谓图设计 $(v, G, 1)$ - GD 是指一个序偶(X , $\mathscr{B}$), 其中 X 是 K_v 的顶点集, 而 $\mathscr{B}$ 是 K_v 中若干个与 G 同构的子图(称之为区组)的族, 使得 K_v 中不同的任意 2 个顶点间的无向边恰好出现在一个 $\mathscr{B}$ 的区组中. 易知, $(v, G, 1)$ - GD 存在的必要条件为

$$v \geqslant n, v(v-1) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2e), v-1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ d),$$

其中 n 为 G 的顶点数, e 为 G 的边数, 正数 d 为 G 中各顶点度的最大公因数. 易知, 图设计 $(v, G, 1)$ - GD 是一个带洞图设计 G - $HD(1^v)$. 关于路图 P_k 以及星图 $K_{1,k}$ 的图设计问题已经被解决[1-2]. 同时一些顶点较少和边较少的图的图设计问题也受到广泛关注[3-14].

本文研究的图为 6 长圈增加 2 条悬挂边而得到的 8 阶连通图, 这样的图一共有 4 个(见图 1), 这 4 个图分别记为 G_1 , G_2 , G_3 , G_4 . 为方便, 将带有如下标号的 G_1 , G_2 , G_3 , G_4 用符号 (a, b, c, d, e, f, g, h) 来表示.

显然, G_i 的顶点数和边数均为 8. 故 $(v, G_i, 1)$ - GD 存在的必要条件是 $v(v-1) \equiv 0$ (mod16) 且 $v \geqslant 8$, 即 $v \equiv 0,1$ (mod16) 且 $v \geqslant 8$.

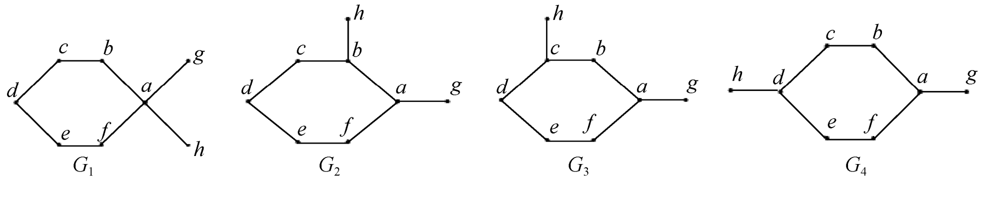

图 1　6 长圈加 2 条悬挂边得到的 8 阶连通图

收稿日期: 2011-10-10
基金项目: 河北省自然科学基金(A2010001481, A2011207003)资助项目.
作者简介: 张艳芳(1975-), 女, 河北沙河人, 副教授, 博士, 主要从事组合数学的研究.

本文证明了图设计 $(v,G_i,1)$-GD 存在的上述必要条件也是充分条件，从而得到了图设计 $(v,G_i,1)$-GD 的存在谱.

1 基本结构

定理 1 设 h,t 为正整数，G 是一个有限简单图，若存在 G-$HD(h^t)$ 和 $(h+w,G,1)$-GD，则必存在 $(ht+w,G,1)$-GD，其中 $w=0$ 或 1.

证 令 $X=(Z_h\times Z_t)\cup W$，其中 $|W|=w$. 假设 G-$HD(h^t)=(Z_h\times Z_t,\mathscr{A})$, $(h+w,G,1)$-$GD=((Z_h\times\{i\})\cup W,\mathscr{B}_i)$，$i\in Z_t$，则 (X,Ω) 是一个 $(ht+w,G,1)$-GD，其中 $\Omega=\mathscr{A}\cup\left(\bigcup\limits_{i=0}^{t-1}\mathscr{B}_i\right)$. 事实上，若 $w=0$ 或 1，则

$$|\Omega|=\frac{\binom{ht+w}{2}}{e(G)}=\frac{\binom{t}{2}h^2}{e(G)}+t\times\frac{\binom{h+w}{2}}{e(G)}=|\mathscr{A}|+\sum_{i=0}^{t-1}|\mathscr{B}_i|.$$

2 带洞图设计

引理 1 设 G 是一个有限简单图，对于正整数 $s_1,s_2,\cdots,s_p$ 和 $t_1,t_2,\cdots,t_q$，若 $\forall i=1,2,\cdots,p,j=1,2,\cdots,q$，都存在 G-$HD(s_i^1t_j^1)$，则必存在

$$G\text{-}HD\left(\left(\sum_{i=1}^{p}s_i\right)^1\left(\sum_{j=1}^{q}t_j\right)^1\right).$$

证 令 $|S_i|=s_i,1\leqslant i\leqslant p,|T_j|=t_j,1\leqslant j\leqslant q$. 若存在 G-$HD(s_i^1t_j^1)=(S_i\cup T_j,A_{ij}),1\leqslant i\leqslant p,1\leqslant j\leqslant q$，则 (X,B) 是 G-$HD\left(\left(\sum_{i=1}^{p}s_i\right)^1\left(\sum_{j=1}^{q}t_j\right)^1\right)$，其中 $X=\left(\bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant p}S_i\right)\cup\left(\bigcup\limits_{1\leqslant j\leqslant q}T_j\right),B=\bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant p,1\leqslant j\leqslant q}A_{ij}$.

推论 1 若存在 G-$HD(8^2)$，则存在 G-$HD(16^2)$.

证 令 $p=q=2,s_1=s_2=8,t_1=t_2=8$. 若存在 G-$HD(8^2)$，根据引理 1 可得推论 1 成立.

引理 2 存在 G_i-$HD(8^2)$，其中 $i=1,2,3,4$.

证 图 G_i 的边数是 8. 带洞图设计 G_i-$HD(8^2)$ 中的区组个数为 $8\times 8/8=8$. 令点集 $X=Z_8\times Z_2=\{(x,y)\mid x\in Z_8,y\in Z_2\}$. 记点集 X 中的无序对 $\{(x,0),(y,1)\}$ 对应的差为 $(y-x)_{01}$，称为 01 混差.令

$B_1=((0,0),(1,1),(6,0),(3,1),(7,0),(7,1),(2,1),(6,1))$,

$B_2=((0,0),(1,1),(6,0),(3,1),(7,0),(7,1),(2,1),(3,0))$,

$B_3=((0,0),(1,1),(6,0),(3,1),(7,0),(7,1),(2,1),(4,1))$,

$B_4=((0,0),(1,1),(6,0),(3,1),(7,0),(7,1),(2,1),(5,0))$.

容易验证 B_i 表示的图 G_i 的 8 条边所对应的无序对恰覆盖了所有 8 个 01 混差 $0_{01},1_{01},2_{01},3_{01},4_{01},5_{01},6_{01},7_{01}$ 各 1 次，令 B_i mod (8,-)表示由区组 B_i 中每个点的第 1 坐标进行模 8 加法取值，第 2 坐标不变所得的 8 个区组所构成集合,如 B_1 mod $(8,\text{-})=\{((x,0),(1+x,1),(6+x,0),(3+x,1),(7+x,0),(7+x,1),(2+x,1),(6+x,1))\mid x\in Z_8\}$,则根据差方法可知，$B_i$ mod (8,-)就是一个 G_i-$HD(8^2)$，其中 $i=1,2,3,4$.

引理 3 对大于 1 的正整数 t，存在 G_i-$HD(16^t)$，其中 $i=1,2,3,4$.

证 根据引理 2 和推论 1 可得存在 G_i-$HD(16^2)$.

3 图设计

引理 4 对于 $v=16,17$，存在 $(v,G,1)$-GD，其中 $i=1,2,3,4$.

证 当 $v=16$ 时，取点集 $X=Z_{15}\cup\{\infty\}$,令

$A_1=(0,1,3,6,12,7,4,\infty)$，$A_2=(0,1,3,6,12,7,4,\infty)$,

$A_3=(0,1,3,6,12,7,4,\infty)$，$A_4=(0,1,3,6,12,7,4,\infty)$,

易证 A_i 表示的图 G_i 的 8 条边所对应的无序对恰有一条边是 $(\infty,x),x\in Z_{15}$，另外 7 条边恰覆盖了点集 Z_{15} 中无序差 1,2,3,4,5,6,7 各 1 次，令 A_i mod 15 表示由区组 A_i 中点 ∞ 不动，其它点进行模 15 加法取值所得的 15 个区组，如 A_1 mod $15=\{(x,1+x,3+x,6+x,12+x,7+x,4+x,\infty)\mid x\in Z_{15}\}$，则根据差方法可知，$A_i$ mod 15 就是一个 $(16,G_i,1)$-GD，其中 $i=1,2,3,4$.

当 $v=17$ 时，取点集 $X=Z_{17}$.令

$B_1=(0,1,3,6,12,7,4,8)$，$B_2=(0,1,3,6,12,7,4,9)$,

$B_3=(0,1,3,6,12,7,4,11)$，$B_4=(0,1,3,6,12,7,4,14)$.

容易验证 B_i 表示的图 G_i 的 8 条边所对应的无序对恰覆盖了点集 Z_{17} 中无序差 1,2,3,4,5,6,7,8 各 1 次，令 B_i mod 17 表示由区组 B_i 中点进行模 17 加法取值所得的 17 个区组，如 B_1 mod $17=\{(x,1+x,3+x,6+x,12+x,7+x,4+x,8+x)\mid x\in Z_{17}\}$，则根据差方法可知，$B_i$ mod 17 就是一个 $(17,G_i,1)$-GD，其中 $i=1,2,3,4$.

定理 2　存在 $(v, G_i, 1)$ - GD 当且仅当 $v \equiv 0,1$ (mod16) 且 $v \geqslant 8$，其中 $i = 1,2,3,4$.

证　由引理 3, 引理 4 和定理 1 可得.

4　参考文献

[1] Heinrich K. Path-decompositions [J]. Le Matematiche, 1992, 47(2): 241-258.

[2] Bosák J. Decompositions of graphs [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1990.

[3] Bermond J C, Schonheim J. G-decompositions of K_n, where G has four vertices or less [J]. Discrete Math, 1977, 19(2): 113-120.

[4] Bermond J C, Huang C, Rosa A, et al. Decomposition of complete graphs into isomorphic subgraphs with five vertices [J]. Ars Combinatoria, 1980, 10: 211-254.

[5] Yin Jianxing, Gong Busheng. Existence of G-designs with $|V(G)|=6$ [J]. Combinatorial Designs and Application, 1998, 126: 201-218.

[6] Kang Qingde, Zuo Huijuan, Zhang Yanfang. Decompositions of λK_v into k-circuits with one chord [J]. Australasian Journal of Combinatorics, 2004, 30: 229-246.

[7] Kang Qingde, Du Yanke, Tian Zihong. Decomposition of λK_v into some graph with six vertices and seven edges [J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2006, 136(4): 1394-1409.

[8] Kang Qingde, Yuan Landang, Liu Shuxia. Graph designs for all graphs with six vertices and eight edges [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2005, 21(3): 469-484.

[9] Kang Qingde, Zhao Hongtao, Ma Chunping. Graph designs for nine graphs with six vertices and nine edges [J]. Ars Combinatoria, 2008, 88: 379-396.

[10] Kang Qingde, Ma Chunping, Zhao Hongtao. G-decomposition of λK_v, where G has six vertices and nine edges [J]. Ars Combinatoria, 2010, 94: 485-510.

[11] Gao Yinzhi, Zuo Huijuan, Kang Qingde. Decomposition of λK_v into the graphs with 7 points, 7 edges and an even-circle [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2004, 27(4): 646-658.

[12] 张艳芳, 梁志和. 拟群在构作图 $K_{m+2}\backslash K_m$ 的图设计中的应用 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2008, 32(5): 579-581.

[13] 李明超, 康庆德, 霍京京. 完全图K_v的8长圈最大填充设计 [J]. 河北师范大学学报: 自然科学版, 2009, 33(4): 421-424.

[14] 苏国强, 刘红娟, 王立冬. 一个6点9边图的图设计 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2011, 27(2): 143-147.

The Graph Designs of Connected Graphs with 8 Vertices Obtained by Adding Two Pendant Edges from a Cycle of Length 6

ZHANG Yan-fang

(College of Mathematics and Statistics, Hebei University of Economics and Business, Shijiazhuang Hebei 050061, China)

Abstract: The needed holey graph designs are constructed. The existence spectrum of (v, G_i ,1)-GD is obtained by combining with the existence of some graph designs of small orders, i=1,2,3,4, where G_1, G_2, G_3, G_4 are the connected graphs of order 8 obtained by adding two pendant edges from a cycle of length 6 and G_1, G_2, G_3, G_4 are not isomorphic each other.

Key words: graph design; holey graph design; connected graph

(责任编辑: 曾剑锋)